

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Географический факультет

«Утверждено»

Декан географического факультета,
член-корр. РАН С.А. Добролюбов



Согласовано

Учебно-методической комиссией
факультета

« 06 » декабря 2018г.

Протокол № 11
[Signature]

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Высшая математика и программирование»

по направлению подготовки 05.03.03 «Картография и геоинформатика»
уровня высшего образования бакалавриат
с присвоением квалификации «бакалавр»

Направленность (профиль): общий

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Картография и геоинформатика» (*программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки*) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

© Географический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения факультета.

1. Цели и задачи освоения дисциплины

Цель – фундаментальная подготовка бакалавров для научно-исследовательской и проектно-производственной деятельности, выработка у студентов умения формализации практических задач и подбора адекватных математических моделей для их решения.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование теоретического представления о математических основах геоинформационных систем;
- обучение методам обработки и анализа (пространственного и статистического) данных;
- овладение практическими навыками применения математических методов при работе с геоинформационными системами.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Высшая математика и программирование» относится к вариативной части ООП, входит в модуль «Современное естествознание», является обязательной и читается в третьем и четвертом семестре 2-го курса.

Дисциплина требует знаний некоторых разделов математики (математический анализ, аналитическая геометрия) и информатики.

Изучение дисциплины «Высшая математика и программирование» необходимо для освоения последующих дисциплин, входящих в базовые и вариативные части модулей «Геоинформатика и геоинформационное картографирование», «Основы картографии, геоинформатики и дистанционного зондирования», «Аэрокосмическое зондирование».

3. Требования к результатам освоения дисциплины

В соответствии с ОС МГУ и «Оценочными и методическими материалами формирования компетенций, оценивания уровня знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности у обучающихся и выпускников» освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций и получение следующих результатов обучения:

Владение базовыми знаниями фундаментальных разделов математики в объеме, необходимом для обработки информации и анализа географических и картографических данных (ОПК-1.Б, формируется полностью)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: определения, терминологию и основные теоремы (алгоритмы) математических дисциплин, составляющих основу геоинформационных систем, математические методы обработки, а также пространственного и статистического анализа данных.

Уметь: формализовать практические задачи, подбирать математические модели для их решения, профессионально и осознанно пользоваться средствами ГИС-пакетов для пространственного и статистического анализа данных.

Владеть: математическими методами обработки и анализа данных.

4. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины и виды учебной работы.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачётные единицы.

Общая аудиторная нагрузка – 124 часа, в т.ч. лекции – 31 час, семинары – 93 часа.

Объем самостоятельной работы студентов – 20 академических часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	семестр	неделя	Виды учебной работы, включая СРС и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Контактная работа		СРС	
				лекции	семинары		
1	Основные понятия общей и линейной алгебры	3	1	2	2	0	Устный опрос
2	Комплексные числа и функции комплексной переменной	3	2-3	2	6	0	Контрольная работа.
3	Преобразования плоскости	3	4-5	2	6	0	Контрольная работа.
4	Машинная арифметика, алгоритмы, абстрактные типы данных	3	6-8	2	10	0	Устный опрос
5	Элементы вычислительной геометрии	3	9-10	2	6	0	Устный опрос
6	Численные методы	3	11-13	3	9	0	Устный опрос
7	Интерполяция и аппроксимация	3	14-17	4	12	0	Устный опрос
8	Элементы дифференциальной геометрии	3	18	1	3	0	Устный опрос
9	Промежуточная аттестация	3				3	Зачет
10	Введение в теорию вероятностей	4	1	1	3	0	Устный опрос
11	Основы комбинаторики, вероятность	4	2-3	2	6	1	Домашние задания. Контрольная работа.
12	Дискретные случайные величины	4	4	1	3	1	Домашние задания. Контрольная работа.
13	Непрерывные случайные величины.	4	5-6	2	6	1	Домашние задания. Контрольная работа.
14	Функции от случайных аргументов. Ковариация и корреляция	4	7	2	6	1	Домашние задания. Контрольная работа.
15	Введение в математическую статистику.	4	8	1	3	0	Устный опрос
16	Статистические оценки параметров распределений	4	9	1	3	0	Устный опрос
17	Статистическая проверка статистических гипотез	4	11-12	2	6	1	Домашние задания. Контрольная работа.
18	Регрессионный анализ. Понятие о методах многомерного статистического анализа	4	13	1	3	0	Устный опрос
19	Промежуточная аттестация	4				12	Экзамен
	Всего			31	93	20	

5. Содержание дисциплины

Содержание лекций

Первое полугодие (3-й семестр).

Основные понятия общей и линейной алгебры. Множества, отображения, группа, кольцо, поле. Метрическое пространство. Линейное пространство. Норма. Скалярное произведение. Линейная независимость. Базис пространства. Линейные отображения. Собственные векторы и значения. Сингулярные числа матрицы.

Комплексные числа и функции комплексной переменной. Определение комплексных чисел. Тригонометрическая форма представления. Операции над комплексными числами, их свойства и геометрическая интерпретация. Элементы топологии на плоскости, открытость, связность. Функции комплексной переменной, непрерывность и дифференцируемость, условия Коши-Римана. Геометрическая

интерпретация и конформные отображения. Элементарные функции. Формула Эйлера.

Преобразования плоскости. Линейные и аффинные преобразования, их свойства. Проективные преобразования, их свойства. Общие нелинейные преобразования, определение их свойств по матрице Якоби.

Машинная арифметика, алгоритмы. Машинное представление чисел, модель чисел с плавающей точкой. Ошибки в вычислениях. Алгоритмы и их сложность. Алгоритмы сортировки и поиска. Абстрактные типы данных: множества, списки, деревья, графы. Типовые задачи на графах и алгоритмы их решения: кратчайшие пути, задача «коммивояжера», остовные деревья, раскраска.

Элементы вычислительной геометрии. Основные определения. Параметрическое представление прямой, луча и отрезка. Алгоритмы определения пересечения отрезков. Выпуклая оболочка множества точек, алгоритмы построения. Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного. Алгоритмы определения взаимного расположения геометрических объектов, в частности, алгоритмы определения принадлежности точки многоугольнику. Алгоритм штриховки области.

Численные методы. Системы линейных уравнений, прямые и итерационные методы их решения. Число обусловленности матрицы. Методы решения нелинейных уравнений: простой итерации, дихотомии, Ньютона, секущих. Теоремы об условиях и скорости сходимости этих методов. Подходы к решению систем нелинейных уравнений, включая метод Ньютона. Численное дифференцирование, функции одной и двух переменных. Численное дифференцирование сеточных функций. Вычисление определенных интегралов. Простые (прямоугольников, трапеций, Симпсона) квадратурные формулы, квадратуры Гаусса, оценка погрешности. Составные и адаптивные квадратурные формулы. Вычисление двойных интегралов, вычисление площади поверхности, интегрирование сеточных функций.

Интерполяция и аппроксимация. Понятие интерполяции и аппроксимации. Интерполяция функций многочленами, многочлены Лагранжа, интерполяция обобщенными многочленами. Эрмитова интерполяция. Полиномиальные сплайны, интерполяция и аппроксимация функций сплайнами. Сплайны с натяжением. Моделирование кривых на плоскости, кривые Безье. Метод наименьших квадратов. Тригонометрические многочлены, ряды Фурье. Интерполяция и аппроксимация функций двух и более переменных. Методы моделирования геополей, используемые в ГИС.

Элементы дифференциальной геометрии. Кривизна кривой на плоскости, формулы для явного и параметрического представления кривой. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Нормальные сечения, главные кривизны. Кривизны поверхности, используемые при анализе рельефа, вычислительные формулы, определение свойств поверхности по значениям этих кривизн.

Второе полугодие (4-й семестр).

Случайные события, вероятность. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Теоретико-множественный подход к определению вероятности. Геометрические вероятности. Понятие о вероятностном пространстве (факультативно). Несовместные и независимые события, полная группа событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность, формулы Байеса.

Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Биномиальное распределение, формула Бернулли. Распределение Пуассона. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия), их свойства. Функция распределения вероятностей случайной величины, ее

свойства. Плотность распределения вероятностей, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Равномерное распределение. Нормальное распределение, его свойства. Распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера. Показательное распределение. Многомерные случайные величины. Функции от случайных величин, их числовые характеристики. Моменты и квантили. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин. Линейная регрессия. Основные предельные теоремы: закон больших чисел в разных формулировках (теоремы Бернулли, Чебышева и др.), центральная предельная теорема.

Выборки и их характеристики. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборок. Эмпирическая функция распределения. Вариационный ряд. Вычисление выборочных значений моментов.

Статистические оценки параметров распределения. Виды оценок (несмещенные, эффективные, состоятельные; точечные и интервальные). Доверительные интервалы для оценок математического ожидания нормального распределения. Методы построения точечных оценок (метод моментов и метод наибольшего правдоподобия).

Статистическая проверка статистических гипотез. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая (альтернативная), простая и сложная гипотезы. Статистические критерии, критическая область. Примеры проверки статистических гипотез о значениях параметров распределений (математическое ожидание нормального распределения, сравнение дисперсий и др.). Изучение зависимости между случайными величинами. Выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, проверка гипотезы о значимости линейной связи признаков. Ранговые коэффициенты корреляции Кендэлла и Спирмена, проверка гипотез о значимости корреляционной связи признаков. Критерии согласия (Колмогорова, Колмогорова-Смирнова, омега-квадрат, хи-квадрат Пирсона и Фишера), их использование. Способы проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Понятие о многомерном статистическом анализе. Регрессионный анализ. Кластерный анализ. Факторный анализ. Метод главных компонент.

План проведения семинаров

Семинары проводятся в интегрированной форме с лекциями. Изложенный теоретический материал иллюстрируется на конкретных примерах. В тех случаях, когда это возможно, рассматриваются способы решения типовых задач. В завершение некоторые из типовых задач решаются студентами самостоятельно.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

Выполнение домашних работ, связанных с решением задач по темам, рассмотренным на лекциях и семинарах.

7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Примерный перечень вопросов для устного опроса (III семестр)

1. Дайте определение группы, кольца, поля, приведите примеры.
2. Дайте определение метрического пространства и приведите примеры.
3. Дайте определение нормированного пространства и приведите примеры.
4. Что такое линейное пространство, линейная независимость, базис? Приведите примеры.
5. Что такое собственные вектора и собственные числа линейного преобразования?

6. Что такое сингулярные числа матрицы, как они связаны с геометрическими свойствами линейного преобразования?
7. Как определяются комплексные числа, какие существуют формы их представления, как выполняются арифметические операции? Является ли множество этих чисел полем?
8. Что утверждается в основной теореме алгебры?
9. Чем отличается комплексная дифференцируемость функций от дифференцируемости в действительном смысле? Какие геометрические свойства имеют отображения плоскости, осуществляемые комплексно дифференцируемыми функциями?
10. Что такое предельная точка множества, какие множества называются открытыми? Как определяется граница множества?
11. Дайте определение непрерывной кривой на плоскости. Какие множества называются линейно связными? Что такое многосвязные множества?
12. Как задаются преобразования плоскости? Дайте определение линейных и аффинных преобразований. Как линейные и аффинные преобразования записываются в матричной форме?
13. Какие элементарные линейные преобразования вы знаете? Как получается матрица композиции линейных преобразований?
14. Что такое однородные координаты? Как они используются для унификации вычислений при выполнении аффинных и проективных преобразований?
15. Какие геометрические свойства линейного преобразования можно определить с помощью коэффициентов его матрицы?
16. Что такое главная линейная часть преобразования и матрица Якоби?
17. Какие причины возникновения ошибок в вычислениях вы знаете? Приведите примеры устойчивых и неустойчивых задач.
18. Как оценивается скорость работы (сложность) алгоритма?
19. В чем состоят задачи сортировки и поиска, какие алгоритмы сортировки и поиска вы знаете?
20. Какие типовые задачи на графах вы знаете? Какие практические задачи могут сводиться к решению типовых задач на графах?
21. Как задать отрезок, используя параметрическое представление?
22. Какие задачи пространственного анализа, решаемые средствами ГИС, можно отнести к вычислительной геометрии?
23. Дайте определение выпуклого множества на плоскости. Что такое выпуклая оболочка множества точек на плоскости? На каких свойствах выпуклой оболочки конечного множества точек основаны известные вам алгоритмы ее построения?
24. Какие алгоритмы определения принадлежности точки многоугольнику вы знаете? Могут ли они применяться для многосвязных областей?
25. Каким образом хранятся линейные и площадные объекты в ГИС?
26. Как определяется триангуляция конечного множества точек на плоскости. Что такое триангуляция Делоне?
27. Дайте определение диаграммы Вороного конечного множества точек на плоскости. Каким образом можно обобщить это понятие?
28. Чем отличаются прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений (СЛУ), назовите их достоинства и недостатки.
29. Что такое число обусловленности матрицы? Почему его важно оценивать при численном решении СЛУ?
30. Какие методы решения нелинейных уравнений вы знаете, какой из них обладает наибольшей скоростью сходимости?

31. Для чего предназначены квадратурные формулы? Какие простые квадратурные формулы вы знаете?
32. Как получаются квадратурные формулы Гаусса? Что такое составные и адаптивные квадратуры?
33. Как вычисляется площадь поверхности?
34. Что такое интерполяция и аппроксимация, в чем их отличия?
35. Дайте определение полиномиальных сплайнов. В чем состоит вариационное свойство кубических и линейных сплайнов?
36. Как определяются сплайны с натяжением, каковы их свойства?
37. В чем состоит метод наименьших квадратов, какие задачи решаются с его помощью?
38. Как определяются нормальные кривизны поверхности, какие из них используются при морфометрическом анализе рельефа?

Примерный перечень задач контрольных работ (III семестр)

1. Вычислите выражение: $\frac{1+i}{1-i}$.
2. Найдите все корни уравнения $z^3 - 1 = 0$.
3. Является ли комплексно дифференцируемой функция $f(z) = \frac{x+iy+1}{x-iy}$;
($z = x + iy$).
4. Аффинное преобразование задано формулой: $\begin{cases} x' = 4x - 3y - 1 \\ y' = 3x + 4y + 2 \end{cases}$. Сохраняет ли это преобразование: а) углы; б) площадь; в) ориентацию?
5. Линейное преобразование задано матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите образ точки $(-1, 2)$ при этом преобразовании.

Примерный перечень вопросов для устного опроса (IV семестр)

1. Сформулируйте понятия «событие», «испытание», дайте классическое определение вероятности события.
2. Что такое несовместные и независимые события? Могут ли несовместные события быть независимыми?
3. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Что такое генеральная совокупность, выборка? Что понимается под репрезентативностью выборки? Что такое вариационный ряд?
5. Как вычисляются выборочные числовые характеристики?
6. Какие свойствами характеризуются точечные статистические оценки параметров распределений? Что такое доверительный интервал?
7. Какие методы получения статистических оценок вы знаете?
8. В чем суть регрессионного анализа?
9. Какие методы многомерного статистического анализа вы знаете, при решении каких практических задач они применяются?

Домашние задания (IV семестр)

В качестве домашних заданий предлагаются задачи (от 3 до 5) из учебника и задачника Гмурмана В.Е. (см. список из п.9) по соответствующей теме лекций и семинаров.

Примерный перечень задач для контрольных работ (IV семестр)

1. Прибор, регистрирующий элементарные частицы, содержит 7 датчиков, причем попадающая в него частица может быть зарегистрирована любым из датчиков с равной вероятностью. Прибор зарегистрировал 3 частицы. Найти вероятности следующих событий:
 $A = \{\text{все частицы зарегистрированы первым датчиком}\};$
 $B = \{\text{все частицы зарегистрированы одним и тем же датчиком}\};$
 $C = \{\text{четвертый датчик не зарегистрировал ни одной частицы}\}.$
 $D = \{\text{все частицы зарегистрированы разными датчиками}\}.$
2. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 8 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что извлечены шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?
3. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что он наберёт нужный номер не более чем за девять попыток.
4. Для сдачи зачета студент должен ответить на первый заданный преподавателем вопрос, или, в случае неудачи, на второй. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет, если он выучил только 26 вопросов из 30?
5. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.
6. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0.8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не более четырех?
7. Пусть в ружейной пирамиде находятся две винтовки типа 1 и три – типа 2, причём вероятности попадания в мишень из этих винтовок соответственно равны 0.8 и 0.7. Стрелок сделал 7 выстрелов из наудачу взятой винтовки, ровно 4 раза поразив мишень. Чему равна вероятность того, что он стрелял из винтовки типа 1?
8. Двое игроков поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот из них, у кого раньше выпадет шесть очков. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.
9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа очков, выпадающих при бросании двух игральных костей.
10. Сторона квадрата x измерена приближенно, причем $1 \leq x \leq 2$. Рассматривая длину стороны квадрата как случайную величину X , равномерно распределенную на отрезке $[1,2]$, найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение площади квадрата.
11. Случайная величина X имеет плотность распределения
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{при } x \in (0, \pi] \\ 0 & \text{при } x \notin (0, \pi] \end{cases}.$$
 Найти $M(X)$ и $D(X)$.
12. Плотность распределения вероятностей случайной величины X равна
$$p(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < \infty).$$
 Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$.
13. Случайная величина X задана плотностью распределения:
$$p(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x-\beta|},$$
 $-\infty < x < \infty, \alpha > 0$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

14. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Найти функцию и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.
15. Для проверки игральной кости на симметричность ее бросили случайным образом 600 раз и получили следующие частоты для количества выпавших очков:

Число выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений	92	95	106	108	91	108

- Можно ли считать игральную кость симметричной на уровне значимости $\alpha = 0.05$?
16. Группа из 15 студентов поровну состоит из отличников, хорошистов и троечников. Отличник на экзамене обязательно получит оценку не ниже 4, причем оценку 5 с вероятностью **0.9**; хорошист может получить 5 с вероятностью **0.3**, 4 с вероятностью **0.6**, но оценку 2 не получит в любом случае. Троечник никогда не получит 5, зато может получить оценку 2 с вероятностью **0.2**, а оценку 4 с вероятностью **0.3**. Новый преподаватель наугад вызывает незнакомого студента. А) Какова вероятность, что студент получит 4 или 5? Б) После экзамена выяснилось, что студент получил 4. Какова вероятность того, что он из троечников? В) Какова вероятность того, что все студенты сдадут экзамен?
17. Та же группа из 15 студентов сдает зачет. Студент получает зачет при условии, что он решит правильно не менее трех задач из предлагаемых четырех. Каждую из задач студент-отличник может решить с вероятностью $9/10$, студент-хорошист с вероятностью $8/10$, а студент-троечник – с вероятностью $6/10$. Найти математическое ожидание случайной величины – числа студентов, сдавших зачет.

8. Формы и содержание промежуточной аттестации

3-й семестр: зачет устный.

Примерный перечень задач к зачету (III семестр)

- Найти все значения $\sqrt[3]{i}$. Результат записать в декартовой форме.
- Даны угол $\varphi = 30^\circ$ и точка O с координатами $(-1, 2)$. Найти образ точки $A = (1, -2)$ при повороте на угол φ относительно точки O .
- На плоскости заданы четыре точки: $A = (1, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (5, 5)$, $D = (3, 2)$. Определить, пересекаются ли отрезки AB и CD и найти точку пересечения, если она существует. Точка пересечения должна быть найдена с использованием параметрического представления прямой.
- Является ли комплексно дифференцируемой функция $f(z) = \frac{x+iy+1}{x-iy}$; ($z = x+iy$).
- Аффинное преобразование задано формулой:
$$\begin{cases} x' = 4x - 3y - 1 \\ y' = 3x + 4y + 2 \end{cases}$$
 Сохраняет ли это преобразование: а) углы; б) площадь; в) ориентацию?
- На плоскости заданы четыре точки $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (3, 6)$, $D = (4, 3)$. Определить, лежит ли точка D внутри треугольника ABC . Задача должна быть решена аналитически.

Примерный перечень вопросов к зачету (III семестр)

- Алгоритмы и их сложность. Алгоритмы сортировки.
- Линейное пространство, линейная независимость, базис пространства.
- Понятие нормы и скалярного произведения в линейном пространстве, примеры.
- Процесс создания программ. Схема Горнера. Алгоритмы поиска.

5. Элементы вычислительной геометрии: тест на пересечение отрезков, прямой и многоугольника, двух прямоугольников, вычисление площади многоугольника и др.
6. Алгоритмы проверки принадлежности точки многоугольнику.
7. Выпуклая оболочка множества точек на плоскости. Алгоритмы поиска выпуклой оболочки.
8. Цифровые способы представления графических изображений: векторный и растровый. Алгоритмы разложения отрезка в растр.
9. Деревья, терминология, типичные примеры использования.
10. Графы, терминология, задачи на графах.
11. Преобразования движения и подобия на плоскости. Теоремы Шаля.
12. Аффинные преобразования плоскости, их свойства. Однородные координаты.
13. Проективные преобразования плоскости.
14. Нелинейные преобразования плоскости. Условие сохранения площадей, углов и ориентации.
15. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Сингулярные числа матрицы. Определение коэффициентов искажения длин для преобразований на плоскости.
16. Комплексные числа. Геометрическая иллюстрация комплексных чисел.
17. Функции комплексной переменной. Основная теорема алгебры. Условия сохранения углов.
18. Понятие о численных методах решения систем линейных уравнений. Число обусловленности матрицы.
19. Методы численного решения уравнений (дихотомия, метод Ньютона, секущих).
20. Табличное задание функций. Численное дифференцирование функций одной и двух переменных.
21. Градиент и его свойства. Нормаль к поверхности. Методы аналитической отмывки рельефа.
22. Численное интегрирование функций одной переменной. Формулы прямоугольников, трапеции, Симпсона. Понятие об адаптивных методах численного интегрирования.
23. Численное интегрирование функций от двух переменных. Вычисление объемов и площади поверхности. Интегрирование по области.
24. Интерполяция и аппроксимация функций многочленами Теорема Вейерштрасса. Пример Рунге. Наилучшие узлы интерполяции.
25. Понятие о сплайнах. Сглаживание данных с помощью В-сплайнов.
26. Методы моделирования кривых. Понятие кривизны кривой.
27. Метод наименьших квадратов.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО)

Оценка	Незачет	Зачет
РО и соответствующие виды оценочных средств		
Знания (виды оценочных средств: устные опросы, контрольные работы)	Фрагментарные знания или отсутствие знаний	Сформированные систематические знания или общие, но не структурированные знания
Умения (виды оценочных средств: контрольные работы)	В целом успешное, но не систематическое умение или отсутствие умений	Успешное и систематическое умение или в целом успешное, но содержащее отдельные

		пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: контрольные работы)	Наличие отдельных навыков или отсутствие навыков	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач или в целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме

4-й семестр: экзамен устный.

Примерный перечень вопросов к экзамену (IV семестр)

1. События. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Теоретико-множественный подход к определению вероятности.
2. Условная вероятность, независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез, формулы Байеса.
4. Независимые испытания, формула Бернулли. Закон больших чисел (теорема Бернулли).
5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
6. Понятие случайной величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.
7. Основные числовые характеристики распределения вероятностей дискретных случайных величин, их свойства. Закон больших чисел (теорема Чебышева).
8. Функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины, их свойства.
9. Основные числовые характеристики распределения вероятностей непрерывных случайных величин. Примеры вычислений для равномерного, нормального и показательного распределений.
10. Непрерывные и дискретные случайные величины, примеры. Квантили. Начальные и центральные моменты, асимметрия и эксцесс.
11. Нормальное распределение, его свойства. Понятие о центральной предельной теореме (теорема Ляпунова).
12. Распределения, связанные с нормальным. Равномерное распределение. Показательное распределение. Где встречаются (используются) указанные распределения.
13. Функция одного случайного аргумента, ее распределение и математическое ожидание.
14. Ковариация и коэффициент корреляции, их свойства.
15. Статистические выборки и их характеристики. Выборочная функция распределения. Вариационный ряд. Полигон и гистограмма частот.
16. Оценки параметров распределения, их свойства. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения.
17. Оценки параметров распределения, их свойства. Интервальная оценка дисперсии нормального распределения.
18. Методы построения точечных оценок параметров распределений. Примеры применения метода моментов для конкретных распределений.

19. Методы построения точечных оценок параметров распределений. Примеры применения метода наибольшего правдоподобия для конкретных распределений.
20. Статистические гипотезы и критерии. Отыскание критических областей. Проверка гипотезы о значении математического ожидания нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии.
21. Виды шкал измерений. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Проверка гипотезы о значимости связи между выборками.
22. Статистические гипотезы и критерии. Отыскание критических областей. Проверка гипотез о значении дисперсии нормального распределения и о равенстве дисперсий двух нормальных распределений.
23. Виды шкал измерений. Ранговый коэффициент корреляции Кендалла. Проверка гипотезы о независимости двух признаков.
24. Понятие о регрессионном анализе, простая линейная регрессия. Свойства оценок параметров регрессии.
25. Метод наименьших квадратов, области его применения.
26. Простая линейная регрессия: проверка гипотезы о значимости линейной связи. Коэффициент детерминации.
27. Статистические гипотезы и критерии. Теорема Пирсона и критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы. Примеры использования.
28. Статистические гипотезы и критерии. Теорема Фишера и критерий согласия хи-квадрат для сложной гипотезы, его использование для проверки нормальности распределения.
29. Статистические гипотезы и критерии. Критерии согласия Колмогорова и омега-квадрат для простых и сложных гипотез.

Примерный вариант задачи к экзамену (IV семестр)

В соревнованиях по стрельбе участвует команда из двух стрелков. Мишень состоит из трех зон. За попадание в первую зону начисляется 6 очков, во вторую – 4 очка, в третью – 2 очка. Если стрелок не попал в мишень, то очки не начисляются. Вероятности попадания в 1-ю, 2-ю и 3-ю зоны мишени для первого стрелка равны 0.6, 0.2 и 0.1 соответственно, для второго – 0.5, 0.2 и 0.2. Найти закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y – суммарного числа очков, выбиваемых командой из двух этих стрелков за один раунд соревнований (в раунде каждый из стрелков команды делает по одному выстрелу). Чему равна вероятность того, что команда за один раунд наберет не менее 6 очков?

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО)

Оценка	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
РО и соответствующие виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: устные опросы, контрольные работы)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: контрольные работы)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематич	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает	Успешное и систематическое умение

		еское умение	неточности непринципиального характера)	
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: контрольные работы)	Отсутствие навыков	Наличие отдельных навыков	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Кошель С.М. Высшая математика с основами программирования: Учебное пособие. – М.: Географический ф-т МГУ, 2010. – 200с.

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата. 12-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 479 с. (или более ранние издания)

б) дополнительная литература:

1. Ахо А. В., Хопкрофт Д., Ульман Д. Д. Структуры данных и алгоритмы. М.: Изд. дом «Вильямс», 2000. – 384с.

2. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. – 575с.

3. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1296с.

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. – 688с.

5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 281 с.

6. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. – 478с.

7. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003. – 432с.

8. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. – 604 с.

9. Фоли Дж., вэн Дэм А. Основы интерактивной машинной графики. В 2-х т. – М.: Мир, 1985.

10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Математические методы машинных вычислений. М.: Мир, 1980. – 280с.

11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2004. – 404с.

12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575с.

13. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 544с.

14. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Microsoft Visual Studio 2008 (или более поздние версии)
Intel Visual Fortran Composer XE 2011 (или более поздние версии)

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория для проведения лекционных и семинарских занятий.

11. Контролирующие материалы по дисциплине (ФОС)

Тесты контроля остаточных знаний по дисциплине

Семестр III

Какие из приведенных ниже высказываний и утверждений *неверны* или *некорректны*:

- 1) в основной теореме алгебры утверждается, что любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень
- 2) если умножить комплексное число на комплексно сопряженное, то получится произвольное действительное число
- 3) чтобы умножить два комплексных числа, нужно перемножить их действительные и мнимые части
- 4) чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные и мнимые части
- 5) для комплексной дифференцируемости комплексной функции достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были бесконечно дифференцируемы как действительные функции двух переменных
- 6) для однозначного определения коэффициентов аффинного преобразования достаточно задать образы трех произвольных различных точек
- 7) проективные преобразования сохраняют углы
- 8) ортогональные преобразования сохраняют длины
- 9) начало координат является неподвижной точкой для линейных преобразований
- 10) для однозначного определения коэффициентов проективного преобразования достаточно задать образы четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой
- 11) линейное преобразование меняет ориентацию, если на главной диагонали его матрицы есть отрицательные числа
- 12) если определитель матрицы линейного преобразования равен 4, то это преобразование увеличивает расстояние между любой парой точек в 2 раза
- 13) любые три вектора на плоскости линейно зависимы
- 14) скорость работы алгоритмов сортировки не может быть выше $O(n \log n)$ в общем случае
- 15) метод Ньютона для поиска корней уравнений в случае сходимости на каждом шаге итераций удваивает число верных значащих цифр решения только для простых корней
- 16) метод дихотомии позволяет находить корни любой кратности, если уравнение задано непрерывной функцией
- 17) порядок числа обусловленности матрицы системы линейных уравнений соответствует числу верных значащих цифр в ответе при решении системы методом Гаусса
- 18) чем меньше определитель матрицы, тем больше ее число обусловленности
- 19) вырожденная матрица имеет бесконечно большое число обусловленности
- 20) если центры соседних ячеек диаграммы Вороного соединить отрезками, то получится триангуляция Делоне

Семестр IV

Какие из приведенных ниже высказываний и утверждений *неверны* или *некорректны*:

- 1) случайные величины X и Y независимы
- 2) случайные величины X и Y несовместны
- 3) события A и B некоррелированы
- 4) события A и B несовместны
- 5) вероятность суммы двух независимых событий равна сумме их вероятностей
- 6) вероятность произведения двух несовместных событий равна произведению их вероятностей
- 7) дисперсия произведения двух независимых случайных величин равна произведению их дисперсий
- 8) дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий
- 9) математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий
- 10) математическое ожидание разности двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий
- 11) первый начальный момент случайной величины называется математическим ожиданием
- 12) второй центральный момент случайной величины называется дисперсией
- 13) третий центральный момент случайной величины называется асимметрией
- 13) математическое ожидание суммы двух событий равно сумме их математических ожиданий
- 14) функция распределения случайной величины принимает значения от -1 до 1 и является неубывающей
- 15) плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины принимает только неотрицательные значения
- 16) случайная величина, распределенная по биномиальному закону, непрерывна
- 17) некоррелированные случайные величины независимы
- 18) состоятельная оценка параметра распределения может быть только несмещенной
- 19) анализ значения коэффициента корреляции Пирсона позволяет выявить наличие функциональной связи между признаками
- 20) для вычисления коэффициентов регрессионной модели обычно используют метод наименьших квадратов

Программа одобрена на заседании кафедры картографии и геоинформатики.

Зав. кафедрой



И.К. Лурье

Разработчик:

Кошель
Сергей
Михайлович

ведущий научный
сотрудник, к.г.н.

МГУ имени М.В.Ломоносова,
географический факультет, кафедра
картографии и геоинформатики

Эксперт:

Самсонов
Тимофей
Евгеньевич

ведущий научный
сотрудник, к.г.н.

МГУ имени М.В.Ломоносова,
географический факультет, кафедра
картографии и геоинформатики