

Бернар Ле Меоте

**ВВЕДЕНИЕ
В ГИДРОДИНАМИКУ
И ТЕОРИЮ ВОЛН
НА ВОДЕ**

Бернар Ле Меоте

ВВЕДЕНИЕ
В ГИДРОДИНАМИКУ
И ТЕОРИЮ ВОЛН
НА ВОДЕ

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАД • 1974

AN INTRODUCTION TO HYDRODYNAMICS AND WATER WAVES

by
BERNARD LE MÉHAUTÉ

PACIFIC OCEANOGRAPHIC LABORATORIES
MIAMI, FLORIDA
JULY 1969

Перевод с английского канд. геогр. наук
А. В. НЕКРАСОВА

Под редакцией д-ра техн. наук
М. С. ГРУШЕВСКОГО

По характеру изложения материала книгу можно считать пособием по курсу прикладной гидродинамики. На сравнительно доступном уровне даются теоретические основы гидродинамики и теории волн на воде. Математические выкладки приводятся сначала в самом простом виде и их сложность постепенно нарастает. Дается вывод основных дифференциальных уравнений. Излагаются методы интегрирования и преобразования этих уравнений. В заключительной части книги рассмотрены многие прикладные аспекты.

Рассчитана на широкий круг специалистов в области гидрометеорологии и гидротехники.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

За последние десятилетия, как известно, резко увеличилось количество научных изданий; это явление получило название «информационного взрыва». Наука о движении жидкостей и газов (гидроаэромеханика) не составляет исключения. Не говоря уже о бесчисленных журнальных статьях, можно отметить, что и число монографий и учебных пособий по механике жидкостей исчисляется многими десятками. Поэтому для каждой новой книги, представляющей определенную ценность, следует указать ее место в этом море информации.

Как это имеет место и для многих других наук, за последние 10—20 лет существенно расширилась область применения законов движения жидкостей, использовавшихся ранее в основном в таких традиционных сферах, как авиастроение, судостроение и турбостроение, теории морских ветровых волн и приливов. Так, выделилась очень большая и важная отрасль — магнитная гидродинамика. Широкое развитие в связи с освоением космоса (ракетостроением) получила механика переменной массы. Много работ посвящено близкой к гидродинамике механике сыпучего тела и т. д. Сама же гидроаэродинамика все более отчетливо разделяется на гидродинамику несжимаемой жидкости (собственно гидродинамика) и гидродинамику сжимаемой жидкости (аэродинамика). В последней выделяется в самостоятельную область исследование движения тел с большими скоростями, близкими к скорости звука или сверхзвуковыми (газовая динамика). Все это обусловило появление, кроме общих книг по гидроаэродинамике, более многочисленных изданий (как монографий, так и учебных пособий), относящихся к тому или иному из указанных разделов учения о движении жидкостей.

В области общей гидроаэродинамики известны такие солидные издания в зарубежной литературе, как классический труд Г. Ламба (1932 г., перевод — 1947 г.), в последнее десятилетие — монографии Л. М. Милл-Томсона и Дж. Бетчелора и др. В отечественной литературе надо отметить в первую очередь университетский курс Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе (последнее издание — 1963 г.), несколько более практичный капитальный труд Л. Г. Лойцянского (1970 г.) и ряд других. Все эти курсы требуют от читателя (в большей или меньшей степени) достаточно хорошей математической

подготовки и, попросту говоря, привычки работать с теоретической литературой. Таких качеств, однако, зачастую не хватает инженерам и студентам специальностей, так или иначе связанных с движением жидкостей. Кроме того, в общих курсах, естественно, не делается отбор материала, необходимого для работников той или иной профессии.

Эти обстоятельства привели, с одной стороны, к появлению учебных пособий по прикладной гидродинамике, характеризующихся наглядностью изложения, зачастую с некоторым ущербом для строгости. Из таких курсов можно назвать, например, переводную книгу Дж. Дейли и Д. Харлемана. Стремление к наглядности четко выражено и в объемистой монографии А. Н. Патрашева. С другой стороны, имеется целый ряд книг ограниченного объема и назначения, в которых из основ гидродинамики исключаются разделы, не являющиеся существенно важными для специалистов данного профиля; другие разделы, наоборот, усиливаются и акцентируется внимание на практических приложениях гидромеханики в соответствующей отрасли. Среди таких изданий можно назвать книгу Дмитриевского для высших мореходных училищ, М. Я. Алферьева — для институтов речного транспорта, Д. С. Кузнецова — для гидрометеорологов и т. д. Среди указанных и других источников нет ни одного, предназначенного для океанологов, гидрологов суши и специалистов по морской и береговой гидравлике и гидротехнике (в книге Кузнецова, вышедшей из печати более 20 лет тому назад, большинство практических аспектов относится к метеорологии).

Этот пробел и может восполнить предлагаемая вниманию читателя книга известного французского гидравлика и гидродинамика Бернара Ле Меоте, представляющая собой переработанный курс лекций. Характер изложения и построение курса тщательно продуманы автором в методическом отношении. Это проявляется прежде всего в чрезвычайной простоте изложения, сочетающейся с четкой формулировкой физических представлений. Математические методы используются автором осторожно — сначала в небольшом объеме, затем они постепенно усложняются. Выкладки выполняются очень подробно. Приводится большое количество наглядных иллюстраций. Для лучшего усвоения материала специально подобраны многочисленные, обычно довольно сложные примеры, многие из которых снабжены ответами. Учебный характер книги подчеркивается также отсутствием исторического обзора и списка литературы. В уравнениях для составляющих скорости, сил и т. д. отмечается физический смысл (происхождение) каждого из слагаемых. Автор не стесняется еще и еще раз повторить главные мысли, сопоставить между собой различные виды (случаи) уравнений с тем, чтобы показать, какие члены того или иного уравнения и как исключаются, добавляются или изменяются. Подобные методические приемы существенно облегчают усвоение содержания книги.

Автор выбрал оригинальную, нестандартную, но тем не менее вполне логичную последовательность изложения. Книга разделяется на два тома и три части. Рассматривая гидродинамику как область

прикладной математики, автор приводит в первой части только главные принципы и выбор на этой основе уравнений неразрывности и движения для всех возможных случаев гидродинамики несжимаемой жидкости. Во второй части (составляющей вместе с первой частью том I) дается описание некоторых важнейших математических операций, выполняемых над этими уравнениями, и установление такого фундаментального соотношения гидравлики, как уравнение Бернулли с его многочисленными приложениями. Рассматривается также уравнение импульсов, позволяющее ограничиться знанием характеристик потока только на его концах («не влезая внутрь» рассматриваемой массы жидкости) и поэтому являющееся, как указывает автор, «ключом» к гидравлике.

Особого внимания заслуживает третья часть книги (том II), посвященная теории волн на воде, поскольку именно эта часть представляет основной практический интерес для океанологов, гидрологов и специалистов по морской и речной гидротехнике и водным путям (некоторые специфические вопросы, такие, как поток в пористой среде, рассматриваются и выше). В этой части, особенно в главе XVII, органически сочетаются гидродинамика с гидравликой. Такое сочетание, прослеживающееся в меньшей степени и в других главах (например, IX и XII), является существенно необходимым в наше время, когда наблюдается, с одной стороны, тенденция доведения уравнений гидродинамики до практических выходов не только в случаях движения тела (решетки тел) в потоке или потоков в трубах, как это было ранее, но и для потока в границах более сложной формы; с другой стороны, тенденция теоретического осмысливания уравнений гидравлики. Следует отметить имеющиеся отдельные попытки частичной ликвидации разрыва между гидродинамикой и гидравликой, например в литературе по динамике русловых потоков (К. В. Гришанин), частично — по речной гидравлике (А. В. Караушев) и т. д. Обзор таких работ приводится в статье О. Ф. Васильева и В. М. Лятхера в книге «Механика в СССР за 50 лет». Вопросы соотношения гидромеханики и гидравлики открытых потоков детально освещаются в монографии Н. А. Картвелишвили «Потоки в недеформируемых руслах» (Гидрометеиздат, 1973), содержащей целый ряд новых подходов к решениям внутренней задачи (движение жидкости в русле).

Читателям, интересующимся распространением волн на воде, следует иметь в виду, что эти вопросы в практических аспектах отражены в океанологической литературе в книгах Г. Свердрупа, Дитриха и Калле и т. д. за рубежом, В. В. Шулейкина, Вс. Березкина, Н. Н. Зубова в СССР, в теоретических аспектах в монографии Дж. Дж. Стокера. Некоторые сведения о физических представлениях и практических аспектах расчета морских ветровых волн и длинных волн в естественных руслах можно получить соответственно в книгах Г. Е. Кононковой «Динамика морских волн» (изд. МГУ, 1969) и М. С. Грушевского «Волны попусков и паводков в реках» (Гидрометеиздат, 1969).

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга представляет собой переработанное автором изложение лекций, прочитанных им для аспирантов инженерно-строительного факультета Кингстонского университета (Онтарио) в 1959—1960 гг. При подготовке к публикации этот материал был пересмотрен и дополнен.

Главная цель книги состоит в том, чтобы на сравнительно простом уровне изложить основные вопросы теоретической гидродинамики и теории волн на воде. Можно надеяться, что она принесет пользу тем гидравликам и инженерам-гидротехникам, которые хотели бы изучить или освежить в памяти теоретические аспекты своей профессии.

Книгу можно также считать пособием по курсу прикладной математики; с другой стороны, ее можно рассматривать как изложение теоретических основ гидравлики и береговой гидротехники. В первом случае студенты найдут в ней материал, показывающий, каким образом можно использовать математический аппарат в области физики, довольно хорошо поддающейся математическому описанию. Поскольку такие студенты могут испытывать затруднения при попытках выразить физические явления с помощью математической модели, в этой книге уделяется большое внимание физическому смыслу основ гидродинамики. Для студентов, получивших инженерную подготовку, могут возникнуть трудности математического характера. Первое их знакомство с гидравликой происходит главным образом в практическом плане; поэтому их может отпугнуть попытка изучить такую книгу, как «Гидродинамика» Ламба, которая до сих пор остается основным пособием специалистов в этой области. Здесь же математические выкладки даются сначала в самом простом виде, и их сложность нарастает медленно и постепенно. Упор, сделанный на физический подход, позволяет избежать математических абстракций, и уравнения могут получить вполне конкретное истолкование.

Наконец, автор пытался сделать эту книгу независимой и «самообеспечивающей» в том смысле, чтобы инженер, желающий повысить свой теоретический уровень, мог самостоятельно изучать гидродинамику, не слушая специального лекционного курса. Статьи в технических журналах часто бывают недоступны пониманию рядового инженера, и наиболее ценные сообщения проходят мимо широкой аудитории, за исключением немногих специалистов. Очевидно,

что овладение основами теории поможет инженерам-гидравликам держаться на уровне современных исследований и даже принимать в них участие.

Считая чрезвычайно важным, чтобы переход к изучению дальнейшего материала происходил только после прочного усвоения теоретических основ, мы в первую очередь старались добиться ясного понимания фундаментальных положений теоретической гидравлики как с математической, так и с физической точек зрения. В частности, мы постоянно стремились подчеркивать физический смысл всех математических выражений и членов уравнений. Введение упрощений и допущений, часто основывающихся на физических соображениях, иллюстрируется на конкретных примерах. Сложные математические преобразования излагаются последовательно, с выполнением всех промежуточных выкладок. Наиболее легкой для восприятия является глава I, но по мере продвижения к концу книги необходимая математическая подготовка читателя должна расти.

Некоторые разделы гидравлики часто напоминают скорее определенную последовательность математических приемов, чем стройную и логичную систему взглядов и фактов. Поэтому при построении книги мы тщательно определяли место каждой главы, стремясь к максимально логичному и взаимосвязанному их расположению.

В первой части (том I) дается вывод основных дифференциальных уравнений, описывающих поток жидкости во всех возможных случаях. Указываются различные возможные аппроксимации. Во второй части излагаются методы интегрирования и преобразования этих уравнений. Методы интегрирования даны как в общем виде, так и применительно к некоторым типичным случаям. Третья часть (том II) посвящена рассмотрению движения потока со свободной поверхностью и теориям волн на воде как одному из наиболее важных разделов гидродинамики.

Мы решили не включать в эту книгу рассмотрение движения сжимаемой жидкости, за небольшими исключениями. Все вычисления и выводы даны в прямоугольной или цилиндрической системах координат. Векторные и тензорные преобразования не использовались, чтобы сделать материал доступным для читателя с минимальной математической подготовкой. Однако векторные и тензорные обозначения все же вводятся постепенно и в небольшом объеме, чтобы читатель ознакомился с ними и научился распознавать их при работе с литературой. В книге совсем не рассматриваются капиллярные эффекты.

Мы надеемся, что, ознакомившись с этой книгой, студенты, имеющие математические наклонности, почувствуют интерес к применению своих способностей в области изучения движения жидкости и динамической океанографии. Мы надеемся также, что она внушит студентам технических специальностей желание более глубоко изучить гидродинамику и математику. Кроме того, мы надеемся, что книга окажет существенную помощь гидравликам, гидротехникам и океанографам, желающим повысить свою теоретическую подготовку.

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика — наука, изучающая движения жидкости в макроскопическом масштабе. В сущности ее можно рассматривать как область прикладной математики, так как она имеет дело с математическим исследованием основных уравнений жидкой сплошной среды, полученных непосредственно из законов Ньютона. Гидродинамика служит фундаментом для гидравлики — прикладной науки, в которой приходится отступать от строгих математических принципов из-за нелинейных эффектов, неустойчивости, турбулентности и сложных «граничных условий», с которыми сталкиваются в инженерной практике.

Цель этого введения заключается в том, чтобы дать читателю, приступающему к изучению гидродинамики, краткую сводку того материала, который он встретит в книге. В самом деле, начинающему читателю следует все время помнить о конечной цели. Он должен сознавать, что путь может быть долгим и трудным, но что каждый новый шаг приближает его к желанному результату.

В большинстве случаев задачей гидродинамики является нахождение определенных характеристик потока (скоростей частиц) и сил (давлений). Первый шаг заключается в определении граничных условий, т. е. в определении тех пределов, в которых должен находиться поток. Для отыскания двух неизвестных величин (скорости и давления или возвышения свободной поверхности) необходимы два уравнения. Основной целью первой части книги является получение этих двух уравнений для всех возможных случаев: это уравнение неразрывности и уравнение импульсов (движения).

Уравнение неразрывности выражает простую закон сохранения материи. Вывод уравнения движения требует несколько более сложных рассуждений. Любое движение частицы жидкости приводит к возникновению сил инерции, равных приложенным силам. В первой части дан тщательный анализ элементарного движения частицы жидкости и показано, каким образом допущение о безвихревом (потенциальном) движении существенно упрощает отыскание и анализ решения. Таким образом находятся силы инерции, соответствующие каждому типу элементарного движения. Затем даются математические выражения для сил, приложенных к элементарной частице жидкости, т. е. для сил давления и трения (капиллярные

силы в этой книге не рассматриваются). Равенство между силами инерции и приложенными силами представляет собой уравнение движения, называемое в данном случае уравнением Навье — Стокса, хотя это же наименование употребляется и для более общего случая сжимаемой жидкости, когда имеются дополнительные члены. Далее показано, как в случае турбулентного потока уравнение Навье — Стокса преобразуется в уравнение для осредненного движения. Наконец, показано преобразование и упрощение уравнения Навье — Стокса для исследования потока сквозь пористую среду.

Таким образом, все основные уравнения, описывающие движение, теперь получены. Вторая часть данной книги посвящена в основном описанию некоторых важнейших математических операций с этими уравнениями и установлению наиболее фундаментальных соотношений в гидродинамике. Уравнение движения, проинтегрированное вдоль линии тока или рассматриваемое в случае безвихревого движения, строго приводит к хорошо известному уравнению Бернулли.

Показано, что случай стационарного двухмерного безвихревого движения особенно удобен для точного интегрирования, а также получены некоторые важнейшие типы картин потока с помощью только удовлетворения принципа неразрывности и допущения о безвихревом движении. После этого продемонстрировано, как простое применение уравнения Бернулли позволяет находить давление, если скорость частиц известна.

Показано также, при каких допущениях можно применять уравнение Бернулли к трубке тока, когда движение является вихревым и турбулентным, и каким образом интегрирование уравнений Навье — Стокса для конечной массы жидкости приводит к теореме импульсов. В случае стационарного потока теорема импульсов является буквально универсальным средством («ключом») в вопросах гидравлики, так как ее можно применять, не учитывая характеристики потока внутри рассматриваемой массы жидкости. Это благоприятное обстоятельство делает процесс интегрирования исключительно простым и эффективным.

Эта часть была бы неполной без анализа движения жидкости вблизи границы. В этой зоне силы трения играют важную роль, поток является вихревым, и тщательный анализ его картины требует интегрирования уравнения Навье — Стокса в области, где предыдущие соображения и упрощения неприменимы.

Пригодность ньютоновского или полностью детерминистического описания гидродинамических процессов является ограниченной. Гидродинамик может проверить достоверность теории лишь с помощью экспериментальных данных.

В третьей части основные теоремы и математические методы, которые были описаны во второй части, применяются к специальному и очень важному классу движений жидкости — стационарным и нестационарным потокам со свободной поверхностью. В третьей части мы имеем дело с гидродинамическими аспектами волн на воде и гидравлики открытых русел (каналов). Сначала дан обзор различных

типов^а волн и определения. Затем проводится анализ двух главных семейств волн на воде, а именно рассматривается теория волн малой амплитуды и теория длинных волн. Указываются пределы применимости каждой из этих теорий.

Так как рассмотрение современных методов исследования волн на воде было бы неполным без изложения хотя бы элементарных сведений о волновых спектрах, последний раздел книги посвящен этому вопросу.

Теперь, когда читатель кратко ознакомлен с содержанием книги, перейдем к изложению фундаментальных положений гидродинамики.

Том I

ОБЩИЕ ОСНОВЫ

Часть первая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГИДРАВЛИКИ

I-1. Основные положения теоретической гидравлики

I-1.1. Понятие об элементарной частице жидкости. Изучение теоретической механики жидкости основано на понятии об элементарной массе или частице жидкости. Такая частица в индивидуализированном состоянии в действительности не существует. Представление о ней в известном смысле является даже «чужеродным» для механики сплошной среды. Однако это понятие помогает гораздо конкретнее осознать физический смысл дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости.

Точно так же, как фундаментальные положения теоретической механики твердого тела основаны на механике так называемой «материальной точки», основы теоретической механики жидкости покоятся на механике элементарной массы жидкости. Такая элементарная масса жидкости, подобно материальной точке в кинематике твердого тела, предполагается либо бесконечно малой, либо настолько малой, что все части этого элемента можно считать обладающими одинаковой скоростью перемещения V и, в общем, одинаковой плотностью ρ .

Эта элементарная частица жидкости предполагается однородной, изотропной и непрерывной в макроскопическом смысле. Ни молекулярное строение, ни молекулярное и броуново движение внутри частицы, рассматриваемые в кинетической теории жидкости, здесь не учитываются.

I-1.2. Две части теоретической гидравлики. Законы механики твердых тел (например, вращающегося диска) получают, интегрируя по площади или по объему рассматриваемой системы выражения для законов механики «материальной точки».

Подобным же образом законы механики жидкости, используемые в инженерной практике, получают путем интегрирования — точного или приближенного — законов, описывающих поведение частицы жидкости, вдоль некоторой линии, либо по площади или по объему. Отсюда вытекает разделение гидродинамики на две части.

1-1.2.1. Первая часть заключается в установлении общих дифференциальных уравнений, описывающих движение элементарной частицы жидкости. Можно рассматривать либо идеальную (без учета сил трения), либо реальную жидкость. Поток может быть либо ламинарным, либо турбулентным. Эта часть включает также изучение и уяснение физического смысла отдельных членов, из которых состоят основные уравнения.

1-1.2.2. На втором этапе изучаются различные математические операции и интегрирование основных дифференциальных уравнений. Тем самым можно получить вывод ряда практически ценных общих соотношений, таких, как, например, хорошо известное уравнение Бернулли.

Можно также интегрировать дифференциальные уравнения для некоторых простых частных случаев, но тогда решения будут иметь силу только для этих случаев.

1-1.3. Связи между частицами жидкости. В твердом теле различные точки системы (например, диска) не изменяют своего относительного положения (если не считать упругих эффектов, которые подчиняются особому закону).

В то же время частицы жидкости могут деформироваться, и каждая частица может совершать свое движение, существенно отличное от движения других частиц. Связи между частицами жидкости осуществляются с помощью сил давления, сил трения и капиллярных сил (последние в этой книге не рассматриваются).

1-1.4. Основное допущение о силах трения. В теоретической гидродинамике сила трения на единицу площади, или касательное напряжение (сдвига) τ , считается либо равной нулю в случае «идеальной» жидкости, либо пропорциональной коэффициенту вязкости μ .

Касательное напряжение τ является скалярной величиной. Система касательных напряжений в точке образует тензор. Смысл этого утверждения разъяснен в главе V. Сейчас достаточно уяснить, что в случае одномерного потока касательное напряжение вдоль плоскости, параллельной направлению потока, равно

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}$$

где n — расстояние, измеренное по перпендикуляру (по нормали) к вектору скорости.

Таким образом, гидродинамика рассматривает в первую очередь «ньютоновскую» жидкость, которая характеризуется тем, что в ней тензор вязких напряжений линейно, изотропно и ковариантно зависит от «скорости деформации» или от производных от компонент скорости. Она не имеет дела с «пластичными» жидкостями, в которых коэффициент μ приходится заменять функцией, зависящей от интенсивности и продолжительности сдвига (градиента скорости).

1-2. Линия тока, траектория, жидка тока и трубка тока

1-2.1. Обозначения. Рассмотрим точку $A(x, y, z)$ в прямоугольной декартовой системе координат OX, OY, OZ (рис. 1-1). Выделим бесконечно малую элементарную жидкую частицу — параллелепипед A с ребрами dx, dy, dz . Объем частицы будет $dx dy dz$, а ее вес — $\bar{\rho} dx dy dz$ или $\rho g dx dy dz$. Величина $\bar{\rho}$ представляет собой удельный вес, а g — ускорение силы тяжести.

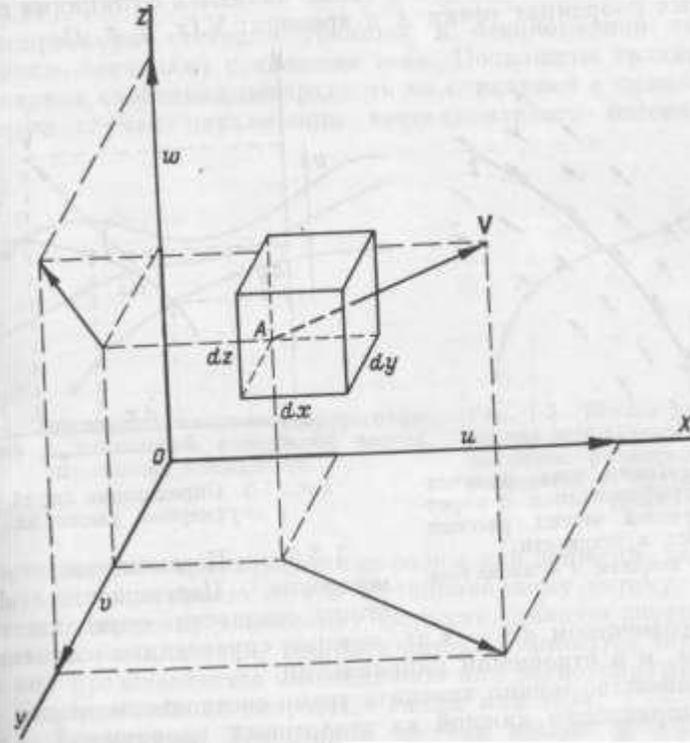


Рис. 1-1. Обозначения.

Давление в точке A обозначим через p . Давление p есть псевдоскаляр, полностью определяемый своей величиной и тем условием, что он всегда действует перпендикулярно к рассматриваемой поверхности (см. V-3.1). Величина p является функцией пространственных координат точки A и времени, т. е. $p = f(x, y, z, t)$. Соответствующая сила есть векторная величина, определяемая своей интенсивностью и направлением. Ее направление нормально к поверхности, на которую действует давление. Градиент давления $\text{grad } p$ (или пространственное изменение давления) также является векторной величиной. Компоненты величины $\text{grad } p$ вдоль трех координатных осей OX, OY, OZ представляют собой соответственно $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z$.

Скорость частицы жидкости в точке A есть V . Обозначим компоненты скорости V вдоль осей OX , OY , OZ соответственно через u , v и w , так что $V = u + v + w$. Поскольку мы пользуемся прямоугольной системой координат, величина скорости определяется соотношением $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Величина V есть скаляр, определяемый, как и давление p , только своей интенсивностью, в то время как V есть векторная величина, определяемая своим направлением и интенсивностью, т. е. V является тензором первого ранга. V и ее составляющие u , v и w также являются функциями пространственных координат точки A и времени: $V(x, y, z, t)$.



Рис. 1-2. Линии тока, полученные фотографированием с короткой выдержкой частиц, рассеянных в жидкости. 1 — вектор скорости; 2 — линия тока.

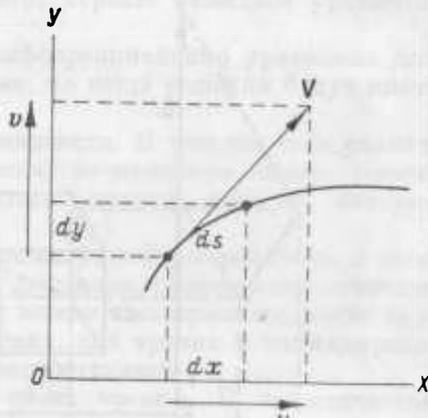


Рис. 1-3. Определение линий тока в двухмерном движении.

1-2.2. Перемещение частицы жидкости.

Перемещение dS частицы жидкости определяется векторным равенством $dS = V dt$, которое справедливо и в отношении величины, и в отношении направления.

Это равенство можно заменить тремя соотношениями для смещений в направлении каждой из декартовых координатных осей, а именно:

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

1-2.3. Линия тока. Линия тока определяется как линия, во всех точках касательная к вектору скорости в данный момент t_0 . Линии тока можно получить, фотографируя с малой выдержкой ряд светящихся частиц, случайным образом распределенных в жидкости во взвешенном состоянии (рис. 1-2). Каждая частица изобразится маленькой прямой черточкой, определяющей вектор скорости. Любая линия, касательная к этим малым отрезкам, будет являться линией тока.

Уравнения $dx = u dt$, $dy = v dt$, $dz = w dt$, записанные для момента t_0 , дают следующие соотношения:

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_0)},$$

которые служат математическим определением линии тока. Эти равенства выражают тот факт, что вектор скорости $V(u, v, w)$ касателен к смещению частицы жидкости $dS(dx, dy, dz)$ в момент t_0 , как показано для случая двухмерного движения на рис. 1-3, где $dx/u = dy/v$, или $v dx - u dy = 0$.

Линии тока нигде не пересекаются, за исключением точек с теоретически бесконечной скоростью (см. рис. XI-6 и XI-7), а также точек остановки и отрыва потока, где скорость равна нулю (см. главу XIV).

Фиксированные твердые границы и стационарная свободная поверхность совпадают с линиями тока. Подвижные границы и нестационарная свободная поверхность не совпадают с линиями тока. Некоторые случаи двухмерного нестационарного потока, такие,

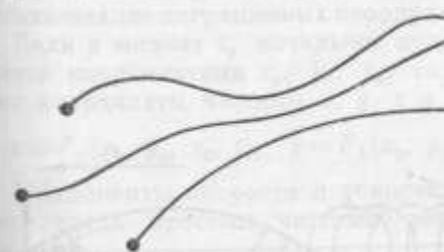


Рис. 1-4. Траектории, полученные фотографированием с длительной выдержкой частиц, рассеянных в жидкости.



Рис. 1-5. Жилка тока, полученная мгновенным фотографированием различных частиц, вышедших из одной и той же точки.

как периодические гравитационные волны или движение тела сквозь жидкость, иногда можно свести к стационарному потоку, накладывая на все движение компоненту скорости, равную скорости перемещения волны или тела. Картина потока становится тогда такой, какой она представляется наблюдателю или регистрирующему прибору, движущемуся со скоростью волны или тела.

1-2.4. Траектория. Траектория частицы жидкости определяется положением этой частицы как функцией от времени. Ее можно зафиксировать, фотографируя с большой выдержкой светящуюся частицу (рис. 1-4).

В данный момент t_0 линия траектории касательна к линии тока. Однако для определения траектории время следует включить в виде переменной величины. Отсюда линии траекторий математически выражаются в форме

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt.$$

1-2.5. «Жилка тока». «Жилка тока» — это линия, которая получится при мгновенном фотографировании последовательности взвешенных в жидкости ярких частиц, которые вводились в жидкость в одной и той же точке через равные промежутки времени (рис. 1-5).

1-2.6. **Трубка тока.** Элементарный поток, ограниченный с боков бесконечным числом линий тока, расположенных по замкнутой направляющей линии, называется трубкой тока (рис. 1-6).

1-2.7. **Стационарный и нестационарный поток.** Линии тока, траектории и «жилки тока» совпадают друг с другом в стационарном

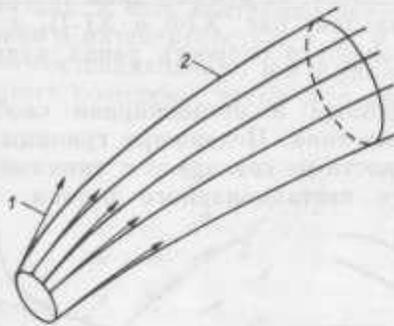


Рис. 1-6. Трубка тока.
1 — векторы скорости; 2 — линии тока.

Рис. 1-7. Периодические гравитационные волны на глубокой воде.

1 — траектории; 2 — линии тока; 3 — направление распространения волн.

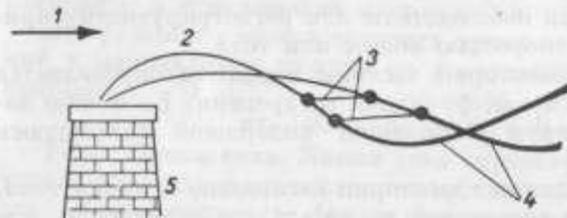
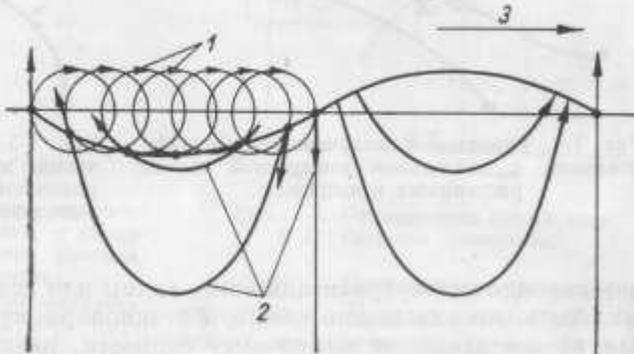


Рис. 1-8. Дым на ветру.
1 — направление ветра; 2 — дым; 3 — траектории; 4 — линии тока; 5 — труба.

потоке, который не зависит от времени. В нестационарном потоке, изменяющемся во времени, все эти линии отличаются друг от друга. Турбулентный поток всегда нестационарен; однако мы увидим далее, что осредненное во времени движение турбулентного потока часто можно рассматривать как стационарное. Тогда линии тока, траектории и «жилки тока» осредненного движения совпадают друг с другом (см. главу VII).

Рисунки 1-7 и 1-8 иллюстрируют указанные понятия на примере некоторых типов нестационарного движения.

1-3. Метод изучения

Изучение движения жидкости можно проводить двумя путями: с помощью метода Лагранжа и с помощью метода Эйлера.

1-3.1. **Метод Лагранжа.** С помощью метода Лагранжа мы можем ответить на вопрос: что происходит с данной частицей жидкости при ее движении вдоль своей траектории?

Сущность метода заключается в прослеживании «судьбы» частиц жидкости во времени и получении траектории, скоростей и давлений (а в случае сжимаемой жидкости также плотностей и температур), выраженных через начальное положение частиц и время, прошедшее с того момента, когда частицы занимали начальное положение.

На практике этот метод в гидродинамике применяется редко. Однако в некоторых теориях периодических гравитационных волн использование лагранжевых координат находит успешное применение.

Если в момент t_0 начальное положение данной частицы определяется координатами x_0, y_0, z_0 , то лагранжева система уравнений дает координаты частицы x, y, z в момент t в виде

$$x = F_1(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = F_2(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = F_3(x_0, y_0, z_0, t).$$

Компоненты скорости и ускорения в точке (x_0, y_0, z_0) получаются тогда простым частным дифференцированием по времени, так что

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

Подобным же образом компоненты ускорения будут

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

1-3.2. **Метод Эйлера.** Метод Эйлера может быть использован для получения ответа на вопрос: что происходит в данной точке пространства, занятой движущейся жидкостью? Рассматриваемые в гидродинамике задачи чаще всего ставятся именно в такой форме.

Этот метод дает для данной точки $P(x, y, z)$ скорость $V(u, v, w)$, касательную к линии тока, и давление p (а в случае сжимаемой жидкости еще плотность и температуру) в виде функций от времени t . Система уравнений в форме Эйлера имеет следующий вид:

$$\mathbf{V} = F(x, y, z, t)$$

или

$$u = f_1(x, y, z, t), \quad v = f_2(x, y, z, t), \quad w = f_3(x, y, z, t)$$

$$p = F_1(x, y, z, t).$$

Компоненты ускорения получаются теперь полным дифференцированием функций u, v и w по времени. Эту процедуру мы рассмотрим в разделе IV-1.3.

1-3.3. **Связь между уравнениями Лагранжа и уравнениями Эйлера.** Можно перейти от движения, определяемого системой уравнений

Лагранжа, к движению, определяемому системой уравнений Эйлера, и обратно с помощью соотношений:

переход к уравнениям Эйлера от уравнений Лагранжа:

$$\mathbf{V} = \frac{ds}{dt},$$

или

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

переход к уравнениям Лагранжа от уравнений Эйлера:

$$\mathbf{S} = \int_{t_0}^t \mathbf{V} dt,$$

или

$$x = \int u dt, \quad y = \int v dt, \quad z = \int w dt.$$

В дальнейшем используется система координат Эйлера.

1-3.4. Пример потока определенного типа. Рассмотрим систему координат Эйлера, где движение представлено компонентами скорости (см. 1-3.2):

$$u = f_1(x, z, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{H}{2} ke^{-mz} \cos(kt - mx),$$

$$w = f_3(x, z, t) = \frac{dz}{dt} = -\frac{H}{2} ke^{-mz} \sin(kt - mx).$$

Уравнения для линий тока получим из дифференциального уравнения (см. 1-2.3):

$$\frac{dx}{u(x, z, t_0)} = \frac{dz}{w(x, z, t_0)},$$

т. е.

$$\frac{dx}{k \frac{H}{2} e^{-mz} \cos(kt_0 - mx)} = \frac{dz}{-k \frac{H}{2} e^{-mz} \sin(kt_0 - mx)}$$

или

$$dz = -\operatorname{tg}(kt_0 - mx) dx.$$

Отсюда, интегрируя и полагая, например, $t_0 = 0$, находим, что

$$e^{mz} \cos mx = \text{const.}$$

Варьируя величину этой константы, можно показать, что линии тока образуют общую картину, аналогичную показанной на рис. 1-7.

Траектории (или орбиты частиц) определяются дифференциальным уравнением (см. 1-2.4)

$$\frac{dx}{u(x, z, t)} = \frac{dz}{w(x, z, t)} = dt,$$

где величина t является теперь переменной, т. е.

$$dx = k \frac{H}{2} e^{-mz} \cos(kt - mz) dt.$$

Аналогичное уравнение получается и для z . Тогда выражения для $x = F_1(x_0, z_0, t)$ и $z = F_3(x_0, z_0, t)$ могут быть найдены путем интегрирования. В этом частном случае (линейная теория) предполагается, что величины $x - x_0$ и $z - z_0$ остаются малыми, так что x_0 и z_0 могут рассматриваться как координаты частицы, когда жидкость находится в покое. Возводя в квадрат величины $(x - x_0)$ и $(z - z_0)$ и складывая их, чтобы исключить t , получаем окончательно

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = \left[\frac{H}{2} e^{-mz_0} \right]^2.$$

Таким образом, траектории частиц являются круговыми с радиусом $(H/2)e^{-mz_0}$ и их радиусы быстро уменьшаются с глубиной z_0 .

1-4. Основные уравнения

1-4.1. Неизвестные величины в задачах механики жидкости. В системе координат Эйлера движение является полностью известным в точке x, y, z , если мы можем выразить величины \mathbf{V} и p как функции пространства и времени. Поэтому для решения задач — гидродинамики необходимо иметь два уравнения, причем одно из них — в векторной форме. Если вектор \mathbf{V} выразить через компоненты, u, v, w , то необходимо иметь четыре скалярных или обычных уравнения.

В задачах, относящихся к потоку со свободной поверхностью, неизвестными являются также возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ относительно невозмущенного уровня или глубина $h(x, y, t)$. Однако в этом случае известно давление p , равное атмосферному давлению.

В газах приходится рассматривать еще две неизвестные величины, а именно плотность ρ и абсолютную температуру T . Таким образом, для решения задач в наиболее общих случаях механики жидкости необходимо иметь четыре уравнения, из которых одно — векторное, либо шесть обычных уравнений, если вектор \mathbf{V} выражен через u, v, w .

В гидравлике основные уравнения представляют собой выражение физических законов неразрывности и сохранения количества движения (импульса). В случае сжимаемой жидкости к ним необходимо добавить еще уравнение состояния и закон сохранения энергии.

Сведение проблемы к нахождению двух (или четырех) неизвестных переменных не вытекает из каких-либо общих и бесспорных положений, а является следствием некоторых важных предположений и допущений. Так, целый ряд феноменологических функций предполагается известными. Например, считается, что жидкость является вязкой в ньютоновском смысле, т. е. тензор напряжений симметричен. Жидкость подчиняется закону теплопроводности Фурье.

Кроме того, ряд коэффициентов, таких, как коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости, вязкости, предполагаются известными функциями от других неизвестных переменных, таких, как ρ и T .

I-4.2. Закон (принцип) неразрывности. Закон неразрывности выражает сохранение материи, т. е. тот факт, что жидкость в данном пространстве не может возникать или исчезать. В случае несжимаемой однородной жидкости этот закон выражает сохранение объема, за исключением специального случая кавитации, когда внутри жидкости образуются частичные пустоты.

Закон неразрывности устанавливает соотношение между скоростью V , плотностью ρ , пространственными координатами и временем. Если плотность постоянна (в случае несжимаемой жидкости), то этот закон дает соотношение между компонентами u, v, w вектора V и координатами x, y, z .

В дальнейшем мы увидим, что в некоторых случаях в потоке, находящемся под действием давления, скорость V можно найти независимо от абсолютной величины p , используя только закон неразрывности, но величина p всегда будет функцией от V , за исключением свободной поверхности.

I-4.3. Закон сохранения количества движения (импульса). Закон сохранения количества движения выражает соотношение между силами F , приложенными к единице объема вещества, имеющего плотность ρ , и силами инерции $\rho dV/dt$, действующими на эту единицу объема движущегося вещества. Силы инерции обусловлены естественным стремлением тел противодействовать любому изменению их движения. Согласно первому закону Ньютона, «каждое тело продолжает находиться в состоянии покоя или постоянного движения вдоль прямой линии до тех пор, пока какая-либо внешняя сила не понуждает его изменить это состояние». Хорошо известное соотношение Ньютона выводится из его второго закона: «Быстрота изменения количества движения пропорциональна приложенной силе и осуществляется в направлении действия силы». Это соотношение имеет вид $F = m dV/dt$.

В механике жидкости это уравнение имеет различные частные формы записи, при которых учитывается тот факт, что частица жидкости может деформироваться. Эти уравнения мы детально изучим в дальнейшем. Для несжимаемой жидкости интегрирование уравнения сохранения количества движения по расстоянию дает равенство работы и энергии, выражающее одну из форм закона сохранения энергии.

Если величина V выражена через u, v, w , то векторное соотношение, соответствующее второму закону Ньютона, может быть записано в виде трех уравнений для трех осей: $F_x = \rho du/dt$; $F_y = \rho dv/dt$, $F_z = \rho dw/dt$, где F_x, F_y, F_z — компоненты силы F вдоль соответствующих осей координат.

I-4.4. Уравнение состояния. При рассмотрении сжимаемой жидкости наряду с указанными выше законами приходится использовать еще два других уравнения. Это уравнение состояния и уравнение, выражающее сохранение энергии.

Уравнение состояния выражает соотношение, которое всегда существует между давлением p , плотностью ρ и абсолютной температурой T . Для идеального газа это уравнение имеет очень простую форму:

$$\frac{p}{\rho gRT} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega RT} = 1,$$

где R — универсальная газовая постоянная.

В более общем случае реального газа это уравнение можно записать в виде

$$\frac{p}{\rho gRT} = 1 + \alpha(T)\rho + \beta(T)\rho^2 + \dots,$$

где α и β — функции только абсолютной температуры. В случае несжимаемой жидкости уравнение состояния будет просто: $\rho = \text{const}$. Температуру тогда можно рассматривать как независимую переменную, влияющую заметным и известным (экспериментально установленным) образом только на коэффициент вязкости.

I-4.5. Закон сохранения энергии. Следующее уравнение выражает сохранение полной энергии (внутренней и механической). Это — первый закон термодинамики.

Из этого закона в частном случае адиабатического потока, т. е. когда не существует ни притока, ни оттока тепла от массы жидкости, вытекает уравнение $p/\rho^k = \text{const}$, где k — адиабатическая константа, равная отношению удельной теплоемкости при постоянном давлении C_p к удельной теплоемкости при постоянном объеме C_v .

В случае изотермического потока при постоянной температуре (для соблюдения этого условия может потребоваться приток тепла к массе жидкости или отток тепла от нее) мы будем иметь $p/\rho = \text{const}$.

Для задач гидродинамики, рассматриваемых на протяжении всей книги, нет необходимости более подробно останавливаться на уравнении состояния и уравнении, выражающем сохранение полной энергии. Плотность ρ будет считаться всюду известной и постоянной, а температура T — переменной, не влияющей на рассматриваемые явления. Правда, очевидно, что диссипация энергии силами вязкости может приводить к незначительному повышению температуры, что в свою очередь оказывает влияние на свойства жидкости. Однако в общем случае эти эффекты являются второстепенными в гидродинамике, и, в частности, коэффициент вязкости μ считается известным и постоянным.

I-5. Граничные условия

Очевидно, что общего решения описанной выше системы уравнений не существует; однако во многих частных случаях решения могут быть найдены, если заданы граничные условия. Существует три основных типа граничных условий:

1) условия на свободной поверхности, где давление известно и обычно равно атмосферному давлению. Особыми случаями являются процессы взаимодействия между ветром и морем при волновом

движении, импульсивные воздействия на свободную поверхность, волны плотности в стратифицированной жидкости и некоторые другие;

2) условия на твердой границе, основанные на том, что жидкость не может протекать сквозь границу или отступать от нее;

3) условия на бесконечности, где характеристики движения стремятся к известным значениям.

I-5.1. Свободная поверхность. На свободной поверхности давление известно, но положение самой свободной поверхности относительно горизонтального «нулевого» уровня, принимаемого за нуль отсчета, в общем случае неизвестно. Таким образом, требуется поставить два граничных условия: динамическое условие, определяющее величину давления, и кинематическое условие, состоящее в том, что частица, находящаяся на свободной поверхности, будет и в дальнейшем оставаться на свободной поверхности.

Поскольку величина p постоянна в любой момент, полное изменение $p(x, y, z, t)$ равно нулю, т. е.

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt = 0.$$

Поделив все это выражение на dt и производя замену $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$ (см. I-2.2), получаем граничное условие на свободной поверхности в наиболее общем случае в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Это условие, включающее в себя силу, надо ввести в уравнение, выражающее закон сохранения количества движения. Таким образом, в случае потока со свободной поверхностью величина V не может быть найдена независимо из уравнения сохранения количества движения.

Кинематическое условие будет выведено в разделе XVI-1.4. Сейчас достаточно указать, что, если выражение

$$z = \eta(x, y, t)$$

представляет собой уравнение свободной поверхности, то кинематическое условие будет

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

I-5.2. Твердые границы. I-5.2.1. На неподвижных твердых границах скорость обращается в нуль из-за трения: $V = 0$. Это условие необходимо ввести в уравнение неразрывности и, поскольку оно включает эффект силы трения, в уравнение сохранения количества движения. Если жидкость предполагается идеальной, то в нуль на границе обращается только перпендикулярная к ней компонента скорости, и скорость V является касательной к границе. Это условие прежде всего требуется ввести в уравнение неразрывности. Оно не включает эффекта какой-либо силы, а содержит только отвеча-

ющее условию неразрывности утверждение: жидкость не может протекать сквозь границу или отступать от границы (за исключением случая кавитации).

Например, граничные условия в случае, показанном на рис. I-9, будут: $u = 0$ для $x = 0$ и $x = x_1$; $w = 0$ для $z = 0$; $p = \text{const}$ для $z = z_1$.

В более общем случае, если уравнением границы является выражение $F(x, y, z) = \text{const}$, граничное условие выражает тот факт, что граница F и скорость V касательны друг к другу в любой точке, т. е.

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

I-5.2.2. На подвижных твердых границах (лопасть турбины, поршень волнопродуктора — см. рис. I-10 — и др.) граничное условие выражает тот факт, что жидкость следует за границей: перпендикулярная к границе компонента скорости жидкости равна соответствующей

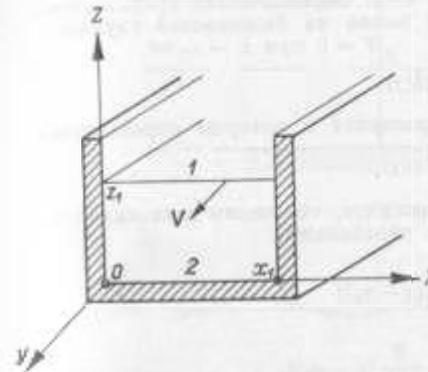


Рис. I-9. Однородный поток в прямоугольном канале.
1 — воздух; 2 — вода.

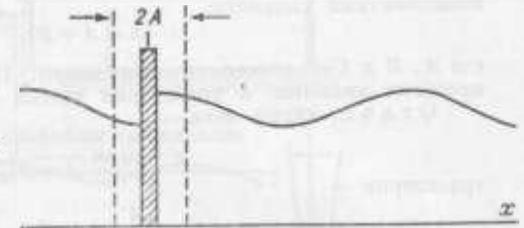


Рис. I-10. Подвижная пластина (поршень волнопродуктора), соответствующая условию на подвижной границе.

компоненте скорости самой границы (в случае реальной жидкости другая компонента при этом равна нулю).

Если $F(x, y, z, t)$ есть уравнение подвижной границы, то граничное условие выражает тот факт, что жидкость все время вплотную прилегает к границе, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

I-5.3. Граничное условие на бесконечности. Если вдали от исследуемого участка пространства характеристики движения жидкости стремятся к хорошо известным значениям, то в качестве граничного условия может служить условие на бесконечном удалении. Например, рассмотрим диафрагму, показанную на рис. I-11.

Движение на бесконечном удалении от диафрагмы хорошо известно и может быть описано (если пренебречь эффектом трения) выражением: $V = \text{const}$ при x , стремящемся к $\pm\infty$.

Хорошо известно, что движение зыби на глубокой воде охватывает лишь ограниченный слой вблизи свободной поверхности. Поэтому в теории периодических гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости используется граничное условие: $V \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ (рис. I-12).

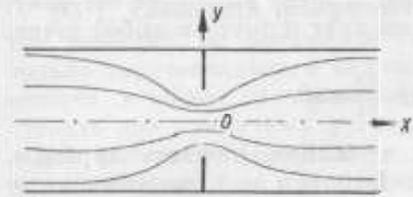


Рис. I-11. Поток в трубе с диафрагмой $V = V_0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

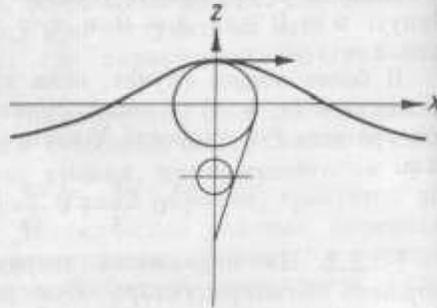


Рис. I-12. Периодическая гравитационная волна на бесконечной глубине. $V \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

УПРАЖНЕНИЯ

I-1. Рассмотрите двухмерный поток, движение в котором определяется компонентами скорости:

$$u = A + Bt, \quad v = C,$$

где A , B и C — постоянные параметры. Покажите, что линии тока являются прямыми линиями, а траектории частиц — параболами.

О т в е т: линии тока —

$$y - y_0 = \frac{C}{A + Bt_0} (x - x_0);$$

траектории —

$$z - z_0 = \frac{A}{C} (y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{B}{C^2} (y - y_0)^2.$$

I-2. Диск радиуса R катится по горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью k . Покажите, что «линии тока» являются окружностями, а траектории — трохоидами.

О т в е т: в точке (r, θ) внутри круга имеем

$$u = k [R + r \sin(kt + \theta)],$$

$$w = kr \cos(kt + \theta).$$

Линии тока представляют собой окружности радиуса R_s , где

$$R_s = [R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta]^{1/2},$$

с центрами в точке касания кругом плоскости (при $t_0 = 0$).

Траектории, если положить $\theta = 0$ и $k(t - t_0) = \Phi$, будут:

$$x - x_0 = R + r \sin \Phi, \quad z - z_0 = R + r \cos \Phi.$$

Эти выражения являются параметрическими уравнениями трохоиды.

I-3. Рассмотрите неподвижный цилиндр в однородном течении постоянной скорости. Предположим, что отрыва не происходит. Изобразите интуитивно линии тока, траектории и «жилки тока». Теперь возьмите цилиндр, движущийся с постоянной скоростью в неподвижной воде, и нарисуйте линии тока, траектории и «жилки тока» в этом случае. Объясните различие между двумя случаями, рассматривая их как примеры стационарного и нестационарного движения.

I-4. Движение потока в системе координат Эйлера определяется уравнениями $u = A$, $v = B$. Каково выражение того же самого движения в системе координат Лагранжа?

I-5. Движение двухмерного потока (линейные периодические гравитационные волны) в системе координат Лагранжа определяется уравнениями:

$$x = x_0 + \frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d + z_0)}{\text{sh } md} \sin(kt - mx_0),$$

$$z = z_0 + \frac{H}{2} \frac{\text{sh } m(d + z_0)}{\text{sh } md} \cos(kt - mx_0),$$

где H — высота волны; m , k и d — константы ($m = 2\pi/L$, L — длина волны, $k = 2\pi/T$, T — период волны и d — глубина). Найдите линии тока и траектории.

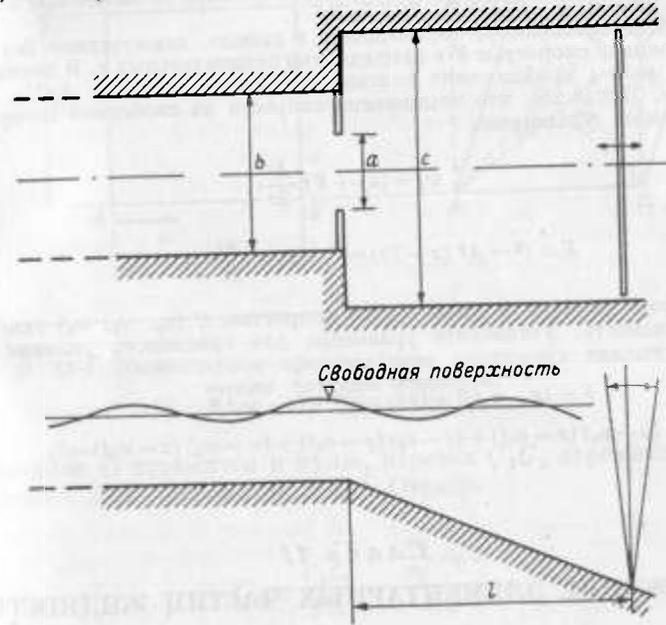


Рис. к упражнению I-6.

О т в е т: для нахождения траекторий надо вычислить $(x - x_0)^2$ и $(z - z_0)^2$ и сложить. Получим:

$$\left(\frac{x - x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{B}\right)^2 = 1 \text{ (эллипс),}$$

где

$$A = \frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d + z_0)}{\text{sh } md}, \quad B = \frac{H}{2} \frac{\text{sh } m(d + z_0)}{\text{sh } md}.$$

Линии тока будут

$$\frac{K}{\cos mz} = \text{sh } m(d + z).$$

I-6. Выразите математически граничные условия для любого типа движения в потоке, имеющем место между границами, показанными на рисунке. Предполагается, что шарнирная лопасть совершает малые синусоидальные движения с амплитудой e на свободной поверхности.

1-7. Рассмотрите двумерное тело, движущееся со скоростью U в направлении отрицательных x . Переднюю (лобовую) часть тела можно описать кривой $y = x^{1/3}$, а u и v — компоненты скорости вдоль тела. Установите соотношение между u , v , U и y .

Затем рассмотрите случай, когда тело неподвижно, а жидкость движется со скоростью U .

О т в е т: для тела, движущегося в неподвижной воде, имеем

$$F = y^3 - (x + Ut) = 0.$$

Граничное условие дает

$$U - u + 3vy^2 = 0.$$

Для неподвижного тела и жидкости, движущейся со скоростью U на бесконечности, имеем: $y - x^{1/3} = 0$, $u/v = 3x^{2/3}$.

1-8. Рассмотрите волну перемещения в канале, движущуюся без деформации с постоянной скоростью V в направлении отрицательных x . В данный момент t профиль волны приближенно описывается выражением $z = Ax^{1/2}$, где A — постоянная. Покажите, что компоненты скорости на свободной поверхности u_s и w_s связаны уравнением

$$w_s = (u_s - V) \frac{A^2}{2z}.$$

О т в е т:

$$F = z^2 - A^2(x - Vt) = 0, \quad w = \frac{A^2}{2z}(V - u).$$

1-9. Сфера радиуса R движется со скоростью U (u_s , v_s , w_s) сквозь покоящуюся жидкость. Установите уравнение для граничного условия.

О т в е т:

$$F = (x - u_s t)^2 + (y - v_s t)^2 + (z - w_s t)^2 - R^2 = 0, \\ (u - u_s)(x - u_s t) + (v - v_s)(y - v_s t) + (w - w_s)(z - w_s t) = 0.$$

Глава II

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ ЖИДКОСТИ

II-1. Различные типы движения

Движение элементов жидкости вдоль своих траекторий рассматривается с математической точки зрения как наложение друг на друга различных типов первичных движений. Физическую интерпретацию таких движений можно дать, рассматривая сначала простой случай двумерного элемента жидкости, в котором все скорости параллельны оси Ox (как в ламинарном потоке между двумя параллельными пластинами).

Рассмотрим квадратный элемент $ABCD$ в момент t и тот же элемент в момент $t + dt$, когда он изобразится фигурой $A_1B_1C_1D_1$ (рис. II-1).

Скорость точек A и D есть u , а скорость точек B и C есть $u + (\partial u / \partial y) dy$, поскольку $AB = dy$, а u в этом случае является функцией только от y .

Чтобы перейти от $ABCD$ к $A_1B_1C_1D_1$, можно последовательно рассмотреть:

- поступательное движение со скоростью u , которое дает переход от $ABCD$ к $A_1B_2C_2D_1$;
- вращательное движение, которое разворачивает диагонали A_1C_2 и D_1B_2 соответственно в положениях A_1C_3 и D_1B_3 ;
- деформацию, которая смещает C_3 в C_1 и B_3 в B_1 .

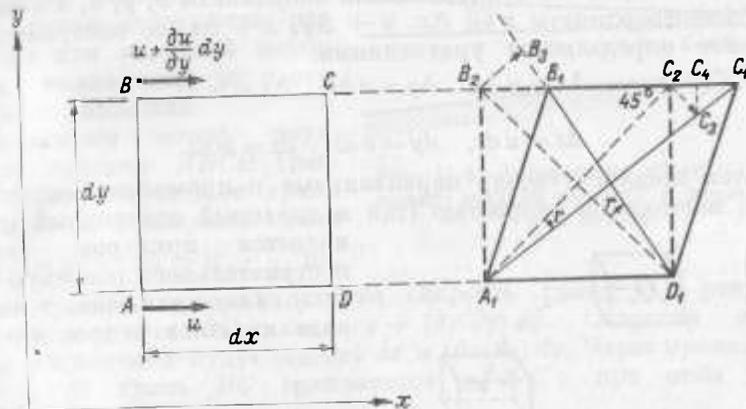


Рис. II-1. Элементарное представление различных типов движения частицы жидкости.

В пределе dt стремится к нулю, отрезок C_1C_2 стремится к нулю, тогда угол $C_2C_1C_3$ стремится к 45° . Отсюда

$$C_2C_3 = \frac{C_1C_2}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{\sqrt{2}}.$$

Скорость углового вращения равна

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\text{отрезок дуги}}{\text{радиус}} \right\} = \frac{d}{dt} \frac{C_2C_3}{A_1C_2} = \frac{d}{dt} \frac{C_2C_3}{\sqrt{2} dy}.$$

Подставляя сюда полученное значение C_2C_3 , находим, что угловая скорость вращения будет

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично можно найти, что скорость деформации равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_3C_1}{A_1C_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

II-2. Поступательное движение

Рассмотрим частицу A в точке $A(x, y, z)$ в момент t ; пусть грани частицы параллельны осям Ox, Oy, Oz (рис. II-2). Если частица перемещается таким образом, что ее грани остаются параллельными этим осям и при этом сохраняют свои размеры, то такое движение является только поступательным. Перенос может осуществляться как вдоль прямой, так и вдоль кривой линии.

Если в момент t частица A имела координаты x, y, z , а в момент $t + \Delta t$ — координаты $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, то поступательное движение определяется уравнениями:

$$\Delta x = u \Delta t, \quad \Delta y = v \Delta t, \quad \Delta z = w \Delta t,$$

или

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

Поток жидкости вдоль параллельных и прямолинейных линий тока с постоянной скоростью (так называемый однородный поток) является примером чистого поступательного движения (рис. II-3). Такое движение в чистом виде является скорее теорети-

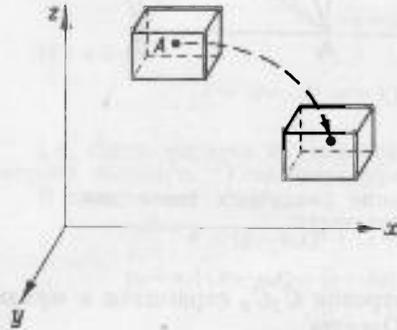


Рис. II-2. Поступательное движение.

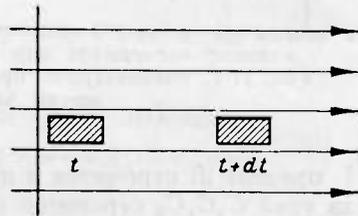


Рис. II-3. Пример поступательного движения. Однородный поток.

ческой идеализацией, чем действительно существующим типом движения. Более строго поступательное движение можно определить как движение центра частицы, а не движение ее крайнего уголка. Такое определение, однако, несколько усложняет вывод уравнений, давая в конечном счете тот же результат. Поэтому далее мы будем определять поступательное движение как движение угла частицы, имеющей форму параллелепипеда.

В дальнейшем мы будем рассматривать физический смысл различных явлений и соответствующие математические выражения в первую очередь на примере двухмерного движения, а уже затем будем обобщать их на случай трехмерного движения.

II-3. Деформации

Этот тип движения легче всего объяснить с помощью примера. Следует различать два типа деформации: деформацию сжатия (растяжения) и угловую деформацию.

II-3.1. Деформация сжатия (растяжения) или линейная деформация. В конвергирующем (сходящемся) потоке скорость имеет тенденцию к возрастанию в направлении траекторий частиц. Следовательно, скорости на гранях, перпендикулярных к вектору V или к линиям (тока), неодинаковы (рис. II-4). Частица становится длиннее и тоньше. Если считать, что углы между гранями не изменяются, то это будет случай деформации растяжения или линейной деформации, наложенной на поступательное движение.

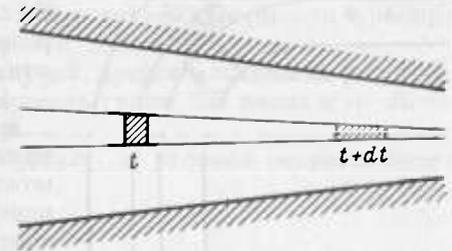


Рис. II-4. Деформация сжатия (растяжения) жидкой частицы в конвергентном потоке.

Рассмотрим теперь двухмерную частицу $ABCD$ (рис. II-5). Пусть скорость ее грани AB будет u , а скорость грани CD будет $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$,

поскольку $AD = dx$. Аналогично скорость грани AD равна v , а скорость грани BC равна $v + (\partial v / \partial y) dy$. Скорости деформации растяжения будут $(\partial u / \partial x) dx$ и $(\partial v / \partial y) dy$. Через промежуток времени dt грань BC превратится в $B'C'$; при этом длина

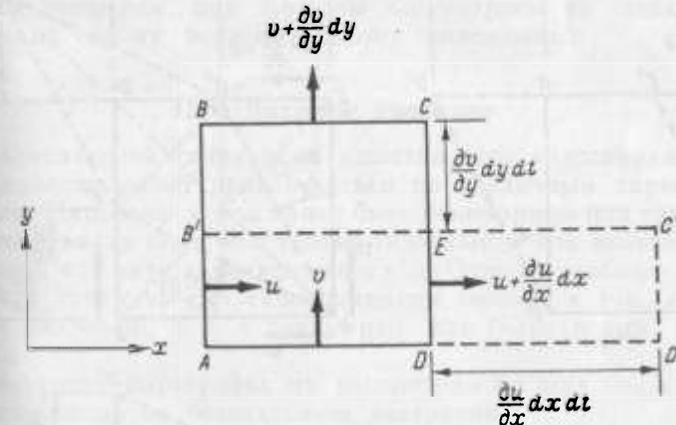


Рис. II-5. Компоненты деформации сжатия (растяжения).

отрезка BB' равна произведению изменения скорости на время, т. е. $BB' = (\partial v / \partial y) dy dt$ (приращение скорости $(\partial v / \partial y) dy$ в случае, показанном на рис. II-5, отрицательно). Грань CD превратится в $C'D'$ и аналогично $DD' = (\partial u / \partial x) dx dt$.

Величина скорости деформации растяжения на единицу длины составит:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сумма $(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$ представляет собой полную быстроту деформации растяжения, т. е. быстроту изменения объема на единицу объема. Площади $BCEB'$ и $D'C'ED$ в случае несжимаемой жидкости должны быть равны. В случае сжимаемой жидкости их разность дает скорость расширения.

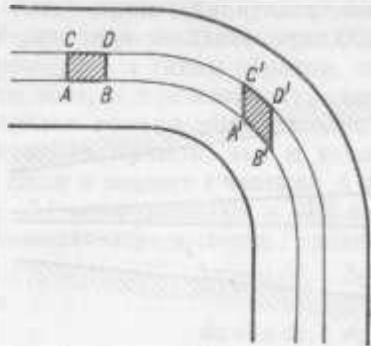


Рис. II-6. Деформация сдвига в изогнутой трубе.

руслу (при условии, что мы можем пренебречь эффектами трения), имеется тенденция превышения значения скорости частицы

II-3.2. Угловая деформация или напряжение сдвига (касательное напряжение). Угловую деформацию можно проиллюстрировать на примере частицы жидкости, текущей без трения по изогнутому руслу или трубе. Хорошо известно, что ветер ощущается на углу сильнее, чем посередине улицы. Точно так же в жидкости, текущей по изогнутому

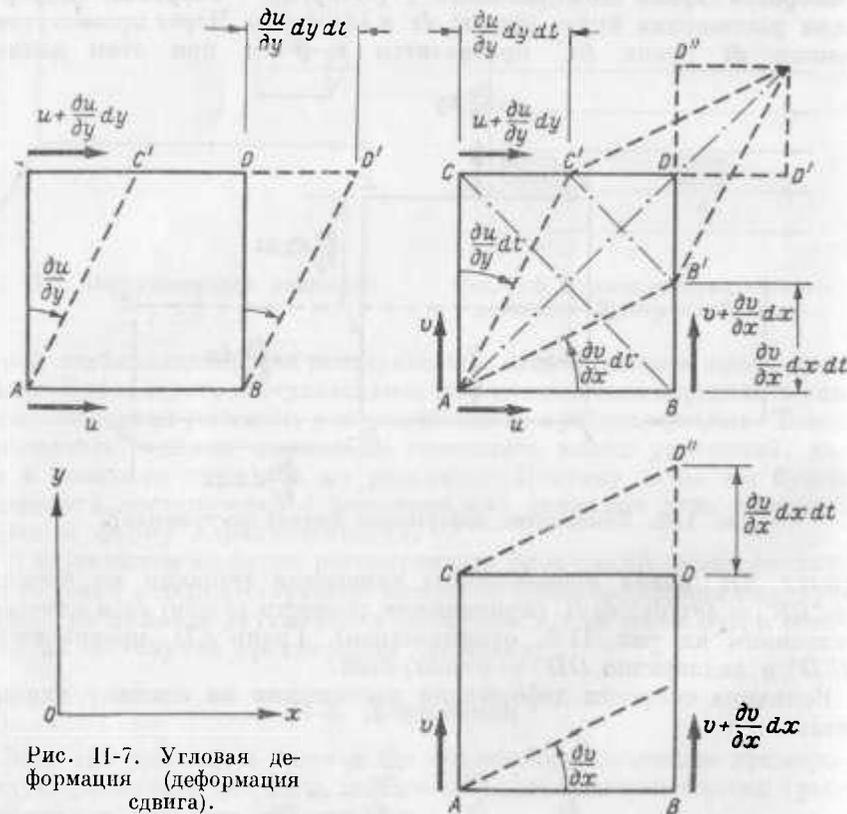


Рис. II-7. Угловая деформация (деформация сдвига).

жидкости, расположенной на внутренней стороне изгиба, по сравнению с ее значением для частицы на внешней стороне. Приближенно можно считать, что $V \times R = \text{const}$, где V — скорость, а R — радиус кривизны траектории. Отсюда грань AB частицы движется с большей скоростью, чем грань CD , и частица испытывает угловую деформацию (рис. II-6). Эта угловая деформация пропорциональна разности скоростей граней AB и CD .

Рассмотрим теперь, например, случай, представленный на рис. II-7, где скорость грани AB равна u , скорость грани CD равна $u + du = u + (\partial u/\partial y) dy$; тогда расстояние CC' (или DD') через промежуток времени dt будет равно $(\partial u/\partial y) dy dt$, а угловая скорость будет

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично отрезок BB' (или DD'') равен $(\partial v/\partial x) dx dt$. Если обе эти деформации происходят одновременно, сумма угловых скоростей $(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$ будет скоростью угловой деформации.

Следует отметить, что на рис. II-7 мы имеем $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$, и биссектрисы углов, образованных гранями частицы, остаются параллельными своему первоначальному положению в процессе угловой деформации. Перейдем теперь к очень важному понятию вихревого движения, при котором биссектрисы не остаются параллельными своему первоначальному положению.

II-4. Вихревое движение

Из элементарной гидравлики известно, что классификация потоков жидкости может производиться по различным характерным признакам. Например, поток может быть ламинарным или турбулентным, с учетом или без учета трения (идеальным или вязким), установившимся или неустановившимся и т. д. Одно из наиболее важных различий с точки зрения гидродинамики состоит в том, является ли поток вихревым, т. е. с вращением, или безвихревым, т. е. без вращения.

В следующих параграфах мы рассмотрим во всех подробностях абстрактное понятие безвихревого состояния.

II-4.1. Математические определения. Было показано, что угловые скорости деформации равны $\partial u/\partial y$ и $\partial v/\partial x$. Величина разворота частицы пропорциональна разности этих компонент. Действительно, если $(\partial u/\partial y) dt = (\partial v/\partial x) dt$, то мы имеем угловую деформацию без вращения: биссектрисы не поворачиваются. Но если $(\partial u/\partial y) dt \neq (\partial v/\partial x) dt$, то биссектрисы изменяют свое направление и мы имеем либо вращение с угловой деформацией, либо одно только вращение (рис. II-8).

Разность $(\partial u/\partial y - \partial v/\partial x)$ определяет скорость вращения. Двухмерное безвихревое движение математически определяется условием $\partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0$.

В гидродинамике можно рассматривать угловую деформацию без вращения, если $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, но $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$. Теоретически может существовать и вращение без деформации, если $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$, а $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$; правда, такой

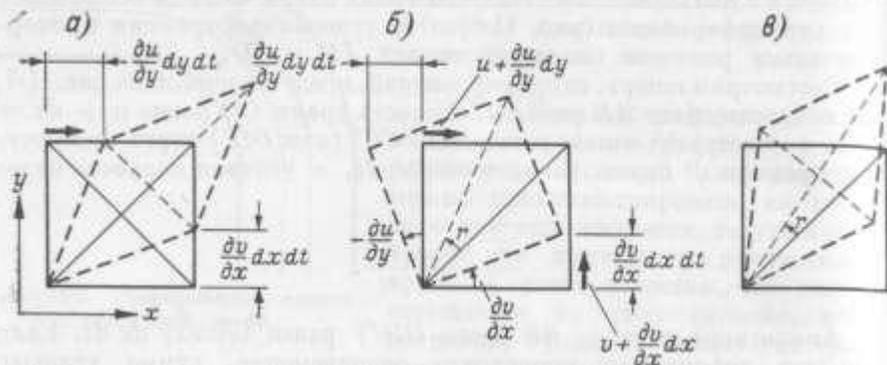


Рис. 11-8.

a — деформация сдвига без вращения ($\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$); *b* — вращение (вихревое движение) без деформации ($\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$); *c* — вращение (вихревое движение) и деформация ($\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$).

случай может встретиться очень редко, и физически вращение, как правило, связано с угловой деформацией. Примером движения, когда частицы вращаются без деформации, может служить вынужденный вихрь схематически показанный на рис. 11-9. Однако этот пример можно рассматривать скорее как специальный случай гидростатики, когда к силе тяжести добавлена центробежная сила, чем как реальный вихревой поток.

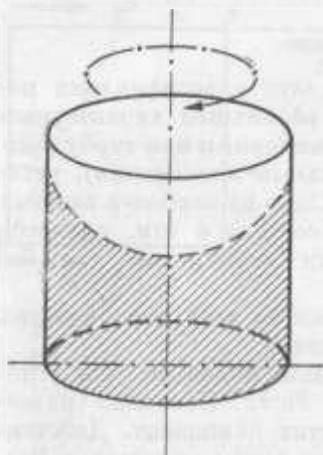


Рис. 11-9. Вынужденный вихрь.

отображение, вычисление потенциальной функции, аналоговые методы и т. д. С безвихревым движением связано одно математическое понятие, служащее эффективным средством исследования: это так называемый потенциал скорости ϕ , который для направлений X и Y может быть определен с помощью соотношений $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $v =$

$= \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Можно условиться определять эту функцию и с помощью соотношений $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ — это безразлично. Подставляя эти соотношения в приведенное выше условие безвихревого потока $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, получим $\frac{\partial^2 \phi}{(\partial y \partial x)} - \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x \partial y)} = 0$. Предполагается, что производные от ϕ непрерывны. Поскольку дифференцирование по двум переменным не зависит от порядка дифференцирования, то полученное уравнение является тождеством, что доказывает данное выше определение ϕ .

Величина скорости V выражается через потенциал скорости ϕ в виде $V = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}$, а в прямоугольных координатах имеем

$$V^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2.$$

11-4.3. Дополнительные теоретические замечания о безвихревом потоке. Полезно исследовать свойства безвихревого потока. Для этого проанализируем приведенный выше пример потока в изгибе без трения (или «свободного вращения»), определяемого законом $V \times R = K$ (рис. 11-10).

Рассмотрим элементарную частицу жидкости $ABCD$ между двумя траекториями, определяемыми своими радиусами кривизны R_1 и R_2 , так что $R_2 = R_1 + dR$, причем dR — бесконечно малая величина. Через промежуток времени dt фигура $ABCD$ превратится в фигуру $A'B'C'D'$, причем

$$AA' = CC' = V_1 dt = K \frac{dt}{R_1}, \quad BB' = DD' = V_2 dt = K \frac{dt}{R_2}.$$

Сторона AB при переходе к $A'B'$ повернется на бесконечно малый угол r , так что

$$-r \approx -\operatorname{tg} r \approx -\frac{BB'}{O'B} \approx -\frac{K dt}{R_2 O'B}.$$

Можно также записать

$$r \approx \operatorname{tg} r \approx \frac{AA'}{O'A} \approx \frac{K dt}{R_1 O'A}.$$

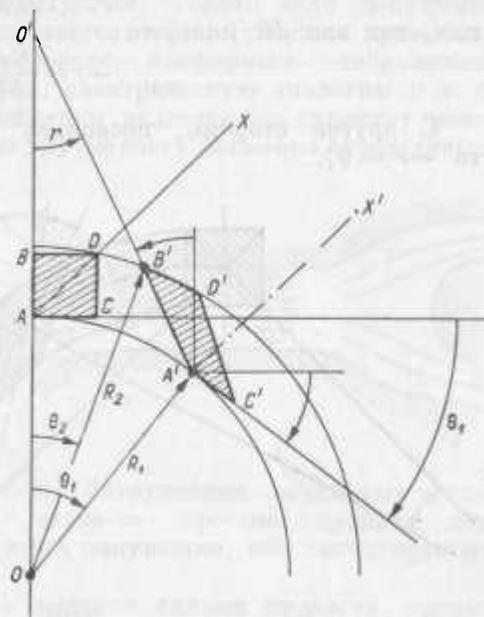


Рис. 11-10. В безвихревом потоке при бесконечно малом смещении биссектрисы частицы жидкости остаются параллельными сами себе.

Приравнивая эти последние выражения друг другу, получаем

$$\frac{O'B + dR}{O'B} = \frac{R_1 + dR}{R_1},$$

откуда $O'B = R_1$ и $O'A = R_2$. Подставляя эти значения в выражении для r , получаем

$$-r = \frac{K dt}{R_1 R_2},$$

или, так как dR мал, то

$$-r = \frac{K dt}{R_1^2}.$$

С другой стороны, поскольку угол $\theta_1 = AA'/R_1 = Kdt/R_1^2$, то $-r = \theta_1$.

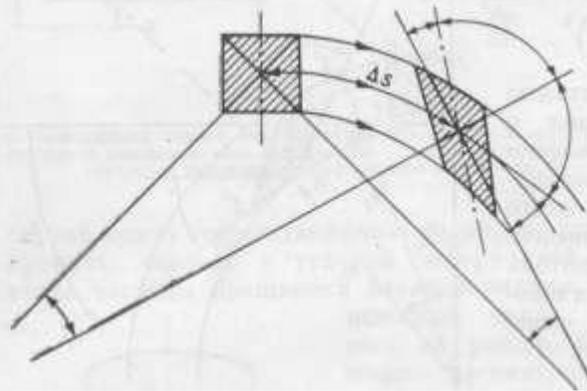


Рис. II-11. При конечном смещении в безвихревом потоке биссектрисы поворачиваются.

Сторона AC переходит в $A'C'$, поворачиваясь при этом на угол θ_1 . Поскольку обе стороны, AB и AC , поворачиваются на одинаковый угол θ_1 , но в противоположных направлениях, то биссектриса $A'X'$ остается параллельной биссектрисе AX . Ориентация этой линии остается неизменной, что является условием безвихревого движения.

Следует подчеркнуть, что приведенные рассуждения имеют силу только при рассмотрении бесконечно малого смещения. Если смещение конечно, они несправедливы, что показано на рис. II-11, на котором видно, что обе биссектрисы имеют тенденцию к повороту в одну и ту же сторону.

Как угол поворота биссектрис, так и угол, определяющий угловую деформацию, имеют конечные величины при конечном смещении частицы. Оба угла стремятся к бесконечно малой величине, когда смещение стремится к нулю. Однако в последнем случае угол поворота является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем угол деформации. Безвихревое состояние приходится рассматривать локально, а не на протяжении всей траектории:

$$\frac{\text{Угол между } AX \text{ и } A'X'}{r \text{ или } \theta} \rightarrow 0, \text{ если } dS \rightarrow 0.$$

Биссектрисы, однако, остаются параллельными в случае одно-одного потока и в случае линейной деформации, когда не происходит ни угловой деформации, ни вращения (см. рис. II-4).

II-4.4. Практические границы применимости поднятия безвихревого движения. II-4.4.1. Вихревое движение, вызванное силами трения; теорема Кельвина. II-4.4.1.1. На практике очень важно знать, когда именно движение жидкости можно считать безвихревым. Только если допущение о безвихревом движении оправдывается, можно успешно применять метод расчета потенциала скорости, конформное отображение, методы релаксации, метод сеток, электрическую аналогию и т. д.

Понятие о безвихревом движении является по существу математическим понятием и в случае двухмерного движения определяется

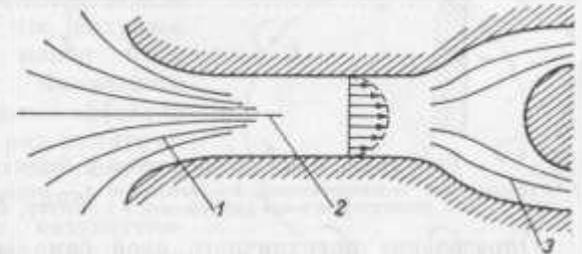


Рис. II-12. Примеры вихревого и безвихревого движений.
1 — безвихревое; 2 — вихревое; 3 — почти безвихревое.

соотношением $\partial u/\partial y - \partial v/\partial x = 0$. Затруднения возникают тогда, когда пытаются установить какие-то простые правила для оценки границ применимости этого допущения, ибо таких простых правил не существует.

Завихренность может быть вызвана силами вязкости, однако вихревое решение возможно и для идеальной жидкости, а безвихревой поток может существовать в вязкой жидкости.

Рассмотрим, например, обширный резервуар, в котором скорость потока практически равна нулю и к которому подсоединена труба. В резервуаре жидкость находится в безвихревом состоянии, но при входе в трубу под влиянием вязких напряжений поток становится вихревым: так силы трения вызывают завихренность. В случае, когда $\mu \neq 0$, при постоянной плотности жидкости и при постоянной силе тяжести применяют теорему Кельвина.

II-4.4.1.2. Строгое изложение теоремы Кельвина выходит за рамки этой книги, в то время как для дальнейшего достаточно физического подхода к рассмотрению вихревого движения. В ряде случаев нетрудно определить, будет ли движение физически вихревым или безвихревым, путем рассмотрения фрикционных эффектов.

На рис. II-12 и II-13 показаны некоторые случаи, когда без труда можно решить, допустимо ли считать движение безвихревым.

Движение можно считать безвихревым, если градиент скорости мал (периодические гравитационные волны), или если линии тока быстро конвергируют и распределение скорости зависит от очертаний границ, а не от их шероховатости. Движение является вихревым,

когда распределение скорости определяется наличием пограничного слоя или в случае дивергирующего потока.

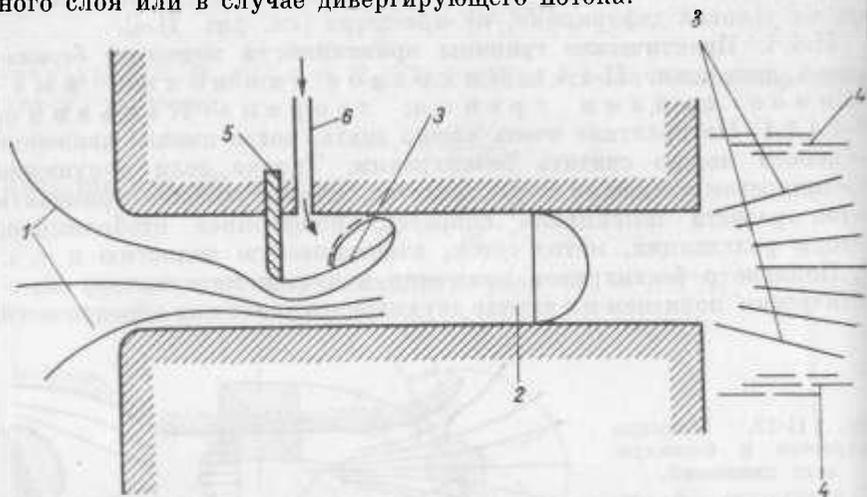


Рис. II-13. Примеры вихревого и безвихревого движений. 1 — безвихревое (конвергентное); 2 — вихревое; 3 — очень завихренное (линии отрыва); 4 — безвихревые зоны (застойные); 5 — затвор; 6 — воздушный канал.

Определение пограничного слоя само может основываться на понятии безвихревого движения. Пограничным слоем называется та область, где поток всегда является завихренным, в то время как за пределами пограничного слоя он часто является безвихревым. Движение может считаться безвихревым только, если пограничный слой играет

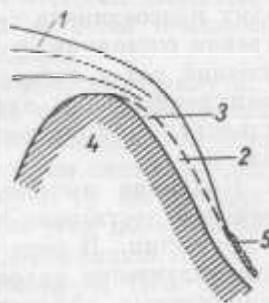


Рис. II-14. Влияние пограничного слоя.

1 — безвихревое движение; 2 — вихревое движение; 3 — пограничный слой; 4 — водослив; 5 — поступление воздуха.

незначительную роль, т. е. если он относительно тонок. На рис. II-14 показан случай водослива, когда толщина пограничного слоя

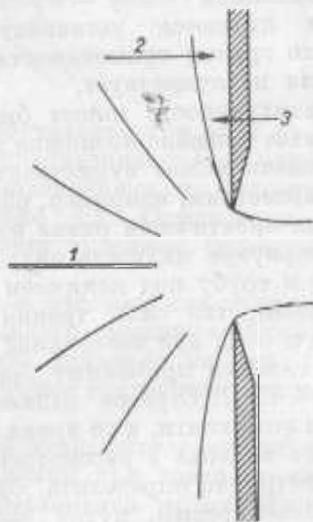


Рис. II-15. Коэффициент расхода зависит от толщины пограничного слоя.

1 — безвихревое движение; 2 — вихревое движение; 3 — пограничный слой.

увеличивается вниз по течению. Движение является безвихревым только вблизи вершины водослива. Одно и то же движение можно рассматривать как вихревое или безвихревое в зависимости от изучаемого явления. Например, поток, проходящий через отверстие, можно рассматривать как безвихревой, если задачей является изучение распределения давления у стенки (рис. II-15). Однако для исследования коэффициента расхода данного отверстия движение уже нельзя считать безвихревым, так как этот коэффициент является функцией толщины пограничного слоя вблизи отверстия. В элементарной гидравлике величина этого коэффициента дается как функция числа Рейнольдса, так как толщина пограничного слоя и число Рейнольдса связаны друг с другом.

II-4.4.2. Вихревые решения для идеальной жидкости. Мы видели, что вихревое движение физически может быть обусловлено трением. Физическое рассмотрение фрикционных эффектов позволило установить ряд практических правил, дающих хорошие результаты при использовании.

Однако существуют математические решения, дающие вихревое движение при пренебрежении силами трения. Когда движение является вихревым, а трение не учитывается, классическое уравнение Бернулли в элементарной гидравлике применимо только вдоль линии тока (см. главу X). Другим примером является теория периодических гравитационных волн Герстнера. Согласно этой теории, частицы жидкости описывают круговые орбиты, а сами при этом поворачиваются в противоположном направлении (рис. II-16); такое движение описывается точным математическим решением основных уравнений, в которых члены, выражающие действие трения, не учитываются, но вихревые инерционные члены учтены полностью.

С другой стороны, некоторые типы движения, где трение играет важную роль, исследуются как безвихревые. Например, силы трения играют первостепенную роль в таких явлениях, как гашение гравитационных волн с помощью фильтров или в потоке сквозь пористую среду (рис. II-17). Однако в этих случаях рассматривается только скорость, осредненная по пространству. Вместо действительной сложной системы вихревых движений сквозь пористую среду изучается среднее движение, являющееся безвихревым при малых числах Рейнольдса (см. главу IX). Аналогично, турбулентный поток является существенно вихревым, но осредненное по времени движение часто может рассматриваться как безвихревое (см. главу VII).

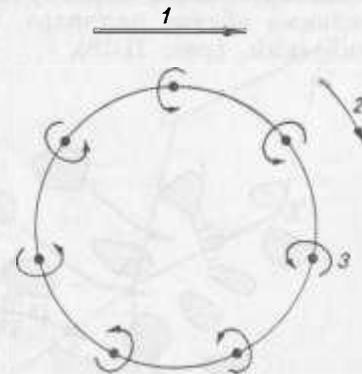


Рис. II-16. Траектория и вихревое движение частицы жидкости в волне Герстнера.

1 — направление движения волны; 2 — траектория; 3 — вихрь.

II-4.4.3. Вязкие безвихревые потоки. Может также случиться, что поток является безвихревым, в то время как коэффициент вязкости не равен нулю. Это происходит прежде всего в тех случаях, когда сумма всех вязких членов, присутствующих в уравнении движения, равна нулю, хотя каждый член в отдельности отличен от нуля. Движение такого типа является диссипативным и безвихревым.

Специальным примером такого случая является движение, порождаемое постоянным вращением кругового цилиндра вокруг своей оси в неограниченной вязкой несжимаемой жидкости. Нормальный к линиям тока градиент скорости может быть очень значительным вблизи цилиндра. Тем не менее движение является безвихревым (рис. II-18).

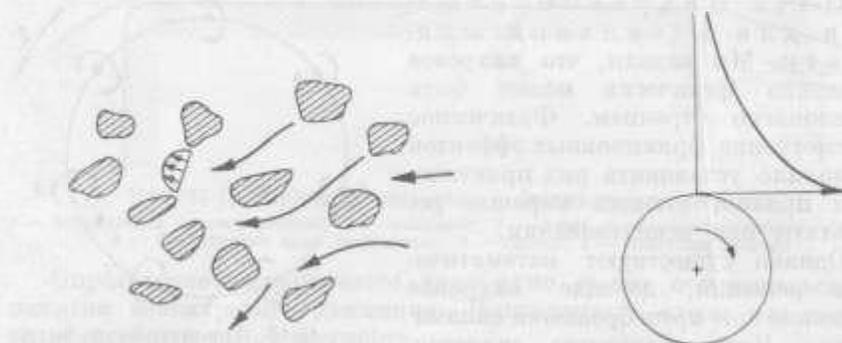


Рис. II-17. Поток через пористую среду является вихревым, но среднее движение может быть безвихревым.

Рис. II-18. Вязкий безвихревой поток, возбуждаемый в неограниченной жидкости вращающимся цилиндром.

Движение в «свободном вихре» также остается неизменным независимо от того, рассматриваем ли мы идеальную или вязкую жидкость. Решение уравнения движения для идеальной жидкости ($V \times R = \text{const}$) обращает в нуль сумму всех вязких членов.

II-4.4.4. Диссипация энергии, деформация сдвига и завихренность. Мы видели, что вихревое движение может вызываться силами вязкости. Однако сам факт наличия завихренности не обязательно означает, что движение сопровождается диссипацией. Движение диссипативно, если имеют место линейные или угловые деформации при не пренебрежимо малых коэффициентах вязкости. Так, безвихревой «свободный вихрь» может быть диссипативным, в то время как вихревой «вынужденный вихрь» не является диссипативным.

Действительно, мы увидим в разделе V-5.4.2, что напряжения σ и τ пропорциональны коэффициентам линейной и угловой деформации, приведенным в настоящей главе в разделе II-5.2. Таким образом, вязкие напряжения обязаны своей величиной и даже самим своим существованием не вихревому движению, а деформациям.

В заключение можно сказать, что в общем трение может вызывать вихревое движение, но наличие завихренности само по себе не подразумевает обязательного наличия трения, в то время как деформации при не пренебрежимо малой вязкости обязательно связаны с трением.

II-5. Математические выражения, определяющие движение частицы жидкости

II-5.1. Двухмерное движение. Рассмотрим частицу жидкости $ABCD$ в момент t (рис. II-19). Компоненты скорости u и v являются

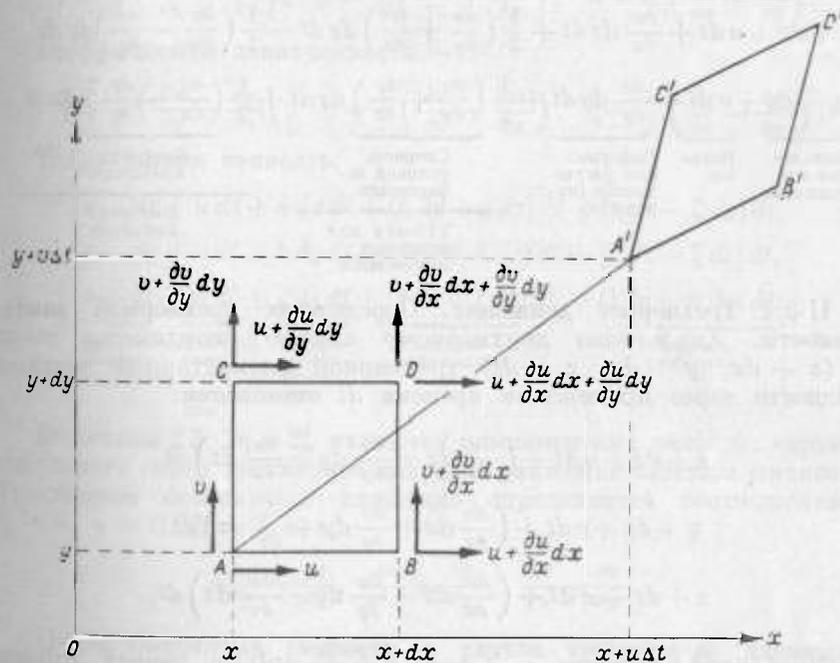


Рис. II-19. Компоненты скорости частицы жидкости.

функциями от x и y , так что $du = (\partial u/\partial x) dx + (\partial u/\partial y) dy$ и $dv = (\partial v/\partial x) dx + (\partial v/\partial y) dy$. В момент t координаты точки A будут x, y , а координаты точки D будут: $x + dx, y + dy$.

В момент $t + dt$ координаты точек A и D станут:

$$A' \begin{cases} x + u dt, \\ y + v dt; \end{cases}$$

$$D' \begin{cases} x + dx + (u + du) dt, \\ y + dy + (v + dv) dt, \end{cases}$$

$$D' \begin{cases} x + dx + u dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dt, \\ y + dy + v dt + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dt. \end{cases}$$

Прибавляя и вычитая $1/2 (\partial v / \partial x) dx dt$ в выражении для абсциссы и $1/2 (\partial u / \partial y) dy dt$ в выражении для ординаты, получаем следующую форму записи, в которой физический смысл отдельных членов становится ясным из предыдущих параграфов:

$$\begin{aligned} x + dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy dt - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dt, \\ y + dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Началь- ные ко- ординаты	Пере- нос	Деформа- ция растя- жения (ли- нейная)	Скорость угловой де- формации	Скорость вращения
			Угловая или сдвиговая деформация	Вихревое движение

II-5.2. Трехмерное движение. Определение трехмерной завихренности. Аналогично двумерному случаю координаты точки $D' (x + dx, y + dy, z + dz)$ трехмерной элементарной частицы жидкости через промежуток времени dt становятся:

$$\begin{aligned} x + dx + u dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) dt, \\ y + dy + v dt + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) dt, \\ z + dz + w dt + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dt. \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy dt$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz dt$ в первой строке, $\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} dz dt$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} dx dt$ во второй строке, $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} dx dt$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} dy dt$ в третьей строке, получаем

$$\begin{aligned} x + dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] dt, \\ y + dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + dz + w dt + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] dt. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения: коэффициенты линейной деформации —

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial z};$$

коэффициенты деформации сдвига —

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

коэффициенты завихренности —

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} x + dx + u dt + a dx dt + (h dy + g dz) dt + (\eta dz - \zeta dy) dt, \\ y + dy + v dt + b dy dt + (f dz + h dx) dt + (\zeta dx - \xi dz) dt, \\ z + dz + w dt + c dz dt + (g dx + f dy) dt + (\xi dy - \eta dx) dt. \end{aligned}$$

Началь- ные ко- ординаты	Посту- патель- ное движе- ние	Линей- ная де- форма- ция	Угловая деформация	Вихревое движение
--------------------------------	--	------------------------------------	-----------------------	----------------------

Величины 2ξ , 2η и 2ζ являются компонентами вектора, характеризующего собой трехмерное вихревое движение частицы жидкости. Трехмерное безвихревое движение определяется соотношениями $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

II-5.3. Потенциал скорости в случае трехмерного движения. Потенциал скорости, служащий для математического представления трехмерного безвихревого движения, определяется соотношениями:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

в векторной форме

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi, \quad \text{или} \quad \mathbf{V} = \nabla \Phi.$$

Подстановка этих величин в приведенное выше условие отсутствия вихревого течения дает:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z},$$

что подтверждает определение Φ . Другими словами, существование Φ указывает, что поток является безвихревым.

В дальнейшем мы исследуем потенциальную функцию более подробно (см. главу XI).

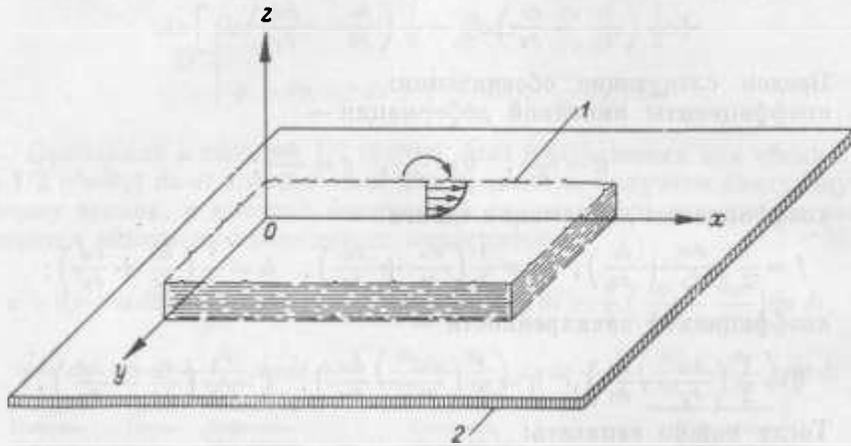


Рис. II-20. В воде, движущейся тонким слоем, вихревое движение имеет место только в вертикальной плоскости.

1 — тонкий слой воды; 2 — стеклянная пластина.

II-5.4. Аналогия Стокса — эксперимент Хиль — Шоу. Трехмерный вихревой поток можно рассматривать как двухмерный безвихревой,

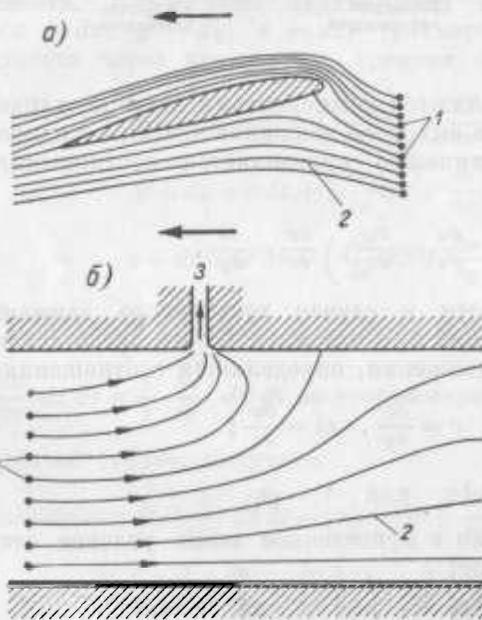


Рис. II-21. Определение линий тока с помощью краски. Опыты, основанные на аналогии Стокса для вязкого потока. а — «крыло», б — «река». 1 — впуск краски; 2 — линии тока; 3 — водозабор.

если вращение происходит всегда в одной и той же плоскости. Например, тонкий слой воды, толщина которого очень незначительна по сравнению с другими размерами, текущий по горизонтальной гладкой поверхности, является завихренным только в вертикальной плоскости (рис. II-20). Если рассматривать движение в плане, то оно будет представляться двухмерным и безвихревым (см. задачу VI-5).

В случае, показанном на рис. II-20, движение в вертикальной плоскости XOZ является вихревым, и $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$, в то время как движение в плоскостях XOY и YOZ является безвихревым, т. е.

$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Можно показать, что осредненная по вертикали скорость также удовлетворяет условию безвихревого движения.

Линии тока в плане легко обозначить с помощью введения красящего вещества. Такой же результат мы получим в случае потока, ограниченного двумя вертикальными параллельными плоскостями. Этот способ часто применяется для определения картины потока в случае двухмерного или почти двухмерного движения. Некоторые примеры таких движений — поток вокруг крыла, влияние забора воды из широкой и мелкой реки — показаны на рис. II-21.

УПРАЖНЕНИЯ

II-1. Рассмотрите двухмерный конвергирующий поток (см. рисунок). Определите коэффициент линейной деформации в точке $x = 0, y = 0$, где $V = u = 1$ фут/с.

О т в е т:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,1 \text{ с}^{-1}.$$

II-2. Укажите на следующем рисунке область, где поток можно рассматривать как безвихревой, и область, где поток является вихревым. Укажите причины, которыми вы руководствовались, делая выбор.

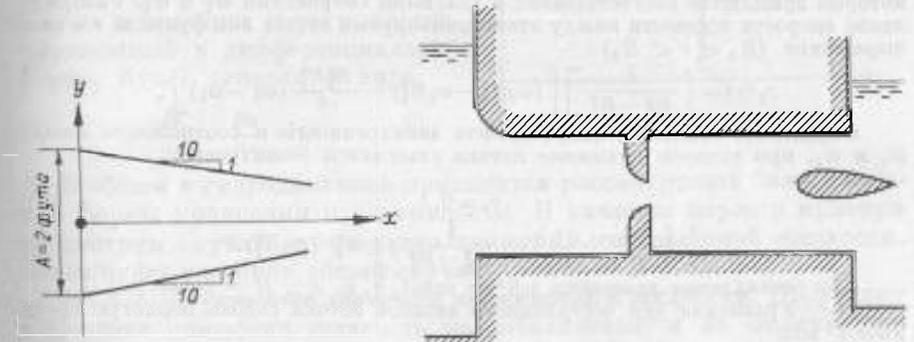


Рис. к упражнению II-1.

Рис. к упражнению II-2.

II-3. Определите коэффициенты деформации растяжения и сдвига и коэффициенты завихренности для потока между двумя параллельными плоскостями, расположенными друг от друга на расстоянии $d = 0,01$ фута. Одна из плоскостей неподвижна, а другая движется со скоростью $V = 0,1$ фут/с. Распределение скорости между плоскостями линейное.

О т в е т: $a = 0, h = -\xi = 5 \text{ с}^{-1}$, все другие коэффициенты равны нулю.

II-4. Распределение скорости ламинарного потока между двумя параллельными пластинами дается уравнением

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \alpha y^2 - \frac{2}{2\mu} \left[\alpha - \frac{2\mu V}{e^2} \right] y,$$

где μ — коэффициент вязкости; e — расстояние между пластинами; α — константа, равная потерям напора или уменьшению давления на единицу длины, т. е. $\alpha = dp/dx$; V — скорость одной из пластин; другая неподвижна.

Определите коэффициенты линейной и сдвиговой деформаций и завихренности как функции y . Рассмотрите два частных случая: 1) $a = 0$; $V \neq 0$ 2) $a \neq 0$; $V = 0$, и объясните их смысл.

О т в е т:

$$a = 0, \quad b = -\xi = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha y}{\mu} - \frac{e}{2\mu} \left(\alpha - \frac{2\mu V}{e^2} \right) \right].$$

Если $a = 0$, $V \neq 0$, то поток создается движением одной из пластин; если $a \neq 0$, $V = 0$, то поток обусловлен градиентом давления dp/dx .

II-5. Выразите компоненты скорости как функции φ в цилиндрических (r, θ, z) и сферических (r, Φ, θ) координатах.

О т в е т:

цилиндрические координаты —

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

сферические координаты —

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad v_\Phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi}.$$

II-6. Выведите условие безвихревого движения в полярной системе координат (r, θ) — радиальная скорость v_r , тангенциальная скорость v_θ .

О т в е т:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0.$$

II-7. Рассмотрите два коаксиальных цилиндра с радиусами R_1 и R_2 , которые вращаются соответственно с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Распределение скорости жидкости между этими цилиндрами дается как функция r в виде выражения $(R_1 < r < R_2)$

$$v_\theta(r) = \left[\frac{r}{R_2^2 - R_1^2} \right] \left[(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} (\omega_2 - \omega_1) \right].$$

Определите величину коэффициента завихренности и соотношение между ω_1 и ω_2 , при котором движение потока становится безвихревым.

О т в е т:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2).$$

При безвихревом движении $\omega R^2 = \text{const}$, т. е. $v \times R = \text{const}$.

II-8. Уравнения для осредненного вязкого потока сквозь пористую среду имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Ku, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = Kv.$$

Покажите, что такой поток является безвихревым.

Уравнения для осредненного полностью турбулизованным потоком по каменистому руслу имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Ku^2, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = Kv^2.$$

Покажите, что такой поток в общем случае является вихревым.

II-9. Покажите, что в данном месте двухмерного потока величина углового вращения независима от системы осей отсчета, т. е.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right),$$

где u' и v' — компоненты скорости вдоль осей x' и y' соответственно.

II-10. Покажите, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

ПРИНЦИП НЕРАЗРЫВНОСТИ

III-1. Элементарные соотношения

III-1.1. Неразрывность в трубе. Принцип неразрывности выражает сохранение массы в данном пространстве, занятом жидкостью.

В наиболее простой и хорошо известной форме условие неразрывности в элементарной механике жидкости сводится к положению, что при установившемся потоке в трубе расход жидкости постоянен. Этот факт выражается соотношением

$$\rho VA = \text{const},$$

где A — площадь поперечного сечения трубы, V — средняя скорость.

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) в однородной трубе ($A = \text{const}$) уравнение неразрывности приобретает совсем простой вид: $V = \text{const}$. Тогда, если ось трубы совместить с осью Ox , то $V = u$ и принцип неразрывности, выраженный в дифференциальной форме, будет записан в виде

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

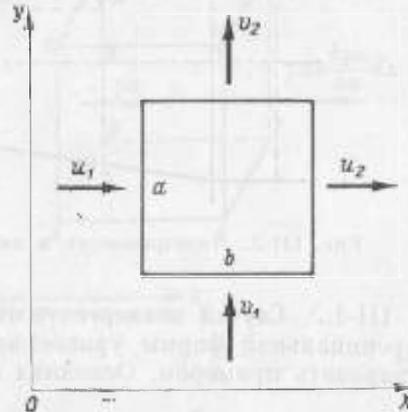


Рис. III-1. Обозначения.

В общем в гидродинамике приходится рассматривать более сложные формы уравнения неразрывности. В качестве первого примера рассмотрим случай двухмерного движения несжимаемой жидкости. Затем будет разобран общий случай.

III-1.2. Двухмерное движение несжимаемой жидкости. Поскольку в процессе движения жидкость не добавляется и не отнимается, ее общее количество остается постоянным. Этот факт в случае двухмерного движения несжимаемой жидкости может быть выражен следующим образом.

Выделим в двухмерном потоке жидкости прямоугольный участок (рис. III-1). Границы участка имеют длину a и b и фиксированы относительно осей координат.

Объем жидкости, входящей в пределы участка через левую границу за единицу времени, равен au_1 , а объем жидкости, уходящей за то же время через правую границу, равен au_2 . Разность этих количеств равна $a(u_2 - u_1) = a\Delta u$. Аналогично разность объемов жидкости, движущихся вдоль оси Oy , равна $b(v_2 - v_1) = b\Delta v$. Так как из-за неразрывности количество жидкости в пределах участка не может ни убывать, ни прибывать, сумма указанных двух разностей должна быть равна нулю:

$$a \Delta u + b \Delta v = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\Delta u}{b} + \frac{\Delta v}{a} = 0.$$

В пределе, когда a и b стремятся к нулю, мы получаем $du/dx + dv/dy = 0$. Эта дифференциальная форма допустима, поскольку мы считаем жидкость сплошной средой. Следует заметить, что du/dx и dv/dy представляют собой скорости линейной деформации частицы жидкости; отсюда в несжимаемой жидкости сумма линейных деформаций равна нулю, как уже было указано в II-3.1.

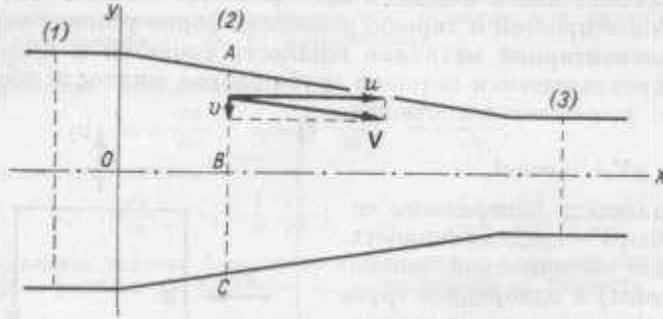


Рис. III-2. Неразрывность в конвергентном потоке; обозначения.

III-1.3. Случай конвергентного потока. Физический смысл дифференциальной формы уравнения неразрывности можно проиллюстрировать примером. Основная цель этого примера состоит в том,

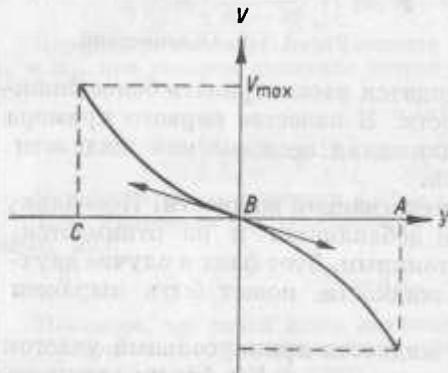


Рис. III-3. Изменение величины v на поперечном сечении конвергентного потока.

чтобы показать, как перейти от математического рассмотрения к физическому и наоборот. Рассмотрим двухмерный конвергентный поток идеальной жидкости, показанный на рис. III-2. На сечениях 1 и 3 $v = 0$, а u постоянно в направлении оси OX . Таким образом, здесь уравнение неразрывности будет просто $du/dx = 0$.

На сечении 2 $v \neq 0$; максимальных значений v достигает у границ, а вблизи оси OX она стремится к нулю в силу симметричности. Таким образом, изменение v вдоль оси OY не равно нулю, даже если сама величина v и равна нулю на оси потока. В противоположном случае мы имели бы $du/dx = 0$, т. е. скорость u была бы постоянной вдоль оси. С другой стороны, величина dv/dy всегда отрицательна, так как (рис. III-3) либо v , либо y всегда имеет отрицательный знак.

Отсюда следует, что, согласно уравнению неразрывности, величина du/dx будет всегда положительна, и u постепенно возрастает от сечения 1 к сечению 3, что очевидно.

III-2. Уравнение неразрывности в общем случае

III-2.1. Вывод уравнения неразрывности. Рассмотрим фиксированный объем жидкости в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz , параллельными осям OX , OY , OZ (рис. III-4). Соотношение, выражающее неразрывность, мы получим, рассматривая изменение массы жидкости в пределах объема $dx dy dz$ за время dt и приравнивая его разности притока в этот объем и оттока из него за тот же промежуток времени.

Масса жидкости в момент t равна $\rho dx dy dz$. Через промежуток времени dt за счет изменения плотности во времени масса жидкости в том же объеме станет равна

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz.$$

Отсюда изменение массы жидкости за время dt будет

$$\begin{aligned} & \rho dx dy dz - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) \times \\ & \times dx dy dz = \\ & = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \end{aligned} \quad (1)$$

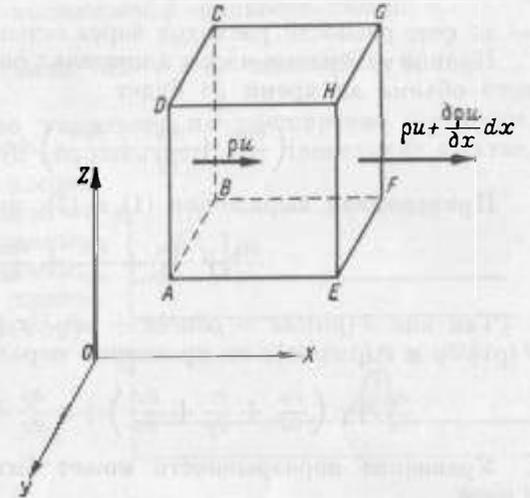


Рис. III-4. Принцип неразрывности; обозначения.

С другой стороны, если учесть изменение скорости и плотности в пространстве, то масса жидкости, вошедшая в объем через грань $ABCD$ за время dt , равна произведению величины ρu на площадь, перпендикулярную оси OX (площадь грани $ABCD$), и на время dt . Поскольку площадь $ABCD = dy dz$, эта входящая масса равна $\rho u dy dz dt$. Изменение u вдоль AB и AD , отнесенное к dz и dy , имеет бесконечно малый порядок величины, и им можно пренебречь.

Количество массы жидкости, вытекающей за тот же промежуток времени через сечение $EFGH$, равно

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt.$$

В общем случае мы считаем, что вдоль оси OX изменяются и плотность ρ , и скорость u . Таким образом, разность вытекающего и втекающего количеств жидкости будет

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt - \rho u dy dz dt = \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Таким же путем можно определить аналогичные разности для компонент движения, параллельных осям OY и OZ :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz dt$$

— за счет разности расходов через сечения $BFGC$ и $AEND$ ($dx dz$);

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz dt$$

— за счет разности расходов через сечения $AEFB$ и $DHGC$ ($dx dy$).

Полное изменение массы в пределах рассматриваемого элементарного объема за время dt будет

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt. \quad (2)$$

Приравнявая выражения (1) и (2), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0.$$

Так как $\partial(\rho u)/\partial x = \rho \partial u/\partial x + u \partial \rho/\partial x$ (и аналогично для членов $\partial(\rho v)/\partial y$ и $\partial(\rho w)/\partial z$), то уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности может быть записано более кратко в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{V} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \operatorname{grad} \rho = 0,$$

или, используя тензорные обозначения, в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

где индекс « i » означает повторение операции в направлении осей OX , OY , OZ .

III-2.2. Физический смысл и аппроксимация. Рассмотрим по порядку три группы членов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \text{ или } \rho \operatorname{div} \mathbf{V}, \text{ или } \rho \nabla \mathbf{V},$$

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}, \text{ или } \mathbf{V} \operatorname{grad} \rho, \text{ или } V \nabla \rho.$$

III-2.2.1. Первый член, $\partial \rho/\partial t$, представляет собой изменение плотности во времени в данной точке. Этот член равен нулю в случае:

- несжимаемой жидкости, когда $\rho = \text{const}$;
- стационарного движения сжимаемой жидкости.

Этот член рассматривают при исследовании звуковых волн, гидравлического удара, ударных волн и т. д.

III-2.2.2. Вторая группа членов пропорциональна изменению скорости в направлении движения в данный момент. В простом случае трехмерного движения несжимаемой жидкости имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \text{ или } \nabla \mathbf{V} = 0.$$

Если $\operatorname{div} \mathbf{V} > 0$, то это указывает на расширение жидкости, и наоборот, если $\operatorname{div} \mathbf{V} < 0$, это означает, что происходит сжатие.

III-2.2.3. Третья группа членов пропорциональна производной от плотности по пространственным координатам в данный момент. Эта производная обычно пренебрежимо мала по сравнению с другими производными.

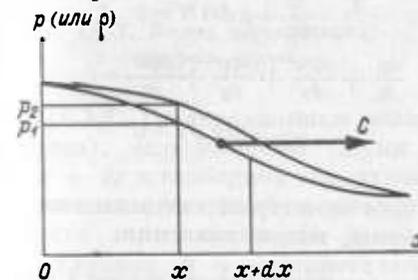


Рис. III-5. Волна давления.

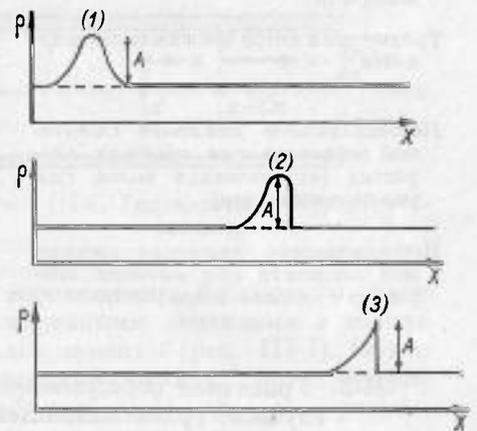


Рис. III-6. Формирование ударной волны.

Рассмотрим, например, одномерную синусоидальную акустическую волну (рис. III-5). Изменение плотности дается функцией от времени и расстояния в виде $\rho = A \sin(Ct + x)$. Производная от ρ по времени равна $\partial \rho/\partial t = AC \cos(Ct + x)$, а по расстоянию $\partial \rho/\partial x = A \cos(Ct + x)$. Отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{C} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Поскольку величина C обычно велика по сравнению со скоростью частицы u , то $u \partial \rho/\partial x$ обычно пренебрежимо мало по сравнению с $\partial \rho/\partial t$.

Из этого правила есть, однако, исключение, а именно, случай ударной волны, где пространственная производная от ρ теоретически

бесконечно велика на фронте волны (рис. III-6). Это явление происходит, когда имеет место значительное изменение давления, которое оказывает влияние на скорость распространения волны, которая в свою очередь становится больше, чем скорость звука. Ударная волна распространяется с более высокой скоростью, чем обычная волна давления (акустическая волна, гидравлический удар). Поэтому при изучении сверхзвукового потока или эффектов подводных взрывов изменение плотности по расстоянию учитывается в уравнении неразрывности.

III-2.2.4. Все сказанное может быть сведено в следующую таблицу:

Однородный поток несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Двухмерный поток несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Трехмерный поток несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

Нестационарное движение сжимаемой жидкости при обычных скоростях (акустическая волна, гидравлический удар)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

Нестационарное движение сжимаемой жидкости при высоких скоростях (ударная волна)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0$$

III-3. Уравнение неразрывности для некоторых специальных случаев; гравитационные волны, волны давления

В гидравлике уравнение неразрывности часто используется в других формах. Такие формы являются менее общими, но более удобными для интегрирования при изучении рассматриваемых явлений. Некоторые примеры различных применяемых форм записи уравнения неразрывности дает рассмотрение нестационарного потока, главным образом одномерного, и либо имеющего свободную поверхность (канал, река), либо движущегося под действием давления (труба, подземная галерея).

Исследование нестационарного потока со свободной поверхностью приводит к рассмотрению гравитационных волн¹, т. е. изменения уровня во времени и пространстве под действием силы тяжести. В качестве некоторых примеров можно назвать: волны паводка в реках, бор (волны перемещения) и сейши (колебательные волны). Нестационарный поток под давлением приводит к волнам давления:

¹ Стационарные волнообразные движения, такие как гидравлический прыжок или поток вокруг устоев моста (быков), также рассматриваются как гравитационные волны.

изменению давления во времени и пространстве под действием градиента давления. Двумя примерами такого движения являются гидравлический удар и акустические волны (не рассматриваемые в гидравлике). Для исследования таких гравитационных волн и волн давления используются специальные формы записи уравнения неразрывности, которые даны ниже. Они применимы, когда распределение скорости по поперечному сечению можно считать постоянным.

В обоих случаях уравнение неразрывности выводится из того исходного положения, что изменение объема воды за промежуток времени dt между двумя поперечными сечениями, разделенными бесконечно малым расстоянием dx , равно разности притока и оттока за тот же самый промежуток времени.

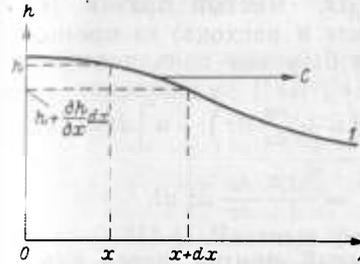


Рис. III-7. Волна перемещения.
1 — профиль волны.

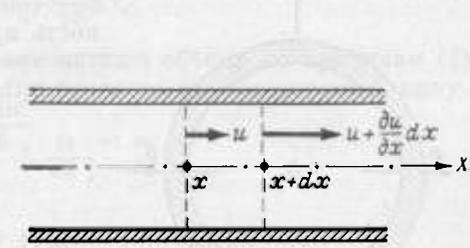


Рис. III-8. Гидравлический удар; обозначения.

III-3.1. Гравитационные волны перемещения. Рассмотрим объем («отсек»), определенный двумя поперечными сечениями в точках x и $x + dx$ и свободной поверхностью в момент t (рис. III-7). Объем жидкости, вытекающей в рассматриваемый «отсек» через сечение в точке x за время dt , равен qdt или $hudt$, где q — расход, h — глубина и u — горизонтальная компонента скорости.

Объем жидкости, вытекающей из «отсека» через сечение в точке $x + dx$, равен

$$\left(q + \frac{\partial q}{\partial x} dx \right) dt \quad \text{или} \quad \left(hu + \frac{dhu}{dx} dx \right) dt.$$

Отсюда изменение объема жидкости между указанными поперечными сечениями x и $x + dx$ будет равно разности притока и оттока, т. е.

$$- \frac{\partial q}{\partial x} dx dt \quad \text{или} \quad - \frac{dhu}{dx} dx dt. \quad (1)$$

С другой стороны, объем жидкости в момент t равен hdx , а в момент $t + dt$, поскольку уровень поверхности изменяется, он равен $[h + (\partial h / \partial t) dt] dx$. Отсюда изменение объема за время dt равно

$$\frac{\partial h}{\partial t} dt dx. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2) и деля все на $dx dt$, получаем $\partial h/\partial t + \partial q/\partial x = 0$, или $\partial h/\partial t + \partial(hu)/\partial x = 0$; а поскольку $\partial(hu)/\partial x = u(\partial h/\partial x) + h(\partial u/\partial x)$, то уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

III-3.2. Гидравлический удар. Уравнение неразрывности для неустановившегося потока в трубе также получается путем приравнивания разности притока и оттока в данный объем за время dt к изменению объема жидкости за тот же период времени.

Рассмотрим трубу, показанную на рис. III-8. На сечениях x и $x + dx$ скорости (предполагаемые постоянными в пределах каждого сечения) равны соответственно u и $u + (\partial u/\partial x) dx$. Чистый приток (разность прихода и расхода) за промежуток времени dt равен

$$\frac{\pi D^2}{4} \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] dt = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial u}{\partial x} dx dt.$$

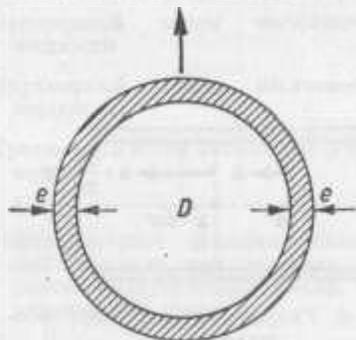


Рис. III-9. Гидравлический удар; обозначения.

Этот чистый приток равен сумме: 1) изменения объема при сжатии (или расширении) жидкости уже в пределах рассматриваемого цилиндрического «отсека» и 2) изменения объема, ограниченного стенкой трубы, в результате растяжения или сокращения самой стенки за счет изменения давления.

Увеличение давления за время dt равно $(\partial p/\partial t) dt$. Оно приводит к сжатию цилиндра жидкости на величину $(\partial p/\partial t) dt dx/K$, где K — объемный модуль упругости жидкости. Отсюда изменение объема по причине (1) равно

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{dx}{K}.$$

То же самое увеличение давления приводит к увеличению напряжения в стенке трубы, равному $(\partial p/\partial t) dt (D/eE)$, где e — толщина стенки трубы (рис. III-9). Под действием этого дополнительного напряжения стенка трубы растягивается в соответствии с законом Гука на величину

$$\frac{\pi(D+dD)}{\pi D} = \frac{N}{E},$$

где N — увеличение напряжения, а E — модуль упругости стенки. Таким образом,

$$\frac{dD}{D} = \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{D}{2eE}.$$

Увеличение объема по причине (2) равно

$$\left[\frac{\pi(D+dD)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} \right] dx = \left(\frac{\pi D dD}{2} \right) dx.$$

Учитывая предыдущее соотношение и пренебрегая членами второго порядка малости, находим, что

$$\frac{\pi D dD dx}{2} = \frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{eE} dx.$$

Увеличение объема по причине (2), таким образом, равно

$$\frac{\partial p}{\partial t} dt \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{eE} dx.$$

Приравнивая чистый приток изменению объема по причинам (1) и (2), сокращая на $[(\pi D^2)/4] dx dt$ и проделав преобразования, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} \right]^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

III-4. Частные формы уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости

III-4.1. Безвихревой поток. Если плотность ρ постоянна, то уравнение неразрывности, как мы видели, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

В случае безвихревого движения потенциал скорости φ был определен соотношениями:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

что может быть также записано в форме $\nabla^2 \varphi = 0$. Это — хорошо известное уравнение Лапласа, подробно исследованное в математической физике.

III-4.2. Лагранжева система координат. В главе I указывалось, что изучение проблем гидравлики можно вести либо в координатах Эйлера, либо в координатах Лагранжа (см. I-3.1). Поскольку последняя система координат употребляется редко, мы приведем здесь выражение для уравнения неразрывности в этой координатной

системе без каких-либо дополнительных замечаний — просто для того, чтобы читатель мог опознать его, встретив в литературе:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1.$$

Здесь x_0, y_0 и z_0 — координаты рассматриваемой частицы в момент t_0 , а x, y, z — ее координаты в момент t .

УПРАЖНЕНИЯ

III-1. Покажите, что уравнение неразрывности для трубки тока можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial s} = 0,$$

где A — поперечное сечение трубки, а ds — элемент линии тока.

III-2. Рассмотрите два типа двухмерного движения, определяемого компонентами скорости $u = A, v = 0$ в первом случае и $u = Ax + B, v = 0$ во втором, где A и B отличны от нуля.

Рассчитайте дивергенцию и определите, в каком случае жидкость является сжимаемой.

Ответ: в первом случае — $\text{div } \mathbf{V} = 0$, во втором — $\text{div } \mathbf{V} = A$.

III-3. Выведите уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Используйте выражение для полярного элемента объема $r dr d\theta dz$.

Ответ.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial p v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial p v_z}{\partial z} = 0.$$

III-4. Выразите уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в цилиндрической системе координат (r, θ, z) .

Ответ.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

III-5. Выведите уравнение неразрывности для стратифицированной жидкости, в которой плотность изменяется по вертикали по закону $\rho = k/z$ (предполагается, что $\partial \rho / \partial t = 0$).

III-6. Докажите, что движение, определяемое потенциалом скоростей

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{ch } md} \cos(kt - mx),$$

во-первых, является безвихревым, во-вторых, удовлетворяет уравнению неразрывности и, в-третьих, является таким, что $\partial \varphi / \partial z = 0$ при $z = -d$.

III-7. Выведите уравнение неразрывности и уравнение для $\nabla^2 \Phi$ для случая несжимаемой жидкости в сферических полярных координатах (r, Φ, θ) , рассматривая малый объем, ограниченный поверхностью $\theta, \theta + d\theta, \Phi, \Phi + d\Phi, r, r + dr$.

Ответ.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\Phi}{\partial \Phi} = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Phi^2} = 0.$$

Глава IV СИЛЫ ИНЕРЦИИ

IV-1. Масса, инерция, ускорение

IV-1.1. Уравнение Ньютона. Чтобы вызвать движение массы M или, в более общем смысле, чтобы изменить состояние существующего движения, необходимо приложить к этой массе силу F , которая создаст ускорение $\frac{dV}{dt}$ такое, что будет удовлетворяться соотношение $F = M dV/dt$. Это — векторное соотношение, т. е. оно справедливо и в отношении величины, и в отношении направления. Произведение $M dV/dt$ представляет собой силу инерции, которая характеризует природную тенденцию материи противодействовать любому изменению своего состояния движения.

В механике жидкости рассматривается масса M , являющаяся массой единицы объема

$$M = \rho' \cdot (\text{единица объема}) = \rho,$$

где ρ — плотность. Отсюда уравнение движения имеет форму $F = \rho dV/dt$. Его три компонента вдоль трех координатных осей OX, OY и OZ будут соответственно $\rho du/dt, \rho dv/dt$ и $\rho dw/dt$.

IV-1.2. Соотношения между элементарными движениями частицы жидкости и инерционными членами. Каждому типу движения частицы жидкости, рассмотренному в главе II, соответствует сила инерции, и соотношение между типом описанного движения и соответствующей силой инерции является очень простым.

Как показано в главе II, элементарные компоненты изменения положения частицы жидкости в случае двухмерного движения будут определяться следующим образом:

для поступательного движения — u, v ;

для деформации сжатия — $(\partial u / \partial x) dx, (\partial v / \partial y) dy$;

для деформации сдвига — $(1/2) (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) dy, (1/2) (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) dx$;

для вращения (вихря скорости) — $(1/2) (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) dy, (1/2) (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) dx$.

Чтобы получить величину силы инерции, достаточно взять одну из приведенных выше величин, приходящуюся на единицу времени, чтобы получить соответствующее ускорение, и умножить ее на плотность ρ . Например, делая подстановку $udt = dx$, получаем, что инерция за счет компоненты скорости линейной деформации будет $(\partial u / \partial x) udt$, а на единицу времени она равна $u \partial u / \partial x$. Следовательно, соответствующий член равен $\rho u \partial u / \partial x$. Повторяя эту операцию для всех членов скорости, данных выше, непосредственно получаем инерционные члены, обусловленные всеми типами элементарных движений.

IV-1.3. Два основных типа сил инерции. Силы инерции можно разделить на два главных типа, соответствующих двум типам ускорения или двум типам элементарного движения:

локальному ускорению, соответствующему изменению скорости поступательного движения во времени, и конвективному ускорению, соответствующему изменению скорости деформации и вращения в пространстве.

Прежде всего мы рассмотрим физический смысл этих ускорений и соответствующие силы инерции, а уже затем покажем их математическое выражение.

В главе V речь пойдет о приложенных силах F , которые надо приравнять к этим силам инерции, чтобы получить уравнение движения.

IV-2. Локальное ускорение

Локальное ускорение характеризует нестационарное движение, т. е. движение, в котором скорость в данной точке изменяется во времени.

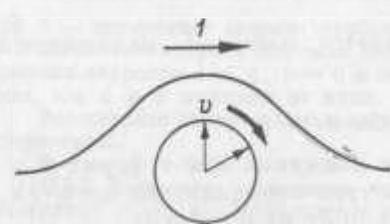


Рис. IV-1. Периодическая гравитационная волна на глубокой воде. Изменение скорости выражается в изменении только ее направления.

1 — направление распространения волны.

Локальное ускорение является следствием изменения поступательного движения частицы жидкости, происходящего в результате действия внешних сил F .

IV-2.1. Примеры потока с локальной инерцией. Локальное ускорение имеет место в следующих случаях.

IV-2.1.1) когда скорость, сохраняя направление вдоль прямой линии, изменяет свою величину. Если скорость возрастает в данной точке, что приводит к положительному локальному ускорению, инерция массы жидкости стремится ослабить движение.

Наоборот, если скорость падает, что соответствует отрицательному локальному ускорению, масса движущейся жидкости стремится за счет своей инерции сохранять движение вперед.

Такая ситуация имеет место при однородном потоке в трубах или туннелях, где жидкость останавливается или начинает двигаться, или находится в равновесии в результате движений затвора. Примером некоторых гидравлических инженерных приложений, где требуется учитывать локальную инерцию такого рода, являются задачи, связанные с уравнительными бассейнами, гидравлическим ударом и перекрытием плузов;

IV-2.1.2) когда скорость сохраняет свою величину, но меняет направление. В этом случае сила инерции обусловлена центростремительным ускорением.

Например, в периодической гравитационной волне на бесконечно глубокой воде величина скорости в данной точке постоянна, а ее направление непрерывно изменяется во всех точках (рис. IV-1);

IV-2.1.3) когда скорость в данной точке изменяется как по величине, так и по направлению. Примерами такого движения являются: турбулентный поток (этот важный случай подробно рассмотрен в главах VII и VIII);

перемежающиеся вихри; смещения, вызванные движущимся судном; бор и приливы в эстуариях; периодические гравитационные волны на мелкой воде.

IV-2.2. Математическое выражение для локальной инерции. Математическое выражение сил инерции, вызванных локальным ускорением, дается в виде изменения скорости поступательного движения только во времени. Если предположить, что в пространстве скорость неизменна, то сила инерции равна $\rho dV/dt = \rho \partial V/\partial t$, а ее компоненты вдоль осей OX , OY и OZ будут $\rho \partial u/\partial t$, $\rho \partial v/\partial t$, $\rho \partial w/\partial t$.

IV-3. Конвективное ускорение

Конвективное ускорение характеризует любой нестационарный поток, когда скорость в данный момент изменяется в пространстве. Его иногда называют ускорением поля. Конвективное ускорение возникает при любой линейной или угловой деформации, или при изменении вращения частицы жидкости, происходящих в результате действия внешних сил F .

IV-3.1. Примеры. В сужающейся трубе, как мы видели, скорость частицы жидкости стремится к возрастанию по мере конвергенции линий тока, т. е. растет в направлении движения (в пространстве). Это — положительное конвективное ускорение. Жидкость стремится затормозить это ускорение своей конвективной инерцией. В расширяющемся трубопроводе скорость падает, и жидкость стремится сохранить скорость за счет инерции. Приложенные силы вызывают отрицательное конвективное ускорение.

Расширение или сжатие сжимаемой жидкости представляет собой сумму линейных деформаций и также приводит к возникновению соответствующих сил инерции.

Во всех перечисленных примерах компоненты скорости сохраняют свое направление и изменяются только по величине.

IV-3.1.2. Математическое выражение. Мы видели, что компоненты скорости линейной деформации имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ \frac{\partial v}{\partial y} dy, \\ \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{двухмерное} \\ \text{движение} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ \frac{\partial v}{\partial y} dy, \\ \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{трехмерное} \\ \text{движение} \end{array}$$

Отсюда соответствующие ускорения будут: $(\partial u/\partial x) (dx/dt)$, $(\partial v/\partial y) (dy/dt)$ и $(\partial w/\partial z) (dz/dt)$. Производя подстановку $u = dx/dt$, $v = dy/dt$ и $w = dz/dt$ и умножая на плотность ρ , получим выражения для сил инерции:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u^2}{\partial x}, \quad \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial v^2}{\partial y}, \quad \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial w^2}{\partial z}.$$

Следует отметить, что правые части этих выражений, которые можно записать в виде $(\partial/\partial x)(\rho u^2/2)$ и т. д., показывают, что эта сила инерции равна скорости изменения кинетической энергии в пространстве вдоль соответствующей координатной оси OX , OY или OZ .

IV-3.2. Случай деформации сдвига. IV-3.2.1 Пример. В изогнутом русле или трубе, где частицы жидкости испытывают угловую деформацию, траектории искривлены, в то время как жидкость по инерции стремится продолжать движение по прямой линии. Это приводит к возникновению центробежной силы, пропорциональной скорости изменения направления, вызываемого приложенными силами.

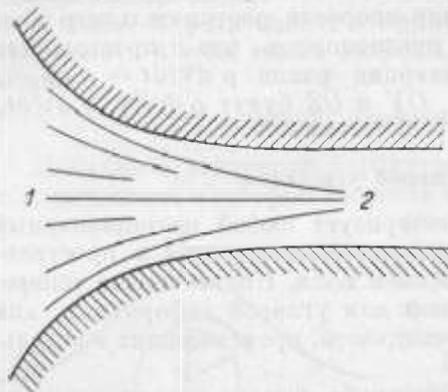


Рис. IV-2. Зона возрастания завихренности.

1 — безвихревое движение; 2 — вихревое движение.

возрастающей угловой деформации для двумерного движения имеют вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, подставляя $u = dx/dt$ и $v = dy/dt$, получаем выражения для соответствующих сил инерции:

$$\frac{1}{2} \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\frac{1}{2} \rho u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

IV-3.3. Случай изменения завихренности. IV-3.3.1. Пример. На входе в трубу (рис. IV-2) из-за изменения сил трения происходит изменение завихренности частиц жидкости. Поэтому должны существовать силы инерции, соответствующие естественному стремлению жидкости противодействовать изменению ее вращательного момента.

В однородной трубе вихревое движение частиц существует, но не происходит изменения интенсивности вихря и соответствующее ускорение равно нулю.

IV-3.3.2. Математическое выражение. Как и в двух предыдущих случаях, из выражений для компонент вихря скорости в двумерном движении

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx$$

получаем соответствующие силы инерции, равные

$$-\frac{1}{2} \rho v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{1}{2} \rho u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Ранее было показано, что движение можно считать безвихревым, если пренебречь силами трения (см. II-4.1). Очевидно, что при таких условиях мы должны пренебречь и вихревыми силами инерции.

IV-4. Общие математические выражения для сил инерции

IV-4.1. В общем случае и локальное, и конвективное ускорения имеют место одновременно. Простейшим примером являются колебания жидкости в неоднородной изогнутой трубе. Поэтому в общем случае V и ее компоненты u , v и w являются функциями как времени, так и пространственных координат:

$$V = f(x, y, z, t) \begin{cases} u(x, y, z, t), \\ v(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t). \end{cases}$$

Так как полный дифференциал V равен $dV = (\partial V/\partial t) dt + (\partial V/\partial x) dx + (\partial V/\partial y) dy + (\partial V/\partial z) dz$, то полное ускорение дается полной производной от V (или u , v , w) по времени:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Подставляя $u = dx/dt$, $v = dy/dt$ и $w = dz/dt$ и умножая на плотность ρ , получаем силы инерции:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Члены локального ускорения

Члены конвективного ускорения

Эти выражения можно видоизменить, придав им более выразительную форму. Это мы сделаем в IV-4.2 и IV-4.3.

IV-4.2. Прибавляя и вычитая $(1/2) \rho v \partial v / \partial x$ и $(1/2) \rho w \partial w / \partial x$ в первой строке предыдущего выражения (этот прием был уже использован при изучении элементарных движений частицы жидкости в II-5.2), получаем следующее выражение, подтверждающее высказанные выше физические соображения:

$$\rho \left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{Локальное ускорение за счет изменения поступательного движения}} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{ускорение линейной деформации}} + \underbrace{\frac{1}{2} v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} w \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{\text{ускорение угловой деформации (сдвига)}} + \underbrace{\frac{1}{2} w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{ускорение вращения (вихревое)}} \right].$$

Члены конвективного ускорения

Прибавляя и вычитая $(1/2) \rho w \partial w / \partial y$ и $(1/2) \rho u \partial u / \partial y$ во второй строке и $(1/2) \rho u \partial u / \partial z$ и $(1/2) \rho v \partial v / \partial z$ в третьей, получаем еще два аналогичных выражения.

IV-4.3. С другой стороны, часто целесообразно видоизменить выражения для ускорений таким образом, чтобы выделить члены, характеризующие кинетическую энергию, и члены, характеризующие вихревое движение. Прибавляя и вычитая $\rho (v \partial v / \partial x + w \partial w / \partial x)$ в первой строке, $\rho (u \partial u / \partial y + w \partial w / \partial y)$ во второй и $\rho (u \partial u / \partial z + v \partial v / \partial z)$ в третьей, получаем для оси OX

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

и два аналогичных выражения для осей OY и OZ . Данное выше выражение можно записать в виде

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right].$$

Поскольку

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

то, вводя компоненты вектора вихря

$$2\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$2\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

получаем окончательно для сил инерции вдоль оси OX :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\eta w - \zeta v) \right].$$

Аналогично можно найти, что выражения для сил инерции вдоль осей OY и OZ будут;

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\zeta u - \xi w) \right],$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\xi v - \eta u) \right].$$

Эти три выражения можно записать в векторной форме более сжато в виде;

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \underbrace{\text{grad} \frac{V^2}{2}}_{\text{член кинетической энергии}} - \underbrace{\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V}}_{\text{вихревой член}} \right).$$

Конвективное ускорение

Отметим, что член конвективной инерции:

$$\rho \text{grad} \frac{V^2}{2} \begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right), \\ \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right), \\ \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right), \end{cases}$$

фактически характеризует пространственное приращение кинетической энергии $\rho V^2/2$ частицы.

IV-5. Некоторые приближения

IV-5.1. **Случай, в которых пренебрегается локальным ускорением.**

IV-5.1.1. В абсолютно строгом смысле стационарного движения не существует. Все всегда имеет начало и конец. Однако в гидравлике многие движения фактически весьма близки к стационарному в течение определенного интервала времени. В этом случае, поскольку \mathbf{V} не изменяется во времени, соответствующий инерционный член $\partial \mathbf{V} / \partial t$ равен нулю. (Чрезвычайно важный случай турбулентного движения будет рассмотрен в главах VII и VIII.)

Однако в инженерной гидравлике рассматриваются многочисленные виды нестационарного движения, в которых изменчивость скорости во времени исследуется без учета локального ускорения и соответствующих инерционных членов. Это имеет место, когда скорости малы и их изменения во времени происходят очень медленно. Например, в случае периодического движения с очень длинным

периодом T имеем $\partial V/\partial t \approx V/T$; поэтому членом $\rho \partial V/\partial t$ можно пренебречь по сравнению с другими силами.

Назовем несколько частных случаев, когда это приближение (аппроксимация) имеет силу:

поток в пористой среде: изменение во времени уровня грунтовых вод;

волна паводка в реке;

изменение уровня в водохранилище за счет изменений речного стока выше по течению, регулирования сброса через водослив и донного сброса, а также расхода через турбины;

вытекание из бассейна через небольшой клапан.

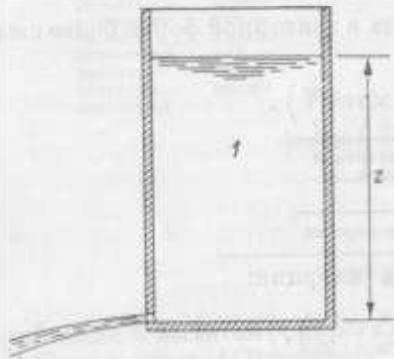


Рис. IV-3. Нестационарное движение, рассматриваемое как последовательность стационарных движений. 1 — площадь «А».



Рис. IV-4. Квадратичный член становится бесконечно малым, если $V \rightarrow 0$. 1 — линейный член; 2 — квадратичный член.

Во всех этих случаях поток рассматривается как последовательность стационарных движений и рассчитывается без учета локальной инерции.

IV-5.1.2. П р и м е р. В качестве примера нестационарного движения, рассматриваемого и анализируемого как стационарное, разберем изменение уровня в сосуде (рис. IV-3). Рассмотрим истечение из прямоугольного сосуда с площадью горизонтального поперечного сечения A . Объем воды выше небольшого отверстия, имеющего площадь S , будет Az . Изменение z как функции времени дается с помощью дифференциального уравнения $A dz = Q dt$, где $Q = C_d S V$, причем C_d — коэффициент расхода, а V дается формулой Торичелли $V = \sqrt{2gz}$. Формула Торичелли справедлива только, если можно пренебречь локальной инерцией.

Подставляя величину $Q = C_d S \sqrt{2gz}$ в приведенное выше дифференциальное уравнение и интегрируя, получаем время, необходимое для опустошения всего сосуда:

$$T = \frac{2A}{C_d S \sqrt{2g}} \sqrt{z_0},$$

где z_0 — начальная глубина. Если бы величина S была велика, а A — мала, то для расчета T пришлось бы учитывать локальную инерцию.

Другой пример, упоминавшийся выше, — это изменение уровня в водохранилище с площадью горизонтального сечения $S(z)$ за счет изменения речного стока в водохранилище. Соответствующий расчет высоты плотины, числа турбин и пропускной способности водослива основан на следующем соотношении:

$$Q(t) \Delta t = \underbrace{S(z) \Delta z}_{\text{Изменение объема водохранилища}} + \underbrace{Q_t \Delta t}_{\text{Сток воды через турбины}} + \underbrace{Q_S(z) \Delta t}_{\text{Сток через водослив}} + \underbrace{f(S) \Delta t}_{\text{Потери на испарение}}$$

IV-5.2. Случай, в которых пренебрегают конвективным ускорением или учитывают его приближенно. IV-5.2.1. М е д л е н н о е д в и ж е н и е. Член локальной инерции пропорционален скорости V , т. е. это линейный член. В то же время члены конвективного ускорения — квадратичны: они пропорциональны V^2 (или же $u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw$). Поэтому, за счет конвективного ускорения, общее уравнение движения нелинейно.

Хорошо известно, что решение многих линейных систем дифференциальных уравнений не встречает математических затруднений. Однако решение нелинейных систем часто наталкивается на трудности. Это главная причина затруднений в механике жидкости. Поэтому важно знать, когда можно пренебречь квадратичными членами.

Когда V стремится к нулю, квадратичный член, пропорциональный V^2 , стремится к нулю быстрее, чем линейный член, пропорциональный V (рис. IV-4). Поэтому на практике, когда V мало, величиной V^2 и конвективной инерцией пренебрегают по сравнению с другими членами, выражающими локальную инерцию и приложенные силы. Примерами таких движений являются:

периодические гравитационные волны (в теории 1-го приближения);

поток в пористой среде, подчиняющийся линейному закону Дарси (такой тип движения определяется только балансом приложенных сил, так как локальным ускорением также пренебрегают);

движение малой сферы в вязкой жидкости (формула Стокса).

IV-5.2.2. Р е ш е н и е с п о м о щ ь ю р я д а. Иногда учитывают частичный эффект конвективного ускорения, используя приближенное решение в виде нескольких членов ряда. (Пример: теории гравитационных волн во 2-м, 3-м и т. д., приближениях, теория ламинарного пограничного слоя и др.)

IV-5.2.3. Б е з в и х р е в о е д в и ж е н и е. Другой метод, позволяющий учесть частичный эффект конвективного ускорения, основан на предположении отсутствия завихренности, когда фрикционные эффекты пренебрежимо малы. Этот метод уже рассматривался и будет рассмотрен подробнее в последующих главах.

IV-5.2.4. Упрощение некоторых членов. Иногда можно пренебречь лишь некоторыми членами конвективного ускорения. В качестве примера возьмем случай двумерного пограничного слоя на плоской пластине (рис. IV-5). Этот пример полезен для понимания того, как математические упрощения могут вытекать из физических рассуждений.

Допустим, что u велико по сравнению с v , du/dx велико по сравнению

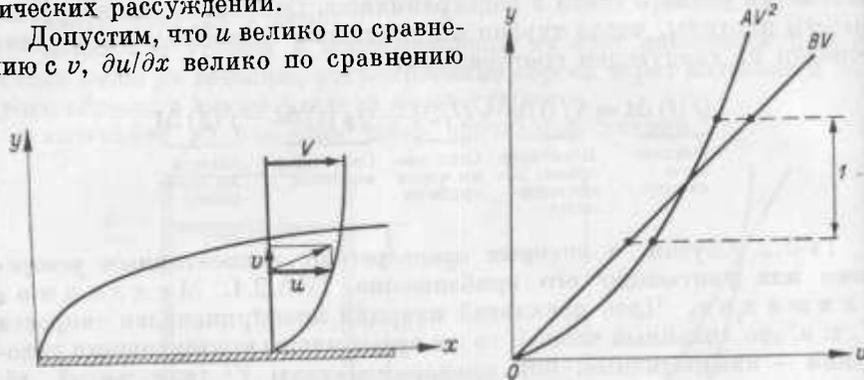


Рис. IV-5. Введение упрощающего допущения в теории развития пограничного слоя.

Рис. IV-6. Линеаризация. 1 — диапазон применимости.

с dv/dx и du/dx мал по сравнению с du/dy . Отсюда двумерные компоненты конвективной инерции будут:

$$\rho \left(\overset{\text{(большая} \times \text{малая)}}{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \overset{\text{(малая} \times \text{большая)}}{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\rho \left(\overset{\text{(большая} \times \text{очень малая)}}{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \overset{\text{(малая} \times \text{малая)}}{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Так как $u \partial v/\partial x$ и $v \partial v/\partial y$ пренебрежимо малы, то можно записать просто

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Аналогичная аппроксимация используется при анализе распространения струи.

IV-5.2.5. Линеаризация квадратичных членов. Линеаризация квадратичных членов заключается, например, в замене квадратичных членов $y = AV^2$ или $y = A_1 V dV$ линейными членами $y_1 = BV (+ \text{const})$ или $y_2 = B_1 V$ или $y_2 = B_2 dV$, где B — средняя величина AV (рис. IV-6); B_1 — средняя величина $A_1 dV$; B_2 — средняя величина $A_1 V$.

Этот метод применим, когда V или dV изменяются в небольших пределах; в противном случае величины B, B_1, B_2 должны изменяться, и задача решается шагами. Расчет устойчивости уравнительного бассейна, изучение устойчивости ламинарного потока и движение

сферы в вязкой жидкости (теория Озеена) представляют собой некоторые примеры случаев, когда указанный метод применим.

Теория Озеена является попыткой улучшить теорию Стокса для потока вокруг сферы путем учета некоторых линеаризованных эффектов конвективной инерции.

УПРАЖНЕНИЯ

IV-1. Рассмотрите нестационарный двумерный поток с компонентами скорости в точке $x = 1, y = 1$ в момент $t = 0$: $u = 1$ фут/с, $v = 2$ фут/с; и в момент $t = 1$ с: $u = 2$ фут/с, $v = 3$ фут/с. Далее, в момент $t = 0$ компоненты скорости в точке $x = 2, y = 1$ таковы: $u = 1,2$ фут/с, $v = 2,4$ фут/с, а в точке $x = 1, y = 2$ имеем: $u = 1,1$ фут/с, $v = 1,8$ фут/с. Рассчитайте величину полного ускорения, считая изменение скорости во времени и пространстве линейным.

О т в е т: $dV/dt = 1,72$ фут/с².

IV-2. Рассчитайте полную производную от температуры по времени для поезда, идущего на север со скоростью 300 миль в сутки. Среднее за сутки пространственное изменение температуры равно -2°F на 1000 миль. Суточное изменение температуры в данном месте равно $4 \sin(2\pi t/T)^\circ \text{F}$, где $T = 24$ ч.

О т в е т:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{12} - \frac{1}{40} \text{ } ^\circ \text{F/ч} \quad (t \text{ — в часах}).$$

IV-3. В случае акустической прогрессивной волны в трубе

$$u = a \sin \frac{2\pi}{L} (x - Ct)$$

рассчитайте отношение конвективной инерции к локальной.

IV-4. Определите члены конвективной инерции, которыми можно пренебречь в струе.

IV-5. Приток в водохранилище определяется уравнением

$$Q(t) \text{ фут}^3/\text{с} = 10\,000 [1,5 - \sin kt],$$

где $k = 2\pi/T$, а T — период, равный 1 году. Горизонтальная площадь водохранилища определяется уравнением

$$A(z) = 10\,000z^2.$$

Порог водослива для наводкового расхода расположен на высоте $z = 100$ футов и имеет пропускную способность

$$Q_s \text{ фут}^3/\text{с} = Cl [z - 100] \sqrt{2g(z - 100)},$$

где коэффициент расхода $C = 0,5$, а длина водослива $l = 100$ футов. Расход через турбины постоянен и равен 7000 фут³/с.

Определите изменение уровня свободной поверхности в водохранилище как функцию времени и максимальный расход через водослив для каждого года, начиная с $t = 0$. Требуется найти также максимальный возможный расход через водослив. В момент $t = 0$ принять положение свободной поверхности на высоте $z = 30$ футов.

IV-6. Рассмотрите периодические двумерные колебания (сейши) в прямоугольном бассейне длиной l и глубиной d , причем $l \gg d$. Период колебаний равен

$T = 2l\sqrt{gd}$. Предполагается, что горизонтальная компонента скорости при данном x не изменяется по вертикали и является функцией только от времени. Уравнение свободной поверхности будет

$$h = d + a \cos mx \cos kt,$$

где

$$m = \frac{2\pi}{L}, \quad L = T\sqrt{gd}, \quad k = \frac{2\pi}{T}.$$

Определите максимальные значения u и w , а также места этих максимумов. Для вычислений надо привлечь некоторые упрощающие допущения. Определите выражения для локальной и конвективной инерции, их максимальные величины и соотношение их максимальных величин. Дайте критерий, показывающий, когда конвективными членами можно пренебрегать.

О т в е т:

$$u_{\max} = a\sqrt{\frac{g}{d}} \quad \text{при} \quad x = \frac{l}{2};$$

$$w_{\max} = ka \quad \text{при} \quad x=0, \quad l \quad \text{и} \quad \text{при} \quad z=d;$$

$$\frac{\left| \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\max}}{\left| \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\max}} = \frac{a}{d}.$$

IV-7. Покажите, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta + v\zeta) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

и найдите аналогичные выражения для $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dw}{dt}$.

IV-8. Выразите компоненты ускорения A_r, A_θ, A_z в цилиндрической системе координат.

О т в е т:

$$A_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r},$$

$$A_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r},$$

$$A_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

IV-9. Компоненты скорости u, v, w определены теперь в натуральной системе координат, т. е. ось Ox направлена из данной точки вдоль линии тока, а ось Oy — перпендикулярно к ней. Найдите компоненты ускорения. Во втором случае, когда принимается, что траектории и линии тока различны, направленные оси будут определяться в данной точке по траекториям. Найдите также компоненты ускорения и в этом случае (R — радиус кривизны траектории).

О т в е т:

$$1) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{V^2}{R};$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right); \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{V^2}{R}; \quad \frac{\partial w}{\partial t}.$$

V-1. Внутренние и внешние силы

При рассмотрении изолированной элементарной массы жидкости приложенные силы можно разделить на внутренние и внешние.

V-1.1. Внутренние силы. Внутренние силы возникают в результате взаимодействия друг с другом внутренних точек рассматриваемой массы жидкости. Согласно принципу, гласящему, что действие равно противодействию, эти внутренние силы попарно уравновешивают друг друга, и их сумма и полный момент вращения в точности равны нулю (рис. V-1). Однако в главе XIII мы увидим, что работа внутренних сил не равна нулю, хотя их сумма и равна нулю. По этой причине важно упомянуть об их существовании.

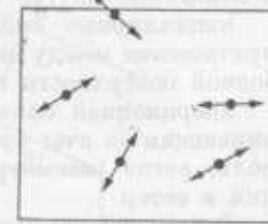


Рис. V-1. Действие равно противодействию; внутренние силы попарно уравновешиваются.

V-1.2. Внешние силы. Силы на границах рассматриваемой частицы жидкости, так называемые поверхностные силы, и силы, действующие на ее массу всегда в одинаковом направлении, так называемые массовые или объемные силы, не уравновешивают друг друга. Они представляют собой внешние силы.

V-1.2.1. Поверхностные силы.

Поверхностные силы появляются в результате воздействия, оказываемого на границы рассматриваемого объема извне. Они создаются молекулярным притяжением. С удалением от границы они очень быстро уменьшаются, и, таким образом, их действие ограничено чрезвычайно тонким слоем, который, на основании допущения, что жидкость является сплошной средой, практически можно считать бесконечно тонким и совпадающим с поверхностью частицы жидкости.

На практике поверхностные силы могут быть: нормальными, обусловленными давлением, и касательными, обусловленными вязкостью. Внутри частицы силы этих двух типов также существуют, но там они попарно уравновешены и в сумме равны нулю, как уже указывалось. Работа этих внутренних сил не равна нулю. Например, потери напора в трубе образуются за счет работы сил внутренней вязкости. Этот вопрос рассмотрен в главе XIII.

V-1.2.2. М а с с о в ы е с и л ы. Массовые силы создаются внешними полями (например, полем тяготения или магнитным полем), которые действуют на каждый элемент рассматриваемого объема в определенном направлении. По этой причине их называют массовыми, или объемными силами. За исключением некоторых редких случаев, например при изучении движения жидкого металла в магнитном насосе, обыкновенно рассматривается только сила тяжести.

Эта гравитационная сила, как известно, обычно считается направленной в одну и ту же сторону; только в некоторых геофизических проблемах, например при изучении океанических течений, она считается направленной к центру Земли радиально.

V-1.3. Замечания о внешних и внутренних силах. Различие между внешними и внутренними силами обнаруживается не только при рассмотрении элементарной частицы жидкости. Например, гидравлический прыжок, потери напора во внезапно расширяющейся трубе и уравнение Бернулли в трубе могут быть изучены и продемонстрированы с помощью учета различия между внешними и внутренними силами (или работами этих сил) в определенном объеме жидкости. Этот вопрос будет разобран в главах XI и XIII.

В качестве приложенных внешних сил могут рассматриваться и некоторые другие силы, например:

капиллярные силы, обусловленные разностью молекулярного притяжения между двумя средами. Эти силы особенно важны на свободной поверхности потока в пористой среде;

инерционная сила, обусловленная ускорением Кориолиса, возникающим за счет вращения Земли. Эта сила играет существенную роль, когда рассматриваются приливные движения, морские течения и ветер.

В дальнейшем эти две силы рассматриваться не будут.

V-2. Сила тяжести

Подобно силам инерции, объемные силы пропорциональны массе жидкости и ускорению, создаваемому внешним полем. Поэтому в случае действия поля тяготения объемная сила на единицу объема просто равна весу этой единицы объема: $\bar{w} = \rho g$, где g — ускорение силы тяжести.

Эта сила не зависит от движения и остается одной и той же и в статике, и в вязком или турбулентном движении; она равна весу элементарной частицы жидкости $\rho g dx dy dz$.

В системе координат OX, OY, OZ (положительная вертикальная ось OZ направлена вверх) сила тяжести выражается в дифференциальной форме следующим образом. Обозначим через X, Y и Z три компоненты силы тяжести вдоль осей OX, OY, OZ . Очевидно, что $X = Y = 0$.

Таким образом:

$$X = 0,$$

$$Y = 0,$$

$$Z = -\rho g = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho g z),$$

что дает в векторной форме — $\text{grad}(\rho g z)$, поскольку

$$X = \frac{\partial}{\partial x}(\rho g z) = 0 \quad \text{и} \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho g z) = 0.$$

В инженерной практике силой тяжести пренебрегают при рассмотрении движения газа (за исключением метеорологических вопросов или расчетов дымоходов и вентиляционных устройств, где играют роль изменения силы тяжести, обусловленные колебаниями плотности).

V-3. Силы давления

Силы давления являются результатом действия нормальных компонент молекулярных сил вблизи границы рассматриваемого объема. Величина давления в данной точке получается путем деления нормальной силы, действующей на бесконечно малую площадь, на эту площадь.

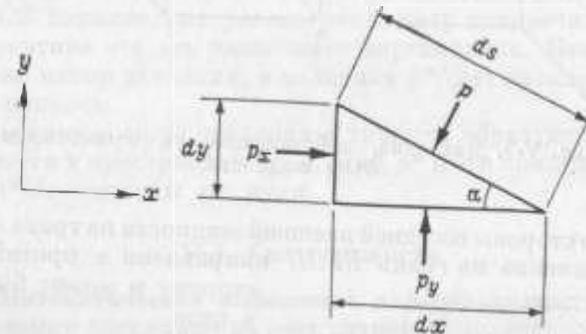


Рис. V-2. Интенсивность давления не зависит от ориентации поверхности.

V-3.1. Величина давления, сила давления и направление давления. Величина давления является скаляром, абсолютно независимым от ориентации площади, на которую давление действует. Это можно продемонстрировать, рассматривая треугольный двухмерный элемент в неподвижной жидкости (рис. V-2).

Поскольку движения нет, силы инерции и силы вязкости равны нулю и остаются только силы тяжести и давления. Проекция этих сил на оси OX и OY дают равенства:

$$p_x dy - p ds \sin \alpha = 0,$$

$$p_y dx - p ds \cos \alpha = \rho g \frac{dx dy}{2}.$$

Делая подстановку $dy = ds \sin \alpha$, $dx = ds \cos \alpha$ и пренебрегая членом $\rho g dx dy/2$, имеющим второй порядок малости, получаем $p = p_x$, $p = p_y$. Отсюда $p = p_x = p_y$.

Поскольку угол α произволен, давление одинаково во всех направлениях. Аналогичное доказательство можно привести и для трехмерного элемента жидкости.

Однако очевидно, что градиент давления (который является вектором) изменяется с направлением. Точно так же обусловленная давлением сила, действующая на некоторую площадь (и являющаяся

вектором), изменяет направление, поскольку его изменяет рассматриваемая площадь.

V-3.2. Изменение давления в пределах единицы объема. Рассмотрим элементарную частицу жидкости ($dx dy dz$) (рис. V-3).

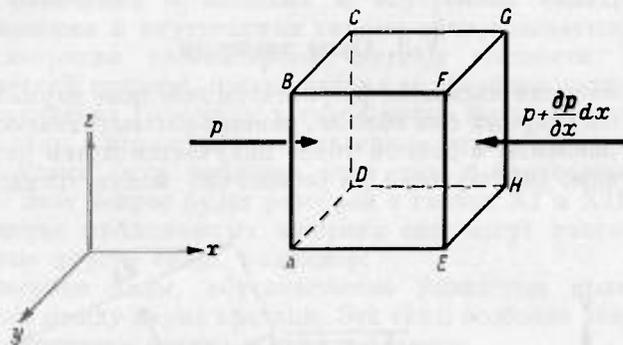


Рис. V-3. Давление, действующее на элементарный объем жидкости.

Давление со стороны соседней внешней жидкости на грань $ABCD$ равно $p dy dz$. Давление на грань $EFGH$ направлено в противоположную сторону и может быть записано в виде

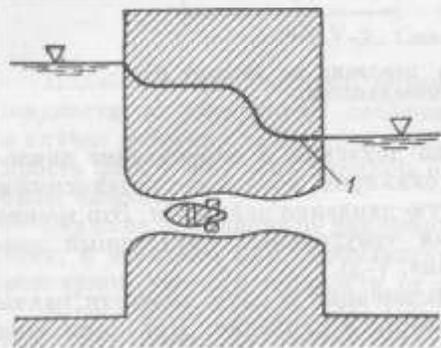


Рис. V-4. Движение зависит не от абсолютной величины давления, а от его градиента.
1 — линия давления

единицы объема может быть задано тремя компонентами: $-\partial p/\partial x$, $-\partial p/\partial y$ и $-\partial p/\partial z$, или векторным выражением: $-\text{grad}(p)$.

V-3.3. Движение жидкости и градиент давления. Интересно отметить, что движение частицы жидкости зависит не от абсолютной величины p , а только от ее градиента. Рассмотрим движение в туннеле, показанное на рис. V-4. Движение зависит только от разности (перепада) уровней на верхнем и нижнем концах туннеля. Это свойство часто используется для изучения движения под действием давления на уменьшенных моделях. Однако, если давление падает

ниже некоторой критической величины, возникает кавитация.

V-3.4. Давление и тяжесть. Полная сила, обусловленная силой давления и силой тяжести, на единицу объема будет

$$\text{grad } p + \text{grad } \rho g z = \text{grad}(p + \rho g z).$$

Сумма этих двух линейных величин в гидростатике является константой, поскольку $p - p_A = -\rho g z$, где p_A — постоянное внешнее давление (атмосферное). Это свойство также сохраняется в поперечном сечении однородного потока в канале или трубе, или, в более общем смысле, в том случае, когда кривизной траекторий можно пренебречь или движение является очень медленным (см. X-2.1.3). Отсюда сумму $(p + \rho g z)$ часто бывает удобно заменить единым членом $p^* = p + \rho g z$, а так как $p^* = \text{const}$, то $\partial p^*/\partial z = 0$ или $\text{grad } p^* = 0$. Ось OZ параллельна рассматриваемому поперечному сечению, т. е. на практике эта ось чаще всего вертикальна. Величина $p/(\rho g)$ известна как напор давления, а величину $p^*/(\rho g)$ называют пьезометрическим напором.

В общем случае силы давления и тяжести образуют сумму, которая изменяется в пространстве, т. е. $\text{grad } p^*$ и его компоненты $\partial p^*/\partial x$, $\partial p^*/\partial y$, $\partial p^*/\partial z$ отличны от нуля.

V-4. Силы вязкости

V-4.1. Математическое выражение для сил вязкости. Касательные напряжения возникают за счет вязкости жидкости. Это свойство имеет своей причиной перенос молекулами своего количества движения. Сила трения принимается пропорциональной коэффициенту вязкости μ и скорости угловой деформации γ
 $\tau = \mu \partial V/\partial n$.

Рассмотрим двухмерный элемент жидкости (рис. V-5). Сила трения, действующая на его сторону AB длиной dx , равна $\tau dx = \mu (\partial u/\partial y) dx$. Так как скорость в точке C равна $u + (\partial u/\partial y) dy$, то сила трения, действующая на сторону CD равна

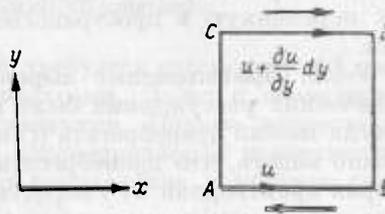


Рис. V-5. Двухмерный элемент жидкости.

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx = \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy dx.$$

Эти две силы действуют в противоположных направлениях, так как если внешняя частица $GHCD$ действует на сторону CD в направлении Ox , то внешняя частица $ABEF$ увлекается частицей $ABCD$ в ту же сторону. Следовательно, частица $ABEF$ действует на частицу $ABCD$ в противоположном направлении. Поэтому разность этих сил трения будет

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy.$$

Поделив все на $dx dy$, получим силу трения на единицу площади:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В более общем случае трехмерной несжимаемой жидкости можно показать, что компоненты силы трения на единицу объема будут:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 u,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 v,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 w,$$

а в векторной форме будем иметь

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 \mathbf{V}.$$

V-4.2. Математическая характеристика уравнения движения. Поскольку μ считается константой, уравнение движения является дифференциальным уравнением второго порядка из-за сил трения. В действительности коэффициент вязкости зависит от температуры, которая в свою очередь зависит от силы трения; однако изменения температуры за счет трения слишком малы, чтобы заметно повлиять на движение путем изменения коэффициента вязкости. Впрочем, это не всегда так; в частности, когда внешний источник тепла создает очень резкий градиент температуры, как, например, в теплообменнике атомного реактора. В этом случае необходимо рассматривать μ как переменную в пространстве. Вязкий член становится нелинейным.

V-4.3. Приближенные выражения для сил трения. С помощью физических рассуждений было показано, что эффектами сил трения иногда можно пренебрегать (глава II, II-4.1.2). Из сказанного выше можно видеть, что пренебрегать силами трения можно тогда, когда вторая производная от скорости ($\nabla^2 \mathbf{V}$) мала. За пределами пограничного слоя это условие часто оправдывается, и движение жидкости здесь подобно движению идеальной жидкости.

Иногда можно пренебречь только частью вязких фрикционных членов. Например, как было показано в II-5.2.4, в двухмерном ламинарном пограничном слое или в струе членами $\partial^2 v / \partial x^2$ и $\partial^2 v / \partial y^2$ можно пренебречь, если v мал по сравнению с u (см. рис. IV-5), а также можно пренебречь и величиной $\partial^2 u / \partial x^2$, поскольку du / dx мал. Тогда необходимо учитывать только член $\partial^2 u / \partial y^2$ и соответствующую ему силу трения $\mu \partial^2 u / \partial y^2$.

V-5. Теоретическое рассмотрение поверхностных сил

V-5.1. Общее выражение для поверхностных сил. Как мы видели, поверхностные силы состоят из силы давления и силы трения. Эти поверхностные силы можно вводить без учета их физической природы.

Мы увидим, что такой способ выражения поверхностных сил очень удобен, так как пригоден для любого типа движения — вязкого или турбулентного, и для любой жидкости — сжимаемой или несжимаемой. Однако, если физическая природа поверхностных сил учитывается, то они выражаются различным образом.

V-5.2. Девять компонент внешних сил. Рассмотрим элементарную массу жидкости в форме куба, грани которого параллельны трем координатным осям OX , OY и OZ (рис. V-6).

Поверхностные силы, действующие на каждую грань куба, полностью определяются тремя компонентами, параллельными трем координатным осям. Две из этих компонент представляют собой касательные напряжения, а третья — нормальное напряжение.

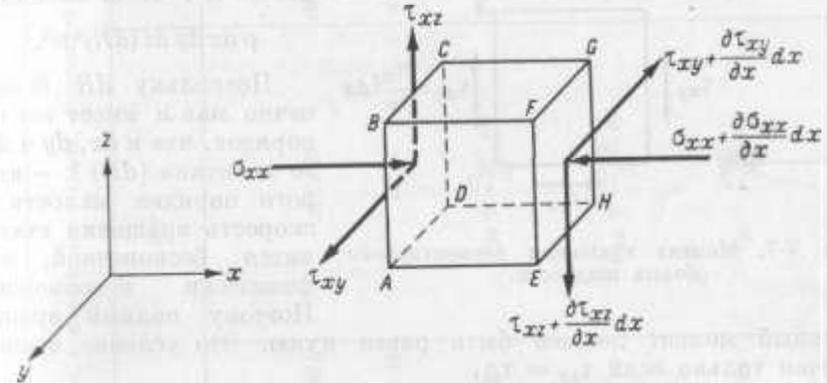


Рис. V-6. Поверхностные силы. Обозначения.

Поскольку куб имеет шесть граней, требуется рассмотреть 18 компонент. Они обозначаются двумя индексами. Через σ обозначены нормальные силы, а через τ — касательные. Первые индексы x , y и z указывают ось, нормальную к рассматриваемой поверхности, а вторые индексы x , y и z указывают направление, в котором сила действует.

Пары параллельных сил, действующие на две противоположные грани куба, действуют в противоположных направлениях, и их разность определится просто частными производными, взятыми в направлении оси, перпендикулярной к двум рассматриваемым граням.

Таким образом, внешние силы могут быть определены тензором второго ранга:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Эти силы полностью приведены в табл. V-1.

Теперь, складывая все силы, действующие на единицу объема в одном направлении, получим:

$$\text{в направлении } OX \quad \partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z,$$

в направлении OY $\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_{yy}/\partial y + \partial\tau_{zy}/\partial z$,
 в направлении OZ $\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_{zz}/\partial z$.

V-5.3. Шесть компонент Ламе. Рассмотрим теперь момент вращения частицы жидкости вокруг угловой точки, например вокруг точки A на рис. V-7. Полная сумма моментов вращения, вызванная действием касательных напряжений, равна

$$\tau_{xy}(dy dz) dx - \tau_{yx}(dz dx) dy.$$

Этот момент вращения равен массе, умноженной на квадрат радиуса вращения $(dR)^2$ и на квадрат угловой скорости ω^2 , т. е. величине $\rho dx dy dz (dR)^2 \omega^2$.

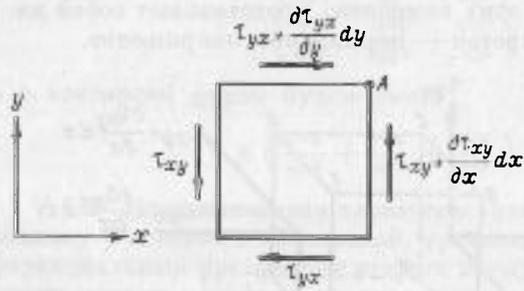


Рис. V-7. Момент вращения элементарного объема жидкости.

Поскольку dR бесконечно мал и имеет тот же порядок, что и dx , dy и dz , то величина $(dR)^2$ — второго порядка малости и скорость вращения становится бесконечной, что физически невозможно.

Поэтому полный вращательный момент должен быть равен нулю. Это условие выполняется только если $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Аналогично можно показать, что $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Отсюда девять компонент тензора внешней силы сводятся к шести так называемым компонентам Ламе:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

V-5.4. Величина компонент Ламе в некоторых частных случаях.

V-5.4.1. В случае идеальной жидкости касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения представляют собой просто силы давления:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0.$$

V-5.4.2. Для вязкой несжимаемой жидкости можно показать, что нормальные силы (σ) являются суммой силы давления и вязкой силы, пропорциональной коэффициенту линейной деформации:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Таблица V-1

Напряжения, приложенные к грани, нормальной к оси

Грань	Площадь	В направлении		
		OX	OY	OZ
ABCD	$dy dz$	σ_{xxx}	τ_{xy}	τ_{xz}
EFGH	$dy dz$	$\sigma_{xxx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$	$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$
CDGH	$dx dz$	τ_{yx}	σ_{yy}	τ_{yz}
AEFB	$dx dz$	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$	$\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy$	$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
BCGF	$dx dy$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{zz}
		$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$	$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$	$\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$

Касательные напряжения τ являются функциями от коэффициентов угловой деформации:

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Подставляя эти величины в сумму сил, действующих в одном и в том же направлении (при этом, например, для направления OX получим $\partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z$), легко получить формулы, найденные выше:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \text{ и т. д.}$$

V-5.4.3. В случае вязкой сжимаемой жидкости касательные напряжения те же самые, что и в предыдущем случае, но нормальные силы должны определяться с учетом изменения объема частицы жидкости. Можно показать, что

$$\sigma_{xx} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для σ_{yy} и σ_{zz} легко получаются два подобных соотношения. Величина λ представляет собой второй коэффициент вязкости для газа. Из кинетической теории газов следует, что для одноатомного газа $3\lambda + 2\mu = 0$. На практике это соотношение считается достаточно точным для любого газа.

Подставляя эти величины в сумму сил, действующих в направлении OX , получим:

$$\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{V}).$$

Такие же выражения легко находятся и для двух других направлений: OY и OZ . Эти три выражения можно записать более кратко в векторной форме:

$$-\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{V}.$$

Поскольку в несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{V} = 0$, то из данного выражения следует выражение, приведенное в V-5.4.2.

V-5.5. Диссипативная функция. Энергию, преобразованную в тепло в результате изменения объема или в результате трения, можно получить, складывая работу, произведенную всеми внешними силами. Она равна произведению внешних сил на смещение (Vdt).

Например, в направлении OX работа, произведенная силами давления, равна

$$p \, dy \, dz \, udt - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt,$$

а работа всех сил, действующих в направлении OX , будет

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx} \, dy \, dz \, udt - \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy \, dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt + \\ & + \tau_{xy} \, dy \, dz \, udt - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \, dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt + \\ & + \tau_{xz} \, dy \, dz \, udt - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy \, dz \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя значения σ и τ , находим, что полная работа, превращаемая в тепло на единицу объема и за единицу времени, дается так называемой диссипативной функцией. Эта величина является функцией от линейной и угловой скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \Phi = & \lambda (\text{div } \mathbf{V})^2 + \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

В несжимаемой жидкости $\lambda (\text{div } \mathbf{V})^2 = 0$. Эту функцию можно использовать, в частности, для расчета потерь напора в вязком потоке в трубе, расчета затухания гравитационных волн и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

V-1. Покажите, что вязкие силы, действующие на элемент жидкости единичного объема, можно выразить через операцию вихря с помощью следующего выражения:

$$-2\mu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right),$$

и двух других выражений, получаемых перестановкой.

О т в е т:

$$-2\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \quad -2\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right).$$

V-2. Покажите, что в безвихревом потоке несжимаемой жидкости сумма вязких сил теоретически равна нулю.

О т в е т:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{V} = \mu \nabla^2 \text{grad } \varphi = \mu \text{grad } \nabla^2 \varphi \equiv 0 \text{ (для сплошной среды).}$$

V-3. Вычислите вязкую силу, действующую на кубический элемент воды объемом 10^{-3} фут³, и расположенный между $y = 1/10$ фута и $y = 2/10$ фута в двумерном потоке, определяемом компонентами скорости:

$$u = 10^{-4} \frac{g}{y} (4-y)y, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Рассчитайте величины σ и τ на каждой грани кубика и скорость диссипации энергии в кубике ($\nu = 1,076 \cdot 10^{-5}$ фут²/с).

V-4. Выразите $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ в цилиндрических координатах.!

О т в е т: направление r —

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right],$$

направление θ —

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right];$$

направление z —

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right].$$

V-5. Выразите напряжения σ и τ в цилиндрической системе координат для несжимаемой жидкости.

О т в е т:

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right], \quad \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], \quad \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right], \quad \tau_{\theta z} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right].$$

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

VI-1. Основные формы дифференциальных уравнений движения

Уравнение движения получается в результате приравнивания сил, приложенных к единице объема жидкости, силам инерции. Физический смысл и математические выражения этих сил были приведены в главах IV и V.

В зависимости от различных аппроксимаций изучаемых явлений оказывается удобным использовать уравнения движения, записанные в различных формах. Эти различные формы и будут рассмотрены в настоящей главе.

VI-1.1. Идеальная жидкость. VI-1.1.1. Уравнение Эйлера. Первое главное приближение заключается в предположении, что жидкость — идеальная. В этом случае силы трения равны нулю, и приложенные силы состоят только из сил тяжести и давления. Уравнение движения получается непосредственно из выражений, приведенных в главах IV и V, в координатной системе OX , OY , OZ , где ось OZ считаем вертикальной.

Напомним, что $p^* = p + \rho g z$.

Силы инерции на единицу объема (см. IV-1.1)	Силы давления и тяжести на единицу объема жидкости (см. V-3.4)
---	--

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p^*}{\partial x},$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p^*}{\partial y},$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p^*}{\partial z},$$

или в векторной форме:

$$\rho \frac{dV}{dt} + \text{grad } p^* = 0.$$

Раскрывая выражения $\frac{du}{dt}$ и p^* , можно записать уравнение движения для оси OX (см. IV-4.1):

Силы инерции		Приложенные силы
локальная	конвективная	давление тяжесть

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z).$$

Два аналогичных уравнения можно записать и для осей OY и OZ . Такая система уравнений совместно с уравнением неразрывности (см. III-2.2.2.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

лежит в основе большинства гидродинамических исследований идеальной несжимаемой жидкости. С математической точки зрения эти уравнения являются уравнениями первого порядка, но они нелинейны (точнее, квадратичны) из-за членов конвективной инерции. Эти квадратичные члены являются причиной ряда трудностей, с которыми сталкиваются в гидравлике.

VI-1.1.2. Уравнения Лагранжа. Уравнение движения в лагранжевой системе координат употребляется, в частности, при решении задач, связанных с периодическими гравитационными волнами. Поэтому это уравнение дается здесь только для того, чтобы читатель смог распознать его при ознакомлении с литературой по данному вопросу. Его подробное рассмотрение выходит за рамки этой книги.

Силы трения не учитываются. Поэтому уравнения Лагранжа могут быть получены из данной выше системы уравнений Эйлера путем классических операций:

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t u dt, \quad y - y_0 = \int_{t_0}^t v dt, \quad z - z_0 = \int_{t_0}^t w dt,$$

где x_0, y_0, z_0 — начальные координаты рассматриваемой частицы в данный момент t_0 , а x, y, z — координаты той же частицы в момент t .

Если обозначить компоненты объемных или массовых сил, т. е. компоненты силы тяжести, через X, Y, Z , то уравнение в форме Лагранжа для оси OX запишется в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} = \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial z_0}.$$

Два аналогичных уравнения дают выражения для $\partial p / \partial y_0$ и $\partial p / \partial z_0$ путем перестановки величин x_0, y_0 и z_0 .

VI-1.2. Вязкая жидкость и уравнения Навье — Стокса. VI-1.2.1. Если в уравнения Эйлера ввести силы трения, то мы получим так называемые уравнения Навье — Стокса (см. V-4.1). Ввиду важности этих уравнений выпишем их в полной форме для трех координатных осей:

Силы инерции		Приложенные силы		
локальная	конвективная	давление тяжесть		трение
$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$	$= -$	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$	
$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$	$= -$	$\frac{\partial p}{\partial y}$	$+ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$	
$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$	$= -$	$\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial z}$	$+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$	

Уравнения Навье — Стокса лежат в основе большей части проблем механики несжимаемой жидкости. Это дифференциальные уравнения второго порядка (из-за фрикционных членов) и квадратичные (из-за конвективных инерционных членов).

VI-1.2.2. Тензорные обозначения. Уравнения Навье — Стокса можно записать в очень компактной форме с помощью тензорных обозначений. Тензорная система обозначений очень часто используется именно из-за своей краткости. Знание тензорного исчисления вовсе не обязательно для того, чтобы уяснить систему обозначений, которая дается здесь в качестве средства, помогающего работе с литературой по рассматриваемым вопросам.

Используются два индекса, i и j , которые показывают, когда операцию следует систематически повторять и какая компонента векторной величины (например, скорости \mathbf{V}) рассматривается. Если индекс в члене повторяется, это значит, что рассматриваемая величина суммируется по всем возможным компонентам. Например, уравнение неразрывности $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ в тензорной форме запишется: $\partial u_i/\partial x_i = 0$, поскольку индекс « i » указывает, что величина (здесь \mathbf{V}) должна быть просуммирована по трем компонентам: OX , OY и OZ .

Три приведенные выше уравнения Навье — Стокса можно записать просто в виде

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Здесь индекс « i » представляет собой так называемый «свободный индекс», который указывает рассматриваемую компоненту, а индекс « j » — так называемый «немой индекс», который указывает повторяемую операцию.

VI-1.2.3. Эти уравнения Навье — Стокса часто записывают также в иной форме, позволяющей подчеркнуть роль вихревой компонент

движения. Для этого достаточно использовать для силы инерции выражение, приведенное в главе IV, откуда получаем (см. IV-4.3):

Силы инерции		Приложенные силы			
Локальная	конвективная		давление	тяжесть	трение
	вызванная изменением кинетической энергии	вызванная завихренностью			
$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} + 2(w\eta - v\zeta) \right]$	$= -$		$\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x}$	$+ \mu \nabla^2 u$	
$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{V^2}{2} + 2(u\zeta - w\xi) \right]$	$= -$		$\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial y}$	$+ \mu \nabla^2 v$	
$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{V^2}{2} + 2(v\xi - u\eta) \right]$	$= -$		$\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial z}$	$+ \mu \nabla^2 w$	

VI-1.2.4. Векторные обозначения. Эти три уравнения легко записываются более компактно в векторной форме:

Силы инерции		Приложенные силы			
локальная	конвективная		давление	тяжесть	трение
	вызванная изменением кинетической энергии	вызванная завихренностью			
$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{V^2}{2} + (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \right)$	$= -$		$\mathbf{grad} (p + \rho g z)$	$+ \mu \nabla^2 \mathbf{V}$	

а это уравнение преобразовывается в

$$\mathbf{grad} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = - \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

В случае стационарного ($\partial \mathbf{V}/\partial t = 0$) безвихревого потока ($\mathbf{rot} \mathbf{V} = 0$) идеальной жидкости ($\mu = 0$) полученное уравнение дает сразу

$$\mathbf{grad} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

или

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const},$$

что представляет собой хорошо известное уравнение Бернулли, которое будет рассмотрено в развернутом виде в главе X.

VI-1.2.5. Случай сжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости надо учитывать изменение объема частицы. Уравнение движения вдоль оси OX для такой жидкости дается здесь

без дальнейшего обсуждения, просто для ознакомления, которое может оказаться полезным при работе с литературой:

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial(\rho - \rho g z)}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{V}$$

Полное векторное уравнение будет:

$$\operatorname{grad} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z - (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{V} \right) = -\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

VI-1.3. **Общая форма уравнения движения.** Выше было показано, что приложенные силы могут быть выражены независимо от их физической природы с помощью тензора второго ранга:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Основное преимущество такого способа обозначений заключается в том, что он пригоден для любого типа жидкости — идеальной или реальной, и для любого типа движения — ламинарного или турбулентного. В дальнейшем будет показано, что если действительные значения u , v , w и p в уравнениях движения заменить осредненными значениями \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и \bar{p} в турбулентном потоке, то поверхностные силы σ и τ включают в себя дополнительные силы, обусловленные турбулентными пульсациями (см. VII-5.3).

Таким образом, выгода от использования обозначений σ и τ состоит в возможности выразить уравнения движения в общей форме, не зависящей от природы потока.

Приравнивая силы инерции приложенным силам, выраженным так, как показано в главе V, получаем:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= X + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{dv}{dt} &= Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{dw}{dt} &= Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

На практике, если ось OZ направлена вертикально вверх, то $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\rho g = -(\partial/\partial z)(\rho g z)$.

VI-2. Сводка наиболее употребительных аппроксимаций

Таблицы VI-1 и VI-2 еще раз напоминают физический смысл различных членов и возможные аппроксимации.

Возможны различные комбинации аппроксимаций, и в соответствии с этим в гидравлике могут встречаться все случаи

Таблица VI-1

(1) $\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right]$	(2) $\operatorname{grad} \frac{V^2}{2}$	(3) $(\operatorname{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$	(4) $-\operatorname{grad}(p)$	(5) $\rho g z$	(6) $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$
Локальная инерция	Изменение кинетической энергии в пространстве	Вихревой член	Сила движения	Сила тяжести	Сила трения
Физический смысл	Конвективная инерция	Конвективная инерция	Приложенные силы	Приложенные силы	Приложенные силы
Математические характеристики	Линейный член 1-го порядка	Линейные (квадратичные) члены	Линейный член 1-го порядка	Постоянный член	Линейный член 2-го порядка
Аппроксимация	При стационарном потоке равна нулю	И безвихревом движении равна нулю. Решение дается гармонической функцией	Линейный член 1-го порядка	В случае газа равна нулю (с некоторыми исключениями)	В идеальной жидкости равна нулю
	При медленном движении равна нулю	равно нулю			

Локальная инерция	Конвективная инерция	Трение	Уравнения	Некоторые области приложения
Стационарное движение или движение, рассматриваемое как последовательность стационарных движений	Медленное движение	Без трения	$\text{grad}(p + \rho g z) = 0$	Гидростатика
	Безвихревое движение	С трением	$-\text{grad}(p + \rho g z) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} = 0$	Стационарный однородный поток. Поток в пористой среде
Нестационарное движение	Вихревое движение	Без трения	$\text{grad}\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = 0$	Неоднородный (конвергентный) стационарный поток с постоянной полной энергией. Расчет давления в двухмерной гидродинамической сетке
		С трением	$\text{grad}\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = -\rho(\text{rot } \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$	Общий случай стационарного потока. Пограничный слой (при некоторых упрощениях)
	Медленное движение	Без трения	$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad}(p + \rho g z) = 0$	Гравитационные волны (теория 1-го приближения). Теория гидравлического удара
		С трением	$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad}(p + \rho g z) - \mu \nabla^2 \mathbf{V} = 0$	Теория волновых фильтров (среднее движение)
	Безвихревое движение	Без трения	$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad}\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = 0$	Теория ударных волн
		Вихревое движение	Без трения	$\text{grad}\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = -\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho(\text{rot } \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$
		С трением	Общий случай	Приливные волны в эстуариях

представленные в таблицах. Очень часто оказывается достаточным пренебречь силой тяжести ($\text{grad } \rho g z$) и рассматривать плотность ρ как функцию от p , чтобы получить основные уравнения, описывающие движение газов, пока дивергенция от \mathbf{V} остается малой.

Можно заметить, что на практике фрикционный член $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ часто упрощают на основании эмпирических соображений с тем, чтобы получить возможность исследовать более сложные явления — такие как поток через пористую среду ($K \mathbf{V}$) или турбулентный поток ($K \mathbf{V}^2$). Эти два подхода рассмотрены в главах VIII и IX.

VI-2.1. Пример точного решения уравнений Навье — Стокса.

VI-2.1.1. Трудности интегрирования. Можно полагать, что общего решения системы дифференциальных уравнений, образуемой уравнениями неразрывности и движения, не существует. Однако некоторые точные решения можно получить, если граничные условия достаточно просты, причем даже при сохранении квадратичного члена конвективной инерции (т. е. в случае неоднородного потока). Примерами могут служить: поток между параллельными пластинами (поток Куэтта, поток Пуазейля), поток, обусловленный вращающимся диском, и т. д.

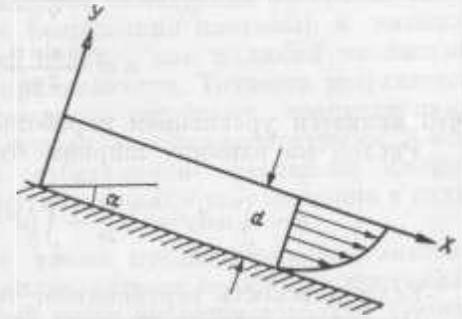


Рис. VI-1. Ламинарный поток на наклонной пластине.

VI-2.1.2. Поток на наклонной плоскости. В качестве примера здесь дан очень простой случай двумерного стационарного однородного потока на наклонной плоскости неограниченных размеров (рис. VI-1). Приведенные в VI-1.2.1 уравнения Навье — Стокса можно упростить следующим образом. Поскольку движение стационарно, то $\partial u/\partial t = 0$ и $\partial v/\partial t = 0$. Поскольку движение двумерное, то $w = 0$, $\partial u/\partial z = 0$, $\partial^2 u/\partial z^2 = 0$ и т. д. Поскольку движение однородное и параллельное оси Ox , то $v = 0$, $\partial v/\partial x = 0$, $\partial v/\partial y = 0$, $\mu \nabla^2 v = 0$ и т. д.; $\partial u/\partial x = 0$, $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$, $\partial p/\partial x = 0$ и т. д.

Компоненты силы тяжести будут $X = \rho g \sin \alpha$ и $Y = -\rho g \cos \alpha$. Уравнение неразрывности сводится к $\partial u/\partial x = 0$, поскольку $v = 0$, и является следствием того факта, что поток однороден. Уравнения Навье — Стокса сводятся к выражениям:

$$\rho g \sin \alpha + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha.$$

Второе из этих выражений показывает, что давление подчиняется гидростатическому закону: $p + \rho g y \cos \alpha = \text{const}$. Константа,

стоящая справа, может быть, например, атмосферным давлением p_a , так что

$$p = p_a - \rho g y \cos \alpha.$$

Отсюда давление постоянно вдоль линий, параллельных оси Ox и равно атмосферному на свободной поверхности.

Граничные условия таковы: $u = 0$ при $y = -d$, т. е. на плоскости, и $du/dy = 0$ при $y = 0$, т. е. на свободной поверхности.

Интегрирование выражения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha$$

с учетом граничных условий дает последовательно

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} y \quad \left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right),$$

$$u = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} (d^2 - y^2),$$

что является уравнением параболы.

Расход на единицу ширины будет

$$q = \int_0^d u dy = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \int_0^d (d^2 - y^2) dy = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} d^3.$$

Если плоскость вертикальна, то $\alpha = \pi/2$ и $q = gd^3/3\nu$.

Потери энергии на единицу длины можно выразить с помощью диссипативной функции Φ , которая в этом случае просто равна $\mu (du/dy)^2$. Таким образом, потеря энергии равна

$$\int_0^d \Phi dy = \mu \int_0^d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2 d^3}{3\mu}.$$

Эту величину можно получить и непосредственно, рассматривая работу, производимую силой трения F_f :

$$\int_0^d F_f du = \mu \int_0^d \frac{\partial u}{\partial y} du = \mu \int_0^d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy.$$

VI-2.1.3. Получение численных решений уравнений Навье — Стокса. Благодаря развитию электронно-вычислительной техники появилась возможность получать решения уравнений Навье — Стокса непосредственно с помощью конечных разностей. Это позволяет изучать сложные движения жидкости без обычных ограничений аналитических решений.

Среди многих возможных методов, развитых с этой целью, следует указать метод MAC (markers and cells — «маркеры и ячейки») для двухмерного осесимметричного движения несжимаемой жидкости и метод PIC (particle in cell — «частица в ячейке») для двухмерного движения сжимаемой жидкости.

Коротко говоря, сущность этих методов состоит в том, что зависящее от времени движение потока рассчитывается через последовательные интервалы времени при заданных граничных условиях и при известном движении в начальный момент $t = 0$. Пространственные шаги образуют сетку из квадратных ячеек. Рассматривая одну или две частицы в центре каждого квадрата в момент $t = 0$, можно затем рассчитать траектории этих частиц через последовательные интервалы времени. Результат в виде рисунка прямо печатается вычислительной машиной и дает лагранжево изображение характера потока как функции времени. Можно получать и печатать поле векторов скорости и распределение давления в виде изобар.

Нетрудно понять, что этот метод является чрезвычайно плодотворным, что видно из рис. VI-2, на котором изображено поведение потока, образующегося при внезапной ликвидации преграды, удерживающей стену воды (задача о разрушении плотины), и натывающегося затем на препятствие, однако, как и любой численный метод, он имеет свои границы применимости. Точность результатов ограничивается быстро нарастающими ошибками, возникающими при замене дифференциальных членов конечно-разностными. Сюда относятся ошибки вследствие отбрасывания последних членов, а к ним добавляются ошибки округления, как будет показано в дальнейшем в XV-4.3.

Любые вычисления требуют также предварительного анализа устойчивости, с тем, чтобы накапливающаяся ошибка не превысила допустимой величины. Указанный метод является довольно дорогостоящим из-за расхода машинного времени. Тем не менее, следует ожидать, что методы такого рода будут находить все более широкое применение, позволяя решать задачи все возрастающей сложности.

VI-3. Устойчивость ламинарного потока

VI-3.1. Естественная тенденция потока жидкости к неустойчивости. Рассмотрим два слоя жидкости, движущихся с разными скоростями за счет действия трения (рис. VI-3). Если по какой-либо причине между этими двумя слоями существует малое волнообразное искривление, скорость слоя 2 уменьшится, а давление, согласно уравнению Бернулли, будет иметь тенденцию к возрастанию.

С другой стороны, скорость слоя 1 будет иметь тенденцию к увеличению, а давление, следовательно, к уменьшению. Так как действие давления направлено в ту же сторону, что и сила инерции (центробежная), то «волна» имеет естественную тенденцию к увеличению своей амплитуды. Однако соответствующее увеличение длины траектории частиц приводит к увеличению фрикционного эффекта действия трения, что в свою очередь стремится погасить волнообразное возмущение.

Таким образом, устойчивость ламинарного потока при отсутствии волновых возмущений или при наличии устойчивых волновых возмущений зависит от соотношения между градиентом кинетической энергии (по размерности совпадающим с силами конвективной

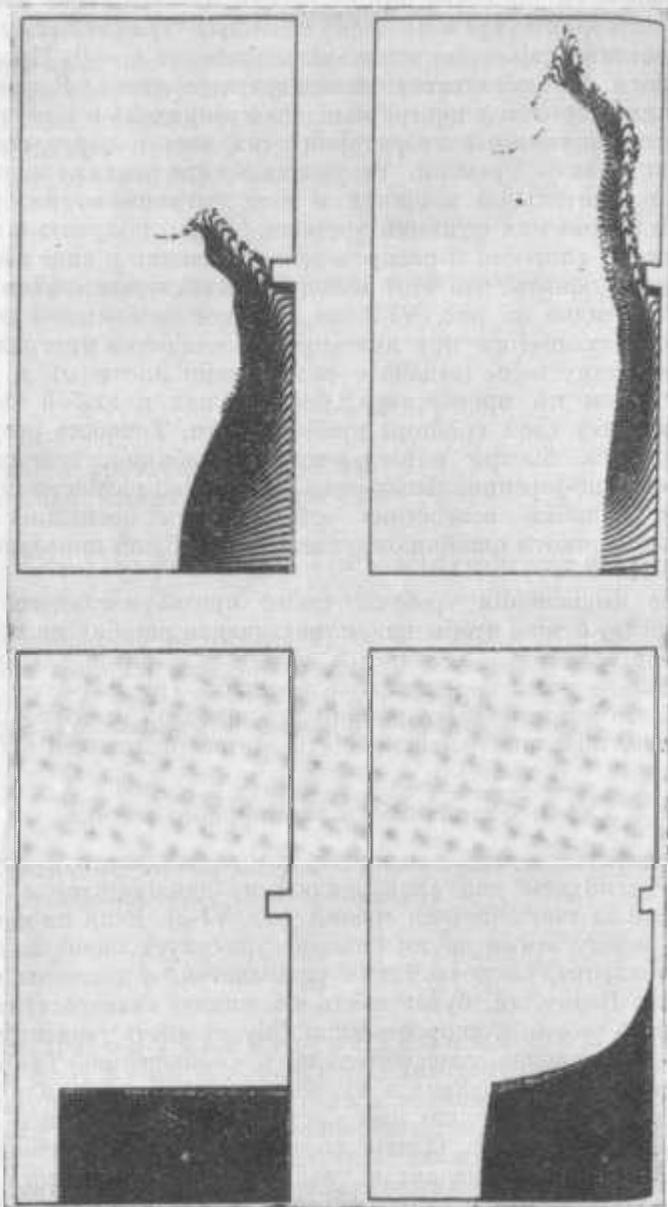


Рис. VI-2. Пример применения численного метода для решения уравнения Навье — Стокса.

инерции) и силами вязкости. Это отношение представляет собой функцию, называемую числом Рейнольдса ($R = VL/\nu$), которое приходится определять эмпирически. Здесь V — скорость, а L — характерная длина.

Если удовлетворяются условия неустойчивости, то первоначально небольшое волновое возмущение увеличивается, как показано на рис. VI-4.

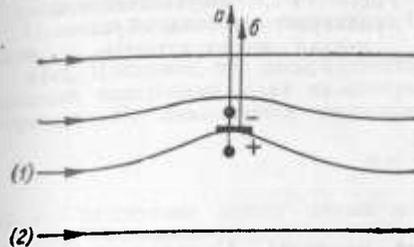


Рис. VI-3. Неустойчивое состояние потока жидкости.

a — действие силы инерции (центробежной);
 b — действие силы давления.

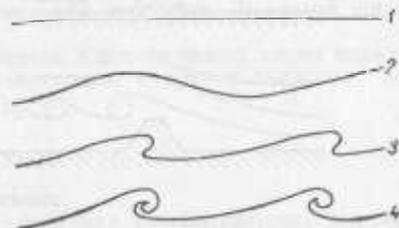


Рис. VI-4. Развитие волнообразных возмущений.

VI-3.2. Свободная турбулентность и эффект шероховатости стенки (пристеночной шероховатости). Первоначальное волнообразное возмущение вызывается либо массой жидкости, либо вливанием границы. В первом случае явление носит название «свободной турбулентности». Ядра турбулентности приходят из зоны, где градиент кинетической энергии максимален, например от границы круговой струи, вторгающейся в ту же самую среду (рис. VI-5).

Чаще всего первоначальные волнообразные возмущения создаются шероховатостью фиксированной границы. В самом деле, любая шероховатость вызывает местное увеличение скорости с последующим образованием местного сильного градиента кинетической энергии, что приводит к неустойчивости (рис. VI-6). Неустойчивость может иметь место даже между двумя жидкостями различной плотности. Например, ветер, дующий над водой, создает рябь. Эта рябь обусловлена неустойчивостью на границе между воздушным и водным потоками. С другой стороны, опрокидывание волн, как в форме прибрежного прибоя, так и в форме барашков в открытом море, также является причиной турбулентности. Аналогично гидравлический прыжок является причиной турбулентности в стационарном потоке. Оба процесса являются частными случаями свободной турбулентности.

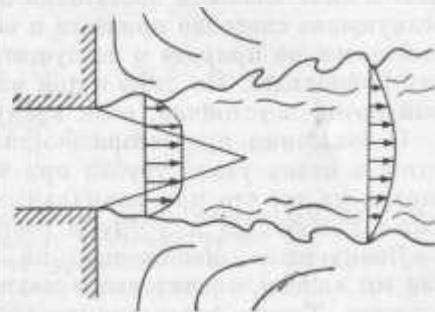


Рис. VI-5. Свободная турбулентность.

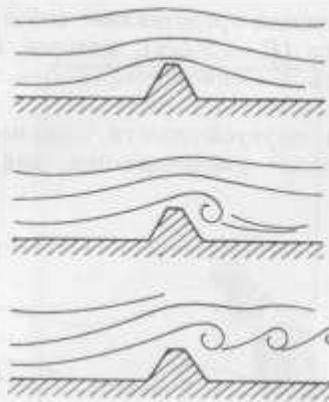


Рис. VI-6. Неустойчивость ламинарного потока, обусловленная шероховатостью.

VI-3.3. Некоторые теоретические аспекты. С математической точки зрения проблема устойчивости вязкого потока является в сущности проблемой возникновения турбулентности.

Поскольку поток характеризуется определенной неустойчивостью, достаточно крупное возмущение, вызванное внешними силами (например, образованное за счет шероховатости границы), экспоненциально возрастает. Если возмущение мало, то силы трения приводят к его затуханию. Но если отношение градиента кинетической энергии (по размерности совпадающего с силой конвективной инерции) к силе вязкости достаточно велико, то даже бесконечно малое возмущение способно привести к неустойчивости. Поэтому ламинарный поток по природе и по существу неустойчив при больших числах Рейнольдса. Но даже и при малых числах Рейнольдса ламинарный поток неустойчив, если возмущение достаточно велико.

С большими предосторожностями можно получить ламинарный поток в очень узкой трубке при числах Рейнольдса до 40 000, несмотря на то, что при нормальных условиях критическое значение числа Рейнольдса для трубы составляет 2000.

Возмущение, наложенное на первичное движение, вызывает, как мы видели, значительное местное увеличение сил конвективной инерции. Трение будет стремиться погасить это возмущение, если не происходит передача энергии (или передача количества движения силами конвективной инерции) от первичного движения к возмущению. Поэтому в турбулентном движении скорость образования турбулентности зависит от скорости, с которой энергия отбирается от первичного потока с тем, чтобы в конечном счете оказаться полностью диссипированной трением.

Очень интересный вопрос о возникновении турбулентности подробно исследоваться здесь не будет. Мы просто подчеркнем, что уравнения Навье — Стокса дают неустойчивые решения, которые описывают точные движения только при небольших числах Рейнольдса, т. е. когда силы трения велики по сравнению с градиентом кинетической энергии.

Указанные соображения ведут к дальнейшему рассмотрению турбулентности в главах VII и VIII.

УПРАЖНЕНИЯ

VI-1. Рассмотрите последовательно круглую трубку и квадратную трубку, вращающиеся вокруг своих осей с угловой скоростью, внезапно изменяющейся от $\omega = 0$ в момент $t = 0$ до $\omega = \omega_1$ в момент $t = \varepsilon$ (ω_1 мала) и до $\omega = \omega_2$ в момент $t = t_1$ (ω_2 велика). Эти две трубки соответственно наполовину и полностью наполнены водой.

Опишите качественно движение: 1) идеальной жидкости, 2) вязкой жидкости.

VI-2. Покажите, что распределение скорости в потоке между двумя параллельными пластинами, одна из которых закреплена, а другая движется со скоростью U , описывается выражением

$$u = \frac{Uy}{e}$$

где e — расстояние между двумя пластинами.

VI-3. Запишите уравнение Навье — Стокса для нестационарного потока между двумя параллельными пластинами, из которых одна закреплена, а другая движется со скоростью $u(t)$.

Затем напишите уравнение Навье — Стокса для двухмерного стационарного потока между двумя почти параллельными пластинами; одна из пластин закреплена, а другая движется с постоянной скоростью U . Прделайте упрощающие аппроксимации, которые по Вашему мнению, допустимы для анализа движения потока.

VI-4. Рассчитайте двухмерное распределение скорости $u(y)$ между двумя параллельными горизонтальными пластинами, между которыми имеются два слоя жидкости толщиной e_1 и e_2 . Слои соответственно обладают вязкостью μ_1 и μ_2 и плотностью ρ_1 и ρ_2 . Одна пластина закреплена, а верхняя движется с постоянной скоростью U .

О т в е т:

$$u(y) = U \left(1 + \frac{\mu_1 e_1}{\mu_2 e_2} \right)^{-1} \frac{y}{e_1}, \quad \text{при } y < e_1,$$

и

$$u(y) = U \left\{ 1 - \left[1 - \left(1 + \frac{\mu_1 e_2}{\mu_2 e_1} \right)^{-1} \right] \left[\frac{e_1 e_2 - y}{e_2} \right] \right\}, \quad \text{при } y > e_1.$$

VI-5. Рассмотрите двухмерный поток между двумя параллельными горизонтальными пластинами, расстояние между которыми равно $2h$.

1) Запишите уравнение неразрывности, уравнение Навье — Стокса и граничное условие. Пусть движение потока направлено вдоль оси OX , а ось OZ направлена перпендикулярно к пластине.

2) Пусть величина j характеризует потери напора, определяемые выражением

$$\frac{dp}{dx} = -\rho g j.$$

При этом условии рассчитайте распределение скорости $u = f(j, z)$ путем двух последовательных интегрирований, а также полный расход на единицу ширины: $Q = f(j, h)$.

3) Рассчитайте среднюю скорость $\bar{u} = f(j, h)$ и выразите u как функцию от \bar{u} , z и e .

4) Рассчитайте величины d^2u/dz^2 и $dp/dx = f(\bar{u}, h)$.

5) Рассчитайте коэффициенты завихренности ξ , η , ζ как функции от j , z , h .

6) Рассчитайте потери энергии на единицу длины в направлении движения потока: $\rho g j Q = f(j, h)$ и величину j как функцию от Q и h .

7) Пусть между двумя пластинами создано препятствие. Покажите, что среднее движение является безвихревым относительно вертикальной оси OZ , т. е. $\partial \bar{u} / \partial y - \partial \bar{v} / \partial x = 0$ (это так называемая аналогия Хиль — Шоу). Выразите потенциал скорости в зависимости от p , h и μ .

О т в е т ы:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad v = w = 0, \quad u = 0, \quad \text{если } z = \pm h.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

$$2) \quad u = \frac{\rho g j}{2\mu} (h^2 - z^2); \quad Q = \frac{2\rho g j}{3\mu} h^3.$$

$$3) \quad \bar{u} = \frac{\rho g j h^2}{3\mu}; \quad \bar{u} = \frac{3u}{2h^2} (h^2 - z^2).$$

$$4) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{3u}{h^2}; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{3\mu u}{h^2}.$$

$$5) \quad \xi = 0; \quad \zeta = 0; \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\rho g j z}{2\mu}.$$

$$6) \quad \rho g j Q = \frac{2(\rho g)^2 j^2 h^3}{3\mu}; \quad j = \frac{3\mu}{2\rho g h^3}.$$

$$7) \quad w = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \nabla^2 u \cong \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \nabla^2 v \cong \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3\mu \bar{u}}{h^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3\mu \bar{v}}{h^2}$$

(здесь \bar{v} — осредненное значение v);

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Поскольку $\partial^2 p / (\partial x \partial y) \equiv \partial^2 p / (\partial y \partial x)$, то получаем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{h^2 p}{3\mu}.$$

VI-6. Рассчитайте отношение силы инерции к силам вязкости в случае ламинарного стационарного однородного потока. Обдумайте и обсудите утверждение, гласящее, что число Рейнольдса является важным безразмерным параметром, показывающим относительную роль силы инерции по сравнению с силой вязкости. Является ли определение числа Рейнольдса как отношения градиента кинетической энергии к силе вязкости более выразительным.

VI-7. Построены следующие безразмерные величины:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad t^* = \frac{t}{T}, \quad V^*(u^*, v^*, w^*) = \frac{V(u, v, w)}{U},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad F^* = \frac{F}{g},$$

где L , T и U — произвольные характерные длина, время и скорость, а F — сила тяжести. Покажите, что уравнения Навье — Стокса могут быть записаны в безразмерной форме следующим образом:

$$\left(\frac{L}{UT} \right) \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(p^* + \frac{1}{2} u^{*2} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \left(\frac{gL}{U^2} \right) F^* + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \nabla^2 u^*,$$

и два аналогичных уравнения для осей OY и OZ . Объясните физическое значение следующих параметров: UT/L — иногда называемый приведенной частотой, $U^2/(gL)$ — число Фруда, UL/ν — число Рейнольдса.

VI-8. Покажите, что в потоке, в котором $v = w = 0$, а $u = f(y, z)$, выполняются соотношения $\rho \partial \eta / \partial t = \mu \nabla^2 \eta$, $\rho \partial \zeta / \partial t = \mu \nabla^2 \zeta$.

VI-9. Покажите, что $\partial \xi / \partial x + \partial \eta / \partial y + \partial \zeta / \partial z = 0$.

VI-10. Покажите, что уравнение Навье — Стокса для оси OX может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\xi}{dt} - \mu \nabla^2 \xi = \rho \left[\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right],$$

а уравнения для двух других осей получаются из вышеприведенного путем круговой перестановки.

О т в е т:

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \mu \nabla^2 \eta = \rho \left[\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \right],$$

$$\rho \frac{d\zeta}{dt} - \mu \nabla^2 \zeta = \rho \left[\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right].$$

Глава VII

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. ОСРЕДНЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОСРЕДНЕННЫЕ СИЛЫ. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

VII-1. Определение среднего движения и средних сил

VII-1.1. Характеристики среднего движения в сравнении с фактическим движением. В предыдущих главах отдельные положения теории иногда иллюстрировались примерами, в которых движение явно должно было иметь турбулентный характер, хотя в теории рассматривалась только идеальная жидкость или вязкий ламинарный поток. В турбулентном движении скорость и давление изменяются беспорядочным образом. В действительности в указанных примерах подразумевалось, хотя и не подчеркивалось, что рассматриваются только средние величины скорости и давления.

В самом деле, турбулентное движение является всегда:

а) нестационарным, поскольку в данной точке скорость изменяется чрезвычайно хаотическим образом;

б) неоднородным, поскольку скорость изменяется от точки к точке в данный момент;

в) вихревым, поскольку силы трения, пропорциональные члену $\nabla^2 V$, играют существенную роль.

Эти характеристики справедливы, если речь идет о фактическом движении. Однако турбулентное движение на практике часто может рассматриваться как стационарное, однородное (в трубе) или безвихревое (над водосливом). Это возможно потому, что стационарным, однородным и безвихревым является среднее движение, а рассмотренные выше примеры относились к средним величинам.

Теперь мы должны обосновать указанный метод рассмотрения реального движения и определить различие между движением идеальной жидкости или вязким потоком и средним турбулентным движением. В этом состоит цель настоящей главы.

VII-1.2. Применимость уравнений Навье — Стокса в случае турбулентного движения. Равенство между силами инерции и приложенными силами соблюдается, разумеется, для элементарной частицы жидкости и в том случае, когда движение является турбулентным. Поэтому основные уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности теоретически пригодны для изучения турбулентного движения.

Однако получить точное решение для такого сложного движения невозможно. Мы видели, что решение иногда можно получить для ламинарного потока при простых граничных условиях. С помощью теории можно также определить, будет ли малое возмущение возрастать или гаситься трением. Однако фактически возможности теории в этих случаях ограничены.

С другой стороны, в инженерной практике вовсе не обязательно точно знать тонкую структуру потока. Требуется изучить лишь средние величины, а также общие и статистические эффекты турбулентных флуктуаций. Это возможно благодаря случайной природе этих турбулентных флуктуаций.

Таким образом, представляющееся сложным и беспорядочным движение анализируют, рассматривая только среднее движение. Хотя в некоторых частных проблемах занимаются непосредственно изучением флуктуаций, обычно оказывается достаточным учитывать только статистические величины.

VII-1.3. Определения средних величин в турбулентном потоке. В турбулентном потоке, как и в случае вязкого потока, скорость и давление должны быть найдены как функции от пространственных координат и времени.

Мгновенная скорость V в фиксированной точке представляет собой векторную сумму осредненной по времени скорости \bar{V} (которая рассматривается как соответствующая основному первичному движению) и флуктуационной скорости V' , которая быстро изменяется во времени как по величине, так и по направлению. Это можно выразить соотношением $V = \bar{V} + V'$, где, по определению,

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt \quad \text{и} \quad \bar{V}' = \frac{1}{T} \int_0^T V' dt = 0,$$

T — временной интервал, который будет определен в следующем разделе. Мгновенные компоненты скорости определяются следующим образом:

Действительная скорость	Средняя скорость	Флуктуация скорости
u	$= \bar{u}$	$+ u'$
v	$= \bar{v}$	$+ v'$
w	$= \bar{w}$	$+ w'$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt, \quad \bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0.$$

Аналогично определяются компоненты \bar{v} и \bar{w} . По определению, $\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0$. Мгновенное давление p есть также скалярная сумма среднего давления \bar{p} и флуктуационного члена p'

$$p = \bar{p} + p',$$

где $\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt, \quad \bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0.$

Таким образом, турбулентное движение можно рассматривать как суперпозицию среднего движения и флуктуирующего беспорядочного

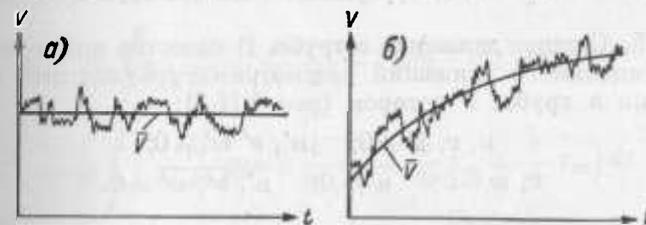


Рис. VII-1. Стационарность турбулентного потока определяется только его средней скоростью. a — турбулентный стационарный поток ($\bar{V} = \text{const}$); b — турбулентный нестационарный поток ($\bar{V} = f(t)$).

движения, случайного по своей природе и подчиняющегося статистическим законам.

VII-1.4. Стационарный и нестационарный средний турбулентный поток. Следует отметить, что средняя величина определяется для временного интервала T , который велик по сравнению с временным масштабом турбулентных флуктуаций, но мал по сравнению с временным масштабом среднего движения.

Если, например, мы рассматриваем колебания воды в уравнительном бассейне, где движение является турбулентным, то мгновенная скорость в фиксированной точке быстро изменяется за счет турбулентности.

Осредненная за относительно короткий интервал времени скорость также изменяется во времени, но ее изменение будет более медленным. Реальное движение всегда является нестационарным из-за турбулентности, и в данном случае среднее движение также нестационарно (рис. VII-1).

В дальнейшем мы будем называть движение нестационарным только, если средняя величина скорости, определенная за относительно короткие интервалы времени T , изменяется в течение более долгого интервала времени. Этот короткий интервал, служащий для

определены: среднего движения, связан с частотой турбулентных флуктуаций. Указать характерный порядок величины T довольно трудно, так как он меняется в зависимости от рассматриваемого явления. Например, в метеорологии, где занимаются атмосферными движениями, этот интервал велик, а в аэродинамике, где изучаются турбулентные эффекты в пограничном слое вдоль крыла, он мал.

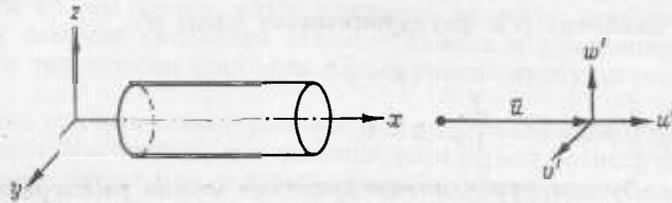


Рис. VII-2. Турбулентный поток в трубе.

VII-1.5. Среднее движение в трубе. В качестве примера среднего и флуктуационного движений рассмотрим турбулентный «однородный» поток в трубе, в котором (рис. VII-2):

$$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \neq 0; \quad \bar{u}', \bar{v}', \bar{w}' = 0;$$

С другой стороны, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$, поскольку движение однородно вдоль оси OX . Однако $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \neq 0$, поскольку распределение скорости поперек трубы неоднородно.

Все производные от \bar{v} и \bar{w} равны нулю, поскольку сами величины \bar{v} и \bar{w} постоянны и равны нулю. Все производные от u', v' и w' отличны от нуля:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial v'}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w'}{\partial x}, \dots \neq 0,$$

но средние значения этих производных всегда равны нулю. Например, поскольку $\bar{u}' = (1/T) \int_0^T u' dt = 0$ по определению, то

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0.$$

VII-1.6. Средние силы. Поскольку фактическая величина сил инерции всегда равна сумме фактических величин приложенных сил в любом движении, как ламинарном, так и турбулентном, то средняя по времени величина сил инерции равна средней по времени величине приложенных сил. Это можно выразить следующим образом. Поскольку

$$\text{Сила локальной инерции} + \text{сила конвективной инерции} + \text{сила давления} + \text{сила тяжести} + \text{сила трения} = 0,$$

то всегда является справедливым следующее соотношение:

$$\text{Средняя по времени величина суммы} \left[\begin{array}{l} \text{сила локальной инерции} + \text{сила конвективной инерции} + \text{сила давления} + \text{сила тяжести} + \text{сила трения} \end{array} \right] = 0.$$

Математически это соотношение для оси OX имеет вид (см. VI-1.2.1)

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \right) dt,$$

или, используя обозначения σ и τ и коэффициенты вихря η, ζ и ξ (см. VI-1.2.3 и VI-1.3), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} + 2(w\eta - v\zeta) \right) dt = \\ & = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{\partial}{\partial x} \rho g z + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) dt \end{aligned}$$

и подобные же уравнения для осей OY и OZ . Наконец, используя векторные обозначения, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{V^2}{2} + (\mathbf{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \right) dt = \\ & = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\mathbf{grad} (p + \rho g z) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \right) dt. \end{aligned}$$

Теперь каждую из этих средних сил надо выразить как функцию от средних величин и флуктуационных величин скорости и давления. Для этой цели разделим все силы на три группы:

- 1) постоянные силы — сила тяжести;
- 2) линейные силы — сила давления, линейная функция от p ; сила локальной инерции, линейная функция от \mathbf{V} ; сила трения, линейная функция от \mathbf{V} ;
- 3) квадратичные силы — конвективная инерция, функция от квадрата скорости V^2 или от произведения двух компонент скорости: u^2, v^2, w^2, uv, vw .

VII-2. Вычисление осредненных сил

Средние силы вычисляются как функции средних величин скорости и давления. Эти вычисления даны здесь в деталях для лучшего понимания. Они основаны на том факте, что порядок

математических операций не оказывает влияния на окончательный результат. В частности, интегрирование по интервалу времени T и дифференцирование по времени и пространству можно менять местами.

VII-2.1. Постоянная сила. Сила тяжести зависит только от плотности элементарной частицы. Флуктуации давления слишком малы, чтобы ощутимо изменить эту плотность (даже в случае газа, где этой силой полностью пренебрегают). Таким образом, сила тяжести не зависит от типа движения и остается одинаковой и в ламинарном, и в турбулентном потоках.

Средняя величина силы тяжести равна самой постоянной силе. Математически это может быть выражено следующим образом:

$$\overline{\rho g} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho g dt = \rho g \frac{1}{T} \int_0^T dt = \rho g,$$

поскольку величина ρg во времени постоянна. Также имеем:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho g z}) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial z} (\rho g z) dt = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \rho g z dt = \frac{\partial}{\partial z} (\rho g z),$$

поскольку величина $\rho g z$ постоянна во времени.

Аналогично:

$$\overline{\mathbf{grad}(\rho g z)} = \mathbf{grad}(\rho g z).$$

Таким образом, сила тяжести математически выражается совершенно одинаково для ламинарного и турбулентного движений.

VII-2.2. Линейные силы. VII-2.2.1. Средняя сила локальной инерции. Средняя величина силы локальной инерции

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

может быть получена путем рассмотрения любой из ее компонент, например $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$. Средняя величина члена $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ за интервал времени T дается путем перестановки операций $\partial/\partial t$ и $(1/T) \int_0^T$, откуда получаем

$$\overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho \frac{\partial u}{\partial t} dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T u dt$$

(надо иметь в виду, что символ $\partial/\partial t$ означает здесь $\partial/\partial T$, см. VII-1.4). Заменяя фактические значения u через сумму средней и флуктуационной величин ($u = \bar{u} + u'$), получаем:

$$\overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt - \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt,$$

а подставляя вместо \bar{u} и u' их выражения

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt \quad \text{и} \quad \bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0,$$

находим, что

$$\overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (\text{или} \quad \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial T}).$$

Таким образом, средняя по времени величина силы локальной инерции равна силе инерции, обусловленной изменением только средней скорости. Сила локальной инерции в ламинарном и турбулентном потоках математически выражается функциями одинакового вида:

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \end{cases}$$

Однако в ламинарном движении величины \bar{V} (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w}) в точности равны фактическим величинам V (u , v , w).

VII-2.2.2. Средняя сила давления. Аналогичным образом осреднение сил давления

$$-\mathbf{grad} p, \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

дает для компоненты $-\partial p/\partial x$

$$\begin{aligned} -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} &= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x} dt = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') dt = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} dt - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p' dt. \end{aligned}$$

Поскольку $(1/T) \int_0^T \bar{p} dt = \bar{p}$ и $(1/T) \int_0^T p' dt = 0$,

то

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

и аналогично

$$-\overline{\text{grad } p} = -\frac{1}{T} \int_0^T \text{grad } p dt = -\text{grad } \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\text{grad } \bar{p},$$

т. е.

$$-\overline{\text{grad } p} = -\text{grad } \bar{p}.$$

Средняя сила давления равна силе, обусловленной только средним давлением, и математически выражается таким же образом, как и фактическая сила давления.

VII-2.2.3. Средняя сила вязкости. Сила вязкости

$$\mu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mu \nabla^2 u = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \mu \nabla^2 v = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \mu \nabla^2 w = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{cases}$$

имеет среднюю величину, которую можно вычислить на примере одного из членов второго порядка, скажем, члена $\mu \partial^2 u / \partial x^2$.

Производя осреднение этого члена, последовательно получаем:

$$\overline{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2},$$

или в более общей форме

$$\overline{\mu \nabla^2 \mathbf{V}} = \mu \nabla^2 \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{V} dt = \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}}.$$

Средняя сила вязкости равна силе вязкости, обусловленной только средней скоростью, и математически выражается так же, как и аналогичная фактическая сила.

VII-2.2.4. Заключительные замечания относительно линейных сил. Все линейные силы, участвующие в среднем движении, математически записываются в одинаковом виде как для среднего турбулентного потока, так и для фактического движения, турбулентного либо ламинарного. В ламинарном вязком движении средние величины $\bar{\mathbf{V}}$ и \bar{p} в точности равны фактическим мгновенным величинам \mathbf{V} и p .

VII-2.3. Квадратичные силы. Силы конвективной инерции имеют вид:

$$\rho \left(\text{grad } \frac{V^2}{2} + (\text{rot } \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \right), \quad \begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{cases}$$

или $\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ или

Все эти члены пропорциональны V^2 или произведению компонент V : $u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw$. Тензорные обозначения позволяют изобразить все члены в простом и общем виде: $\rho u_j \partial u_i / \partial x_j$. Однако для большей ясности полезнее будет рассмотреть один из этих членов, скажем, $\rho u \partial u / \partial x$, и обобщить полученный результат.

Рассмотрим, например, компоненту $u = \bar{u} + u'$. Возводя u в квадрат, получим $u^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2$, и, осредняя u^2 , получаем

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2) dt.$$

Три слагаемых правой части равны:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}^2 dt = \bar{u}^2 \quad (\text{поскольку } \bar{u} \text{ постоянна в пределах интервала } T),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2\bar{u}u' dt = 2\bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0 \quad \left(\text{поскольку } \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0 \right),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt = \overline{u'^2} \quad (u' \text{ может быть положительной или отрицательной, но } u'^2 \text{ всегда положительна и ее средняя величина отлична от нуля}).$$

Аналогичным образом рассмотрим произведение

$$uv = (\bar{u} + u')(\bar{v} + v') = \bar{u}\bar{v} + u'\bar{v} + \bar{u}v' + u'v'.$$

Средняя величина этого произведения будет

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'},$$

поскольку средние величины $\bar{u}v'$ и $u'\bar{v}$ равны нулю.

Теперь, рассматривая среднюю величину любого члена конвективной инерции, например $\rho u \partial u / \partial x$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') dt = \\ &= \frac{\rho}{T} \int_0^T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) dt \end{aligned}$$

и, рассматривая каждый член в отдельности, будем иметь:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dt = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left(\text{поскольку } \bar{u} \text{ и } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \text{ постоянны во времени} \right),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \bar{u} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T u' dt = 0 \left(\text{поскольку } \int_0^T u' dt = 0 \right),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \int_0^T u' dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T \frac{u'^2}{2} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overline{u'^2}}{2} = \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \neq 0.$$

Подставляя эти величины в полученное выше выражение, получаем

$$\overline{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} = \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \right).$$

Аналогично находим, что

$$\overline{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}} = \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x}} \right) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, средняя по времени величина силы конвективной инерции равна сумме конвективной инерции, обусловленной средней скоростью, и средней конвективной инерции, обусловленной турбулентными флуктуациями.

Если рассматривается одна только средняя величина скорости, то члены конвективной инерции имеют ту же математическую форму, что и в ламинарном движении.

VII-3. Уравнение неразрывности

В простом случае несжимаемой жидкости уравнение неразрывности записывается в виде (см. III-2.2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Если выразить фактические компоненты скорости через средние величины и турбулентные флуктуации, то это соотношение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} + w') = 0,$$

или

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Процесс осреднения, допустим, величины $\partial \bar{u} / \partial x$ дает

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} dt = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

а осреднение величины $\partial u' / \partial x$ дает

$$\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0.$$

Поэтому уравнение неразрывности для среднего движения будет

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, $\partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y + \partial w' / \partial z = 0$.

Таким образом, математическая запись уравнения неразрывности для среднего движения имеет тот же вид, что и для фактического.

VII-4. Основные характеристики осредненного движения турбулентного потока

Если рассматриваются только средняя скорость и среднее давление, то основные уравнения движения и неразрывности имеют точно ту же математическую форму, что и соответствующие уравнения для фактического движения. Однако существуют и другие силы, которые должны быть добавлены. Эти новые силы вызваны конвективной инерцией турбулентных флуктуаций. Если этими «новыми» силами можно пренебречь или до тех пор, пока нас интересуют только силы, обусловленные средней скоростью и средним давлением, решения проблем турбулентного движения имеют ту же математическую форму, что и решения уравнений Навье — Стокса. Например, среднее движение, являющееся стационарным и безвихревым и в котором силами вязкости $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ можно пренебречь, удовлетворяет хорошо известному уравнению Бернулли:

$$\rho \frac{\bar{V}^2}{2} + \bar{p} + \rho g z = \text{const.}$$

Однако скорость \bar{V} и давление \bar{p} представляют собой осредненные величины. Допущения, на которых основано применение этого уравнения, относятся именно к среднему движению, т. е. именно среднее движение должно быть стационарным, безвихревым и лишеным вязкого трения (несмотря на тот факт, что фактическое движение на самом деле всегда нестационарное, вихревое и связано с трением).

Таким образом, подтверждается законность использования примеров с турбулентным движением, как это делалось в предыдущих главах, для иллюстрации различных соображений о безвихревом движении.

На практике флуктуации давления p' очень малы по сравнению с фактическим давлением p , так что $p \approx \bar{p}$. С другой стороны, силы вязкости $\mu \nabla^2 \bar{V}$, обусловленные средним движением, в общем малы по сравнению с другими силами, в частности с силами конвективной инерции, вызванными турбулентными флуктуациями. Вязкими силами часто можно пренебречь, за исключением случая ламинарного пограничного слоя.

Сначала надо рассмотреть влияние флуктуационных конвективных сил на среднее движение. Затем требуется установить соотношение между величинами средней скорости и флуктуационной скорости. Поскольку добавляются новые неизвестные V' (u' , v' , w'), то необходимы новые уравнения, чтобы эту гидравлическую проблему можно было решить. Эти вопросы будут рассмотрены ниже.

VII-5. Уравнения Рейнольдса

Теперь мы приравняем друг к другу приложенные силы и силы инерции в турбулентном потоке в форме так называемых уравнений Рейнольдса.

VII-5.1. Сущность уравнений Рейнольдса. Уравнения Рейнольдса получаются, если выразить каждую силу в уравнениях Навье — Стокса в виде функции от средних величин \bar{V} (\bar{u} , \bar{v} , \bar{w}) и флуктуационных величин V' (u' , v' , w') и произвести осреднение. Уравнение Рейнольдса представляет собой выражение ньютоновского уравнения движения для случая, когда движение турбулентно.

Поскольку соответствующие выражения для каждой из средних сил были найдены в предыдущих разделах, то мы можем прямо получить уравнения Рейнольдса, приравняв сумму найденных выражений нулю. Напомним, что каждая сила имеет такую же математическую форму, как в уравнении Навье — Стокса, выраженном через функции средних величин скорости и давления. Однако возникают дополнительные силы конвективной инерции, обусловленные флуктуационными членами. Например, средняя величина квадратичного члена инерции $\overline{\rho u \frac{du}{dx}}$ будет $\overline{\rho u \frac{du}{dx}} = \overline{\rho u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \overline{\rho u' \frac{du'}{dx}}$. Поэтому уравнение движения, справедливое для осредненного движения, можно прямо записать в виде

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{\text{Локальная инерция}} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\text{Конвективная инерция, обусловленная средними скоростями}} + \underbrace{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}}_{\text{Конвективная инерция, обусловленная флуктуационными скоростями}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g z) + \mu \nabla^2 \bar{u}.$$

Давле-ние
Тя-жесть
Сила вязкости

Поскольку для осей OY и OZ все выкладки совершенно идентичны, ограничимся рассмотрением только уравнения движения для оси OX .

VII-5.2. Напряжения Рейнольдса. Пока рассматривается только среднее движение, силы конвективной инерции, обусловленные флуктуационными компонентами скорости, могут рассматриваться как внешние силы, аналогичные силам давления или вязкости. Чтобы перейти к такому методу исследования турбулентных эффектов, необходимо преобразовать полученное выше уравнение.

Рассматривая конвективную инерцию, обусловленную флуктуационными компонентами скорости, в виде, данном в VII-5.1,

$$\rho \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right)$$

и добавляя к ней равную нулю величину

$$-\rho u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right),$$

полученную из уравнения неразрывности (см. VII-3), получаем следующее выражение, в котором члены попарно сгруппированы:

$$\rho \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} \right),$$

или

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right).$$

Теперь, подставляя эти члены (и аналогичные члены, полученные для направлений OY и OZ) в общие уравнения движения, получаем так называемые уравнения Рейнольдса:

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{\text{Локальная инерция}} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\text{Конвективная инерция}} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g z) + \mu \nabla^2 \bar{u} -$$

Силы давления и тяжести
Силы вязкости

$$- \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right),$$

Силы, обусловленные турбулентными флуктуациями

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}_{\text{Локальная инерция}} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}_{\text{Конвективная инерция}} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + \rho g z) + \mu \nabla^2 \bar{v} -$$

Силы давления и тяжести
Силы вязкости

$$- \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right),$$

Силы, обусловленные турбулентными флуктуациями

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}}_{\text{Локальная инерция}} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}}_{\text{Конвективная инерция}} \right) = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + \rho g z)}_{\text{Силы давления и тяжести}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \bar{w}}_{\text{Силы вязкости}} - \underbrace{\rho \left(\frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right)}_{\text{Силы, обусловленные турбулентными флуктуациями}}$$

Отметим еще раз, что эти уравнения Рейнольдса очень похожи на уравнения Навье — Стокса. Различие заключается только в наличии сил конвективной инерции, обусловленных турбулентными флуктуациями, и тем, что остальные силы представлены как функции от средних величин скорости и давления.

Силы, обусловленные турбулентными флуктуациями, так называемые «напряжения Рейнольдса», могут быть определены как тензор второго ранга, где нормальные напряжения выражаются членами $\overline{\rho u_i'^2}$, а касательные напряжения — членами $\overline{\rho u_i' u_j'}$, причем $i \neq j$.

VII-5.3. Величина компонент Ламе в турбулентном движении. При исследовании физических эффектов сил, обусловленных турбулентными флуктуациями, используются приведенные в VI-1.3 выражения для приложенных сил, не зависящие от физической природы последних. Напомним, что, например, приложенные силы, действующие вдоль оси OX , выражаются в виде X для массовых сил и в виде компонент σ и τ тензора второго ранга для внешних сил, т. е. имеют вид

$$X + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

Средняя величина флуктуационных членов (например σ'_{xx}) равна нулю по определению:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \sigma'_{xx} dt = 0.$$

Поэтому процедура осреднения этих членов (которые либо постоянны, как X , либо линейны) дает для приложенных сил

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left[X + \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) \right] dt = \\ = X + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\sigma_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\tau_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\tau_{xz}} \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение Рейнольдса вместо действительных членов давления, тяжести и вязкости, находим

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = X + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\sigma_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\tau_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\tau_{xz}} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}' v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}' w'}{\partial z} \right),$$

что можно также записать в виде

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = X + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\sigma_{xx}} - \overline{\rho u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\tau_{xy}} - \overline{\rho u' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\tau_{xz}} - \overline{\rho u' w'}).$$

Из этого уравнения видно, что флуктуационные члены можно рассматривать как внешние силы, которые добавлены к другим силам, определяемым нормальными напряжениями $\overline{\sigma}$ и касательными напряжениями $\overline{\tau}$. Таким образом, новые внешние силы теперь будут: нормальная сила — $[\sigma_{xx}] = \overline{\sigma_{xx}} - \overline{\rho u'^2} = -\overline{p} + 2\mu \partial \bar{u} / \partial x - \overline{\rho u'^2}$, касательное напряжение — $[\tau_{xy}] = \overline{\tau_{xy}} - \overline{\rho u' v'} = +\mu (\partial \bar{u} / \partial y + \partial \bar{v} / \partial x) - \overline{\rho u' v'}$ и т. д. Эти новые полные внешние силы также могут быть определены тензором второго ранга, подобным тензору, определенному в V-5.3.

VII-5.4. Обычная аппроксимация. На практике в турбулентном потоке силы вязкости, обусловленные средней скоростью, очень часто пренебрежимо малы по сравнению с другими силами, в частности по сравнению с касательными напряжениями, обусловленными флуктуациями скорости: $\overline{\rho u' v'}$, $\overline{\rho u' w'}$ и $\overline{\rho v' w'}$. Однако в явлениях, в которых требуется анализировать эффекты пограничного ламинарного слоя, рассматриваются как вязкие, так и турбулентные касательные напряжения.

VII-5.5. Коэффициенты корреляции и изотропная турбулентность. Согласно определению, при изотропной турбулентности средняя величина любой функции от компонент флуктуационной скорости и их пространственных производных остается неизменной при перемене осей координат. В частности,

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}; \quad \overline{u' v'} = \overline{u' w'} = \overline{v' w'}.$$

Очевидно, что изотропность сильно упрощает все выкладки и вычисления. Однако это допущение обычно справедливо лишь локально. Из-за влияния границ турбулентность не является изотропной и произведения $\overline{u' v'}$, $\overline{u' w'}$ и $\overline{v' w'}$ могут различаться между собой. Между величинами u' и v' , u' и w' , v' и w' существует корреляция, определяемая коэффициентами

$$\frac{\overline{u' v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}}, \quad \frac{\overline{u' w'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{w'^2}}}, \quad \frac{\overline{v' w'}}{\sqrt{\overline{v'^2} \overline{w'^2}}}.$$

В случае изотропной турбулентности эти коэффициенты равны нулю. Поскольку силы конвективной инерции, обусловленные

флуктуациями скорости, являются функциями от u'^2 , v'^2 , w'^2 , $u'v'$, $u'w'$, $v'w'$, то они могут быть выражены непосредственно как функции коэффициентов корреляции, которые безразмерны.

УПРАЖНЕНИЯ

VII-1. Выразите $\overline{\text{grad}(V^2/2)}$ и $\overline{(\text{rot } V) \times V}$ через величины u , u' , v , v' , w , w' в турбулентном потоке.

VII-2. Выразите осредненное отношение деформации растяжения к деформации сдвига с помощью средней и флуктуационной компонент скорости в турбулентном потоке.

VII-3. Проведите произвольную линию $u(t)$ на миллиметровке и найдите \bar{u} и $[u'^2]^{1/2}$. На том же графике проведите другую произвольную линию $v(t)$ и найдите \bar{v} и $[v'^2]^{1/2}$. Определите величину коэффициента корреляции $\overline{u'v'}/[u'^2v'^2]^{1/2}$.

VII-4. Покажите, что уравнения Рейнольдса можно также записать в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \overline{u'v'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \overline{u'w'} \right]$$

и двух других уравнений, которые требуется вывести. Укажите преимущества такой формы записи уравнений Рейнольдса.

VII-5. Запишите уравнение Рейнольдса для случая среднего двухмерного движения. Запишите уравнение Рейнольдса в случае изотропной турбулентности ($\overline{u'^2} = \overline{v'^2}$, $\overline{u'v'} = 0$).

VII-6. Запишите уравнение Рейнольдса для прямой трубы кругового сечения и покажите, что давление на оси трубы слабее, чем у стенки.

VII-7. Найдите выражение для диссипативной функции, обусловленной турбулентной флуктуацией, в виде функции только от du'/dy в случае изотропной турбулентности.

Глава VIII

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ. СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ

VIII-1. Некоторые физические эффекты турбулентных флуктуаций

Следующие ниже рассуждения носят чисто качественный характер. Некоторые из них будут количественно проанализированы в дальнейших разделах.

VIII-1.1. **Распределение скорости.** Распределение скорости зависит от касательных напряжений, следовательно, оно зависит от вязких сил и турбулентных флуктуаций, т. е. от членов $\rho u'v'$, $\rho u'w'$, $\rho v'w'$.

Эффекты сил вязкости без учета турбулентных напряжений были уже рассмотрены в одном частном случае (см. VI-2.1.2). Полу-

ченное распределение скорости в случае ламинарного потока на наклонной плоскости было параболическим.

Влияние турбулентных флуктуаций на распределение скорости можно качественно рассмотреть с помощью следующей механической аналогии.

VIII-1.1.1. Аналогия с элементарной механикой. Рассмотрим два военных корабля, движущихся в одинаковом направлении с различными скоростями V_1 и V_2 , причем $V_1 > V_2$. Если с корабля 1 выпущено в другой корабль ядро массы M , летящее со скоростью V' относительно

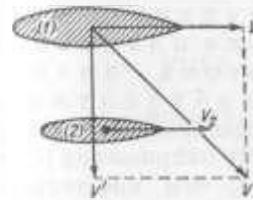


Рис. VIII-1. Обмен импульсами между двумя военными кораблями.

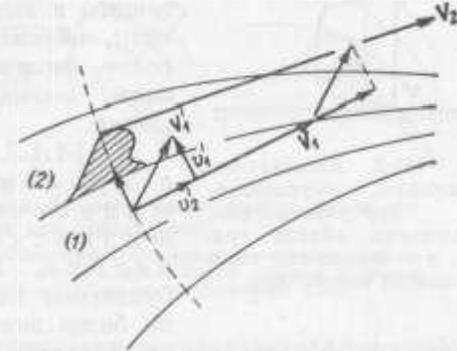


Рис. VIII-2. Обмен импульсами между двумя слоями жидкости при турбулентности.

первого корабля, то абсолютная скорость ядра будет равна $V = V_1 + V'$. За счет компоненты V' второму кораблю при попадании в него ядра передается определенное количество движения, а поскольку $V_1 > V_2$, то это количество движения ускоряет движение корабля 2 (рис. VIII-1).

Аналогично, ядро, выпущенное с корабля 2 в корабль 1, снижает скорость корабля 1. Одним словом, за счет обмена количеством движения скорости кораблей имеют тенденцию к выравниванию.

«Касательное напряжение» между двумя кораблями, которое является реальной силой в этом частном случае, равно количеству движения, переданному за единицу времени: $F = d(MV)/dT$, т. е. $\tau = MV'(V_1 - V_2)$, где M — масса ядер, выпускаемых за 1 с. Это выражение подобно члену $\rho u'v'$, где ρ стоит вместо M , v' — вместо V' и u' — вместо $(V_1 - V_2)$.

VIII-1.1.2. Влияние касательных напряжений на распределение скорости. Рассмотрим два слоя жидкости, определяемых картиной среднего движения, т. е. ограниченных линиями тока, касательными к вектору «средней скорости» (рис. VIII-2). Пусть \bar{V}_1 и \bar{V}_2 — средние скорости этих двух слоев в данном поперечном сечении. Мгновенная скорость V_1 является суммой средней скорости \bar{V}_1 и флуктуации V'_1 , т. е. $V_1 = \bar{V}_1 + V'_1$. Флуктуационная скорость V'_1 имеет две компоненты: v'_1 — нормальную к средней скорости и v'_2 — параллельную средней скорости.

За счет нормальной компоненты v_1 некоторое количество жидкости, движущейся со средней скоростью \bar{V}_1 , проникает из слоя 1 в слой 2, и, поскольку скорость \bar{V}_1 меньше, чем средняя скорость второго слоя \bar{V}_2 , то проникшее количество жидкости тормозит слой 2. Аналогично, количество жидкости, проникающее за счет флуктуаций скорости из слоя 2 в слой 1, стремится ускорить слой 1. Короче говоря, за счет турбулентности средние скорости двух смежных слоев имеют тенденцию к выравниванию. Мы видим, что силы, обусловленные флуктуациями скорости, физически действуют как внешние силы, вызывающие касательные напряжения.

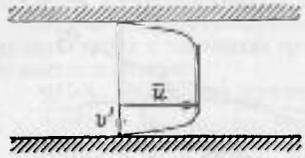


Рис. VIII-3. Касательные напряжения, обусловленные турбулентностью, уменьшаются вблизи границы, в то время как силы вязкости возрастают.

VIII-1.1.3. Сравнение друг с другом потока идеальной жидкости, потока вязкой жидкости и турбулентного потока. В турбулентном потоке турбулентные касательные напряжения обычно более значительны, чем касательные напряжения, обусловленные вязкостью. Поэтому среднее движение по характеру несколько приближается к движению идеальной жидкости.

Однако в пограничном слое члены вида $\overline{\rho u'v'}$ стремятся к нулю, поскольку компонента v' стремится к нулю у границы (рис. VIII-3).

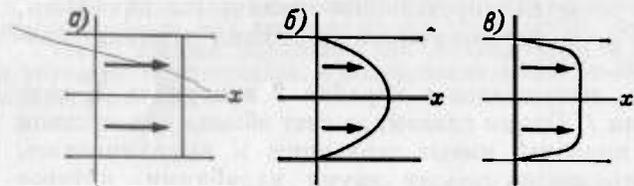


Рис. VIII-4. Распределение скорости в трубе. а — поток идеальной жидкости; б — ламинарный поток; в — турбулентный поток.

Вязкие же члены вида $\mu \partial^2 \bar{u} / \partial y^2$, наоборот, увеличиваются у границы и становятся особенно существенными, если граница гладкая.

Распределение средней скорости в трубе, показанное на рис. VIII-4, соответствует различным допущениям относительно касательных напряжений и иллюстрирует сказанное выше.

Количественное изучение распределения скорости в турбулентном потоке зависит от допущений относительно распределения величины касательного напряжения τ . В дальнейшем мы рассмотрим этот вопрос.

VIII-1.2. Безвихревое движение. Турбулентное движение является существенно вихревым, поскольку фактические силы трения играют важную роль. Однако вихревое движение является здесь неупорядоченным, как и турбулентные пульсации, и в случае изотропной турбулентности среднее движение является безвихревым.

Этот вывод можно получить, рассматривая распределение скорости. Мы видели, что в турбулентном потоке скорость распределена почти как в случае идеальной жидкости, за исключением зоны пограничного слоя. Там, где турбулентность не изотропна, поток

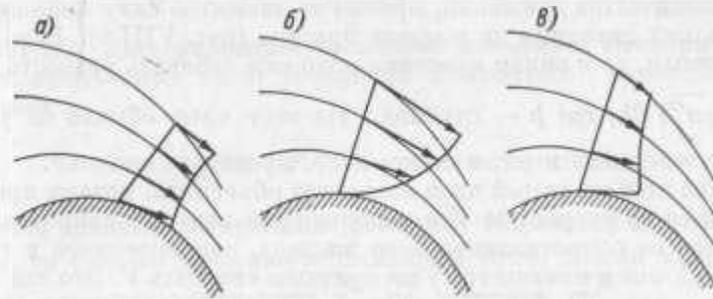


Рис. VIII-5. Турбулентный поток часто можно рассматривать как безвихревой.

а — идеальная жидкость; безвихревое движение; б — ламинарный поток; вихревое движение; в — турбулентный поток; среднее движение является безвихревым всюду, кроме пограничного слоя.

является вихревым, но за пределами пограничного слоя турбулентность почти изотропна в первом приближении. Поэтому, если пограничный слой относительно тонок по сравнению с основным потоком, то для изучения и расчета турбулентного потока с успехом можно

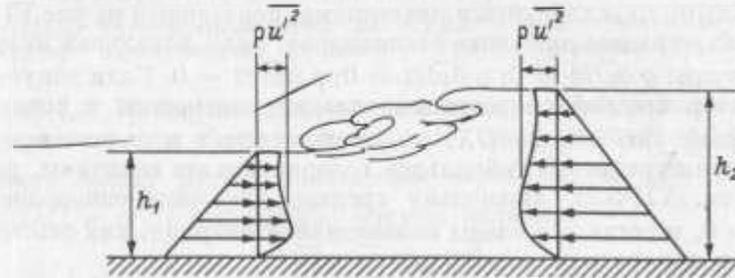


Рис. VIII-6. К силам давления необходимо добавить члены, обусловленные турбулентными флуктуациями.

применять ряд методов, разработанных для случая идеальной жидкости. Очевидно, что такое допущение особенно важно в инженерной практике, поскольку оно позволяет получать картину среднего потока в любом сужающемся (конвергентном) гидротехническом сооружении небольшой длины, например в галерее с раструбом или водосливе (см. рис. II-13 и II-14).

Высказанные соображения иллюстрируются также рис. VIII-5. VIII-1.3. Давление. Рассматривая нормальные силы $[\sigma] = -p + 2\mu \partial \bar{u} / \partial x - \rho u'^2$ и пренебрегая вязким членом $2\mu \partial \bar{u} / \partial x$, мы видим, что к силе давления надо добавить флуктуационную силу,

что приводит к увеличению осредненной величины давления. Некоторые примеры иллюстрируют этот факт.

Из элементарной гидравлики известно, что в основе теории гидравлического прыжка лежит равенство между внешней силой и изменением количества движения, причем за внешнюю силу принимается разность сил давления до и после прыжка (рис. VIII-6). Если быть более точным, то к силам давления надо еще добавить разность величин $\int_0^h (\rho \bar{u}'^2) dh$, где h — глубина. На этот член обычно не указывают в учебниках, и он, в самом деле, пренебрежимо мал.

Однако этот же самый член позволяет объяснить, почему при движении тела со скоростью V в неподвижной воде его сопротивление отличается от сопротивления того же тела, закрепленного в турбулентном потоке и имеющего ту же среднюю скорость V . Это так называемый парадокс Дюбуа. Указанное явление обусловлено разностью импульса $\rho \bar{u}'^2$, действующего на тело подобно силе давления. Эта добавочная сила возникает только за счет турбулентности в потоке, обтекающем закрепленное тело.

VIII-2. Турбулентный поток между двумя параллельными пластинами

VIII-2.1. Уравнения движения. Рассмотрим простой случай однородного стационарного турбулентного движения между двумя горизонтальными параллельными пластинами, показанный на рис. VIII-7. Поскольку среднее движение стационарно, силы локальной инерции равны нулю: $\rho \partial \bar{u} / \partial t = 0$; $\rho \partial \bar{v} / \partial t = 0$; $\rho \partial \bar{w} / \partial t = 0$. Если допустить, что вектор средней скорости параллелен плоскостям и совпадает по направлению с осью Ox , то компоненты \bar{v} и \bar{w} равны нулю, и все члены уравнений Рейнольдса, содержащие эти величины, равны нулю (см. VII-5.2). Поскольку среднее движение однородно, то $\partial \bar{u} / \partial x = 0$, и тогда все члены конвективной инерции, как это всегда бывает в однородном потоке, равны нулю.

Переходя к флуктуационным членам, мы видим, что изменения вдоль оси Ox величин \bar{u}'^2 , \bar{v}'^2 , \bar{w}'^2 , $\bar{u}'v'$, $\bar{u}'w'$, $\bar{v}'w'$ равны нулю, поскольку движение однородно, а турбулентность в рассматриваемой области является полностью развитой. С другой стороны, изменения этих величин по Y равны нулю, поскольку обе пластины предполагаются бесконечными, а движение — двухмерным.

Таким образом, уравнения Рейнольдса сводятся к:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z},$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z} - \rho \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z},$$

где $\bar{p}^* = \bar{p} + \rho gz$, в то время как для ламинарного потока между двумя параллельными пластинами уравнения Навье — Стокса имели бы вид:

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 = -\frac{\partial p^*}{\partial z}.$$

VIII-2.2. Интегрирование уравнений движения. Интегрируя второе из полученных выше уравнений Рейнольдса, последовательно получаем:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}^* + \rho \bar{w}'^2), \quad \bar{p}^* + \rho \bar{w}'^2 = \text{const.}$$

Пусть давление на границах равно \bar{p}_0^* . Поскольку $w' = 0$ на границах, то среднее давление \bar{p}^* в каждой точке потока меньше, чем среднее давление на границе \bar{p}_0^* , на величину $\rho \bar{w}'^2$.

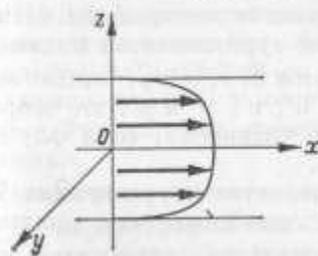


Рис. VIII-7. Турбулентный поток между двумя параллельными линиями.

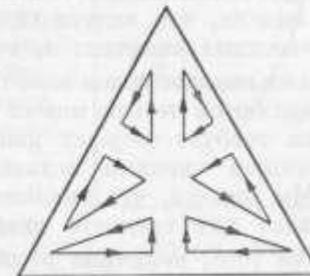


Рис. VIII-8. Вторичные течения в треугольной трубе.

VIII-2.3. Изменение среднего давления в турбулентном потоке. Экспериментально было найдено, что если обозначить среднюю скорость между двумя пластинами через \bar{U}_0 , то $\bar{u}'^2 / \bar{U}_0^2 < 0,01$, а \bar{v}'^2 / \bar{U}_0^2 и $\bar{w}'^2 / \bar{U}_0^2 < 0,0025$. Отсюда величина

$$\frac{\bar{p}_0^* - \bar{p}^*}{\frac{\rho}{2} \bar{U}_0^2} = 2 \frac{\bar{w}'^2}{\bar{U}_0^2}$$

всегда меньше 0,0050, и ею можно пренебречь. Распределение давления в турбулентном однородном потоке является гидростатическим (по крайней мере, с точностью до 0,5%).

VIII-2.4. Вторичные течения. Изменения давления, обусловленные флуктуационными членами, приводят к возникновению вторичных течений в прямолинейных каналах и трубах некругового поперечного сечения. Вторичные течения имеют место, когда в потоке существуют несимметричные эффекты турбулентных касательных напряжений, т. е. всякий раз, когда граница не является круговой.

Эти вторичные течения направлены из зон с высокими значениями касательных напряжений в зоны их пониженных значений, как показано на рис. VIII-8. Они стремятся выровнять касательные

напряжения на границе. Таким образом, эти течения являются вторичными лишь по названию: они частично оправдывают использование инженерами такого эмпирического понятия, как гидравлический радиус. Напомним, что определение гидравлического радиуса основано на допущении, что касательное напряжение на границе является постоянным. Надо хорошо представлять себе пределы применимости понятия гидравлического радиуса. Изменение картины вторичных течений в потоке оказывает влияние на величину потерь напора, причем это влияние не является пренебрежимо малым. Однако в гидравлике этим влиянием пренебрегают, так как оно еще плохо изучено.

VIII-3. Современные теории турбулентности

VIII-3.1. Неизвестные величины в турбулентном потоке. В главе I мы видели, что задачи гидравлики состоят в нахождении четырех неизвестных величин: u , v , w и p . Для турбулентного потока четырьмя неизвестными величинами являются \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и \bar{p} . Однако здесь добавляются четыре новых неизвестных u' , v' , w' и p' , что теоретически требует четырех дополнительных уравнений, если флуктуационными членами нельзя пренебречь.

Мы видели, что величина p' не появляется в уравнениях Рейнольдса для среднего движения из-за линейности сил давления. Кроме того, величина p' обычно очень мала по сравнению с \bar{p} ; ее следует учитывать только в некоторых очень специальных проблемах, которые пока еще плохо изучены.

Между флуктуационными величинами u' , v' , w' (точнее говоря, между функциями от этих величин $\overline{u'v'}$, $\overline{v'w'}$, $\overline{u'w'}$) и средними величинами \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} установлены определенные соотношения. Таким образом, флуктуационные члены выражаются через средние величины.

Более современные методы используют вероятностные расчеты и случайные функции, поскольку турбулентные флуктуации являются случайными по природе. Хотя в статистической теории турбулентности достигнут существенный прогресс, хорошо изученными являются лишь вопросы, связанные с изотропной и однородной турбулентностью. Однако изотропная турбулентность представляет собой идеализированный и никогда не встречающийся в природе случай, поскольку обусловлена абстрактным и также никогда не встречающимся понятием безвихревого движения. Поэтому необходимы дальнейшие серьезные исследования в области неізотропной турбулентности.

VIII-3.2. Теория Буссинеска. Чтобы упростить уравнения Рейнольдса, Буссинеск ввел коэффициент турбулентного обмена ϵ , по размерности совпадающий с коэффициентом вязкости μ . В случае плоского однородного потока в направлении OX ($\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$) величина ϵ определяется равенством $\rho \overline{u'v'} = -\epsilon \overline{du/dy}$.

Тогда касательное напряжение $[\tau]$ будет равно: $[\tau] = (\mu + \epsilon) \overline{du/dy}$ вместо $\tau = \mu \overline{du/dy}$. Величина $[\tau]$ дается линейным соотношением.

Из этого соотношения можно видеть, что флуктуационный член действует подобно вязкому члену, и их эффекты просто линейно складываются. Порядок их величин различен, а именно $\epsilon \gg \mu$, и поэтому $[\tau] \cong \epsilon \overline{du/dy}$. Это соотношение дает распределение скорости, подобное тому, которое получено для ламинарного потока из уравнений Навье — Стокса. В тех случаях, когда величина ϵ явно изменчива в пространстве, теория Буссинеска непригодна. Однако в некоторых случаях, например при рассмотрении движений слоев атмосферы, величину ϵ приближенно можно считать постоянной, и допущение Буссинеска используется для получения результатов в первом приближении.

VIII-3.3. Теория пути смешения Прандтля. Теория пути смешения была предложена Прандтлем по аналогии со средним свободным путем пробега в кинетической теории газов. Это теория передачи количества движения.

Рассмотрим поток $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = 0$, $\bar{w} = 0$, параллельный оси OX (рис. VIII-9). Средние скорости в двух точках на перпендикуляре к границе $Y=0$ будут \bar{u} и $\bar{u} + \overline{d\bar{u}}$.

Согласно Прандтлю, предполагается, что флуктуационные члены u' и v' пропорциональны разности скоростей $\overline{d\bar{u}}$, которая равна: $\overline{d\bar{u}} = -(\overline{d\bar{u}/dy})dy$, так что $\overline{u'v'} = -l^2 (\overline{d\bar{u}/dy})^2$ или $|u'|$ и $|v'| \approx l \overline{d\bar{u}/dy}$. Величину l представляет собой «путь смешения» и пропорциональна dy . Величину l можно физически рассматривать как путь, который может пройти «комочек» жидкости перпендикулярно вектору средней скорости \bar{u} . Очевидно, что $l = 0$ на границе, так как «комочек» жидкости не может пройти сквозь границу.

С другой стороны, величина $\overline{u'v'}$ всегда имеет знак, обратный знаку величины $\overline{du/dy}$. Если рассматривать «комочек» жидкости, движущийся от границы к середине потока, то $v' > 0$. Однако поскольку «комочек» движется от слоя, где \bar{u} меньше, к слою, где \bar{u} больше, то это приводит к замедлению движения, т. е. $u' < 0$. Наоборот, при движении «комка» жидкости в сторону границы $v' < 0$, а $u' > 0$. Поскольку величина $\overline{u'v'}$ всегда отрицательна, то касательные напряжения, обусловленные турбулентностью, $\tau = -\rho \overline{u'v'}$, положительны, так же как и величина $\overline{du/dy}$.

Если рассматривается такое распределение скорости, при котором $\overline{du/dy} < 0$, то аналогично находим, что величина $-\rho \overline{u'v'}$ всегда

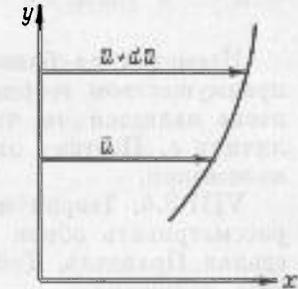


Рис. VIII-9. Обозначения, используемые при определении пути перемешивания.

отрицательна. Следовательно, в любом случае величина $[\tau]$ имеет тот же знак, что и $d\bar{u}/dy$, что выражается с помощью записи

$$[\tau] = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

В общем случае

$$[\tau] = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Эта функция может быть линеаризована с помощью коэффициента Буссинеска ε (см. VIII-3.2):

$$\varepsilon = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

Несмотря на более сложную математическую форму, главным преимуществом теории Прандтля по сравнению с теорией Буссинеска является то, что величину l легче представить себе, чем величину ε . Поэтому относительно l проще сделать различные предположения.

VIII-3.4. Теория переноса вихрей Тэйлора. Вместо того, чтобы рассматривать обмен количествами движения между слоями, как сделал Прандтль, Тэйлор рассматривает обмен моментами количества движения.

Эта теория дает иногда те же результаты, что и теория Прандтля. Например, распределение скорости в двухмерной струе по обеим теориям получается одинаковое. Однако, когда путь смещения является функцией от нормального расстояния до границы, результаты получаются различными.

VIII-3.5. Величина пути смещения. Определим теперь величину пути смещения. Для этого предложены различные формулы.

Первый тип формул для пути смещения является чисто эмпирическим и годится только для специальных случаев. Вот некоторые примеры:

а) на границе струи величина l пропорциональна расстоянию от отверстия;

б) вблизи стенки трубы величина l предполагается пропорциональной расстоянию y от границы: $l = ky$, где k — константа. Физически это означает, что амплитуда движений «комка» жидкости равна нулю на границе и линейно возрастает с удалением от границы.

Вводя эту величину в формулы Прандтля, получаем

$$[\tau] = \rho k^2 y^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Если считать $[\tau]$ константой, то, интегрируя по y , получаем «универсальное распределение скорости»:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{[\tau]}{\rho}} \left(\frac{1}{k} \ln y + \text{const} \right).$$

Прандтль в теории пограничного слоя вдоль плоской пластины рассматривал $[\tau]$ как константу. Величины констант определяют с помощью эксперимента. В трубе величина $[\tau]$ считается линейной функцией от расстояния до стенки, что объясняется в элементарной гидравлике. Обе гипотезы теоретически являются приближенными, но дают результаты, близкие к фактическим данным измерений.

VIII-3.6. Гипотеза подобия Кармана. Карман попытался найти величину l независимо от характера потока, на основании двух допущений:

а) механизм турбулентности не зависит от вязкости (за исключением зоны вблизи гладкой поверхности);

б) турбулентные флуктуации статистически одинаковы в любой точке, но изменяются только по временному масштабу и по масштабу длины.

На основании этих допущений Карман нашел, что

$$[\tau] = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy},$$

что соответствует результату Прандтля, а также

$$l = \kappa \frac{d\bar{u}}{d^2\bar{u}/dy^2},$$

откуда

$$[\tau] = \frac{\rho \kappa^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2},$$

где κ — универсальная константа, согласно экспериментальным данным равная 0,4.

VIII-3.7. Другие теории. Другие теории были предложены, чтобы улучшить приведенные выше полуэмпирические формулы. В частности, чтобы избежать значения $\varepsilon = 0$ при $d\bar{u}/dy = 0$, например, в середине трубы, Прандтль предложил выражение

$$[\tau] = \rho l^2 \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 + l'^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2 \right]$$

Однако очень трудно подобрать наилучшее значение для l' .

Перечисленные теории, и особенно теории Прандтля и Кармана, были с успехом применены на практике во многих случаях (стены, трубы и т. д.). Однако они представляются не столь пригодными, когда поток неоднороден (искривление, дивергенция и т. д.). Поэтому в решении проблем турбулентности важное место принадлежит статистической механике, т. е. направлению, предложенному Тэйлором, Карманом и Кампе де Ферье.

VIII-4. Потери энергии в однородном потоке

VIII-4.1. Положения элементарной гидравлики. Из элементарной гидравлики следует, что потери напора в однородном потоке:

а) пропорциональны средней по поперечному сечению величине скорости V , если поток является ламинарным;

б) пропорциональны квадрату указанной выше величины, т. е. V^2 , если поток является турбулентным, и граница шероховатая;

в) пропорциональны промежуточной функции от V , т. е. V^n , если поток является турбулентным, и граница является гладкой ($1 < n < 2$).

VIII-4.2. Теоретическое объяснение величин потерь напора. Приведенные выше положения частично могут быть объяснены с помощью следующих соображений.

Часть кинетической энергии первичного (или среднего) движения турбулентного потока непрерывно расходуется на образование турбулентных флуктуаций. Кинетическая энергия этих флуктуаций является квадратичной функцией от флуктуационных скоростей. Поскольку вся эта энергия в конце концов поглощается трением, то потеря энергии в турбулентном потоке является квадратичной функцией от флуктуационных скоростей.

С другой стороны, флуктуационные скорости приближенно являются линейными функциями от средних скоростей. Мы видели, что

$$[\tau] = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}.$$

Поскольку величина $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ пренебрежимо мала, то величина $\overline{u'v'}$ является квадратичной функцией от \bar{u} , и потери напора пропорциональны \bar{u}^2 , т. е. пропорциональны V^2 .

В случае гладкой границы член $d\bar{u}/dy$ в пределах пограничного слоя уже не является пренебрежимо малым. Поэтому потери напора являются сложной промежуточной функцией от \bar{u} , а значит, и от V .

В случае ламинарного потока величина $[\tau]$ просто равна $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$, и потери напора являются линейной функцией от $\bar{u} = u$, а значит, и от V . Этот вопрос рассмотрен более подробно в разделе XIV-4.

VIII-4.3. Работа, производимая турбулентными силами. Очевидно, что из-за турбулентности потери энергии в турбулентном потоке гораздо значительнее, чем в ламинарном. При этом важно отметить следующее.

Было найдено, что средняя величина сил вязкости на единицу объема равна

$$\mu \nabla^2 \bar{V} = \mu \nabla^2 \bar{V} + \mu \nabla^2 \bar{V}',$$

где

$$\mu \nabla^2 \bar{V}' = \mu \nabla^2 \bar{V}' = 0.$$

Член $\mu \nabla^2 \bar{V}$ мал по сравнению с силами конвективной инерции, вызванными турбулентными флуктуациями. Средняя величина сил вязкости, обусловленных турбулентными флуктуациями, равна нулю.

Если вместо рассматриваемых средних сил рассмотреть среднюю величину работы, производимой этими силами, то мы получим совершенно иной результат. Рассмотрим, например, осредненное касательное напряжение $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$. Эта сила равна $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, поскольку $\mu \overline{\frac{\partial u'}{\partial x}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$. Работа, произведенная этой силой за единицу времени, равна

$$dy dz \mu \frac{\partial u}{\partial x} \left[-u + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right] = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy dz,$$

а на единицу объема: $(\mu/2) (\partial u/\partial x)^2$. Средняя по времени величина этой работы будет

$$W = \frac{\mu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} = \frac{\mu}{2} \overline{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}.$$

Поскольку

$$2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} = 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0,$$

то окончательно получаем

$$W = \frac{\mu}{2} \overline{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2} + \frac{\mu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2}.$$

Второй член всегда положителен, и поэтому его средняя величина не равна нулю.

Хотя u' обычно меньше, чем \bar{u} , однако изменения u' в пространстве (здесь величина $\partial u'/\partial x$) обычно более значительны, чем пространственное изменение \bar{u} (здесь $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$). Первым членом $(\mu/2) (\partial \bar{u}/\partial x)^2$ часто можно пренебречь, и тогда $W \cong (\mu/2) \overline{(\partial u'/\partial x)^2}$.

Таким образом, потери энергии и напора обусловлены в основном турбулентными флуктуациями.

VIII-4.4. Диссипативная функция в турбулентном движении. Аналогичный результат можно получить, рассматривая слагаемые члены диссипативной функции Φ , приведенной в V-5.5, если величины u, v, w заменить величинами $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, u', v', w'$. Мы находим тогда, что средняя величина Φ является суммой двух членов: Φ_m и Φ_t , причем Φ_m является функцией только от средних величин $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ и мала по сравнению с Φ_t , которая является функцией от u', v', w' :

$$\Phi_m = \mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \dots \right],$$

$$\Phi_t = \mu \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \dots + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \dots \right].$$

Функция Φ_t характеризует ту часть энергии, которая поглощается трением за счет турбулентных флуктуаций.

УПРАЖНЕНИЯ

VIII-1. Объясните, почему величина $[\tau]$ в теории пограничного слоя считается постоянной вдоль направления, перпендикулярного к стенке, а в случае однородного потока в трубе или между двумя параллельными пластинами — линейно изменяющейся с удалением от стенки. Объясните ограничения этих допущений. Каков критерий для распределения давления, на котором указанные допущения основаны?

VIII-2. Экспериментально найдено, что

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{[\tau_0]}{\rho}} \left(\frac{y}{D} \right)^{1/2},$$

где D — расстояние между двумя параллельными пластинами. Дайте выражения для $[\tau]$ и пути смещения Прандтля l как функций от y .

VIII-3. Используя выражение Кармана

$$\tau = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2}$$

и соотношение $\frac{d\bar{p}}{dx} = \text{const}$ вдоль центральной линии прямоугольного канала с шириной $2h$, выведите следующее универсальное выражение для закона распределения скорости в таком канале:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) + \sqrt{\frac{y}{h}} \right],$$

где \bar{u}_0 — скорость на центральной линии при $y = 0$, а τ_0 — касательное напряжение у стенки.

VIII-4. Допустим, что распределение скорости в цилиндрической трубе радиуса R дается степенным законом «1/7», т. е.

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{R-r}{R} \right)^{1/7},$$

где U — максимальная скорость на осевой линии.

Дайте теперь выражение для пути смещения Прандтля как функции от r .

Глава IX

ПОТОК В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ. ЗАКОН ДАРСИ

IX-1. Осредненное движение в пористой среде

IX-1.1. Основные уравнения. Законы, описывающие поток в пористой среде, будут исследованы подробно из-за их важности и широкого применения в инженерной практике.

Основные законы, находящие применение в практике, это опять-таки уравнение неразрывности и обычно уравнение движения. Закон количества движения, выражаемый уравнениями Навье — Стокса, теоретически приложим к этому типу движения. Однако из-за сложности граничных условий (поскольку $V = 0$ на поверх-

ности каждого зерна пористой среды) уравнения движения в этой форме здесь не применяются. Необходимы некоторые допущения и преобразования.

IX-1.2. Упрощение граничных условий для среднего движения. Прежде всего зерна предполагаются распределенными случайно. Поток подчиняется статистическим законам. [Случай неизотропной пористой среды, такой, как осадочная глина, требует рассмотрения коэффициента проницаемости (фильтрации), который изменяется с направлением.] Поэтому вместо реальных величин скорости и давления, меняющихся очень сложным образом, рассматриваются только средние величины.

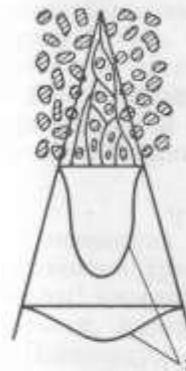


Рис. IX-1. Диффузия сквозь пористую среду.
1 — линия равной концентрации.

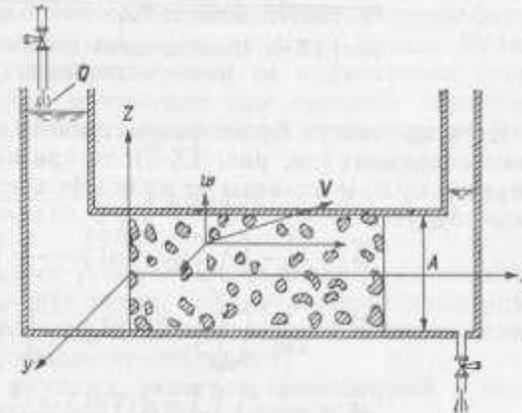


Рис. IX-2. Однородный средний поток сквозь пористую среду.

Очевидно, что такой подход значительно упрощает граничные условия, поскольку эти условия приходится выражать только на границах среднего потока, т. е. на краях пористой среды и на свободной поверхности.

IX-1.3. Диффузия в пористой среде. Известно, что в ламинарном потоке процессы перемешивания очень слабы, поскольку они обусловлены только молекулярным движением, в то время как в турбулентном потоке эти процессы интенсивны, поскольку они обусловлены турбулентными флуктуациями. В ламинарном потоке сквозь пористую среду за счет случайного характера распределения частиц можно наблюдать, что краска распространяется (диффундирует) быстро, хотя поток является ламинарным (рис. IX-1). Кривая концентрации имеет форму гауссовой кривой распределения.

Угол конуса диффузии является функцией характеристик пористой среды и составляет примерно 6° . Этот угол возрастает, когда поток становится турбулентным; таким образом, он является функцией числа Рейнольдса, определенного в разделе IX-3.1.

IX-1.4. **Определение среднего движения в однородном потоке.** Самый простой способ определения средней скорости вытекает из рассмотрения одномерной пористой среды, показанной на рис. IX-2. Средняя скорость, или «удельная скорость», представляет собой отношение расхода Q к полной поперечной площади A , т. е. $V = Q/A$, причем это отношение не зависит от коэффициента пустотности.

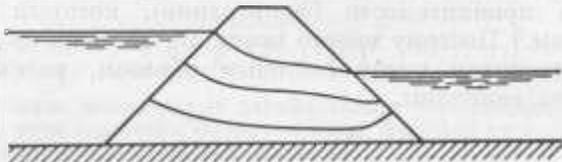


Рис. IX-3. Неоднородный средний поток сквозь пористую среду.

Если мы теперь будем рассматривать движение в трехосной системе координат (см. рис. IX-2), то три компоненты действительной скорости u , v , w отличны от нуля. Их средние величины в пористой среде будут:

$$\bar{u} = \frac{1}{\text{Vol.}} \iiint_{\text{Vol.}} u d(\text{Vol.}) = \frac{1}{A} \iint_A u dA = V,$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\text{Vol.}} \iiint_{\text{Vol.}} v d(\text{Vol.}) = \frac{1}{A} \iint_A v dA = 0,$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\text{Vol.}} \iiint_{\text{Vol.}} w d(\text{Vol.}) = \frac{1}{A} \iint_A w dA = 0,$$

где Vol. — полный объем пористой среды. Две черточки над обозначениями компонент скорости означают осреднение по пространству в отличие от осреднения по времени (\bar{V}), употребляемого при изучении турбулентного движения.

IX-1.5. **Общее определение среднего движения.** Для более сложных видов среднего движения (рис. IX-3), где изменения среднего движения в пространстве также существуют, среднюю величину вектора скорости приходится определять для элементарного объема $\Delta \text{Vol.} = \Delta x \Delta y \Delta z$ пористой среды:

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} \mathbf{V} dx dy dz,$$

а для компонент вдоль координатных осей получим:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} u dx dy dz,$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} v dx dy dz,$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} w dx dy dz.$$

В случае показанного на рис. IX-3 двухмерного среднего потока величина $\bar{v} = 0$.

Такой элементарный объем пористой среды теоретически должен быть достаточно большим, чтобы к нему правомерно было применять процесс осреднения, т. е. объем $\Delta x \Delta y \Delta z$ должен включать достаточное число случайно распределенных зерен. С другой стороны, объем $\Delta x \Delta y \Delta z$ должен быть достаточно мал, чтобы при рассмотрении среднего движения его можно было считать бесконечно малым и применять методы дифференциального исчисления.

Для того чтобы оба указанных противоречивых требования удовлетворялись, градиент действительной скорости должен быть гораздо больше, чем градиент средней скорости. Это условие физически можно интерпретировать как требование, чтобы элементы формы потока были велики относительно зерен пористой среды. Мелкие формы потока между крупными валунами не подчиняются статистическим законам, которые применяют для среднего движения.

IX-1.6. **Давление.** Аналогично, среднее давление определяется выражением

$$\bar{p} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} p dx dy dz.$$

Отклонения величины p от \bar{p} обусловлены главным образом искривлением траекторий вокруг зерен. Эти отклонения пропорциональны конвективной инерции, т. е. пропорциональны квадрату скорости, которым обыкновенно пренебрегают.

Пьезометр достаточно крупных размеров, помещенный в пористую среду, может интегрировать эти отклонения.

IX-1.7. **Граничные условия.** Граничные условия задаются как функция средней скорости на границе пористой среды вместо того, чтобы выражаться функцией реальной скорости на краях отдельных зерен.

IX-1.8. **Аналогия между турбулентным потоком и потоком сквозь пористую среду.** Имеется интересная теоретическая аналогия между методами изучения турбулентного потока и потока сквозь пористую среду.

В обоих случаях приходится иметь дело со средней скоростью и средним давлением, поскольку природа потока имеет случайный характер. В турбулентном потоке средние величины определяются в данной точке путем временного осреднения, а в случае потока в пористой среде средняя величина определяется путем пространственного осреднения (см. VII-1.3):

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{V} dt; \quad \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\text{Vol.}} \iiint_{\text{Vol.}} \mathbf{V} d(\text{Vol.}).$$

Интервал времени T должен быть достаточно велик, чтобы процесс осреднения был правомерным, но в то же время достаточно мал, чтобы можно было отличить стационарное движение от

нестационарного (см. VII-1.4). Элементарный объем $\Delta x \Delta y \Delta z$ со своей стороны должен удовлетворять аналогичным условиям, рассмотренным в IX-1.4.

Флуктуационные члены u', v', w', p' , определенные при изучении турбулентного движения, существуют (в пространственном смысле) и в потоке через пористую среду, причем их средняя величина также равна нулю по определению: $\bar{V} = \bar{\bar{V}} + \bar{V}'$. Таким образом:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} \mathbf{V}' \text{ (или } p') dx dy dz = 0.$$

Уравнение движения среднего потока в пористой среде получается в результате осреднения каждой из сил по пространству подобно тому, как при изучении турбулентного движения производилось осреднение по времени. Эта процедура будет рассмотрена в разделе IX-2.

Далее, и турбулентный поток, и поток сквозь пористую среду являются существенно вихревыми, если речь идет о действительном движении. Однако их среднее движение может быть безвихревым (см. VIII-1.2 и IX-2.5).

Изотропный турбулентный поток аналогичен потоку сквозь изотропную пористую среду.

Турбулентный поток сквозь пористую среду приходится изучать, рассматривая величины, осредненные как по времени, так и по пространству:

$$\bar{\bar{V}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} \mathbf{V} dx dy dz dt.$$

IX-1.9. **Уравнение неразрывности.** Рассматривая осредненные по пространству скорости, обуславливающие перенос воды через плоские грани куба, определяющего элементарный объем пористой среды, можно показать, что уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, уравнение неразрывности для среднего движения имеет ту же математическую форму, что и для потоков других типов.

IX-2. Закон Дарси

IX-2.1. **Капиллярные эффекты.** Прежде всего надо отметить, что для некоторых потоков со свободной поверхностью, просачивающихся через очень мелкопористую среду, на картину потока и величину расхода будут оказывать заметное влияние капиллярные силы. Например, подъем свободной поверхности в земляной дамбе с размером зерен около 0,1 мм составляет около 1 фута (рис. IX-4).

IX-2.2. **Процесс осреднения.** Если капиллярными эффектами можно пренебречь, то уравнение движения, выраженное через функ-

ции средних величин, выводится с помощью процесса осреднения по пространству, подобного процессу осреднения по времени в случае турбулентного движения.

Поскольку сумма действительных величин всех сил, составляющих уравнение движения, всегда равна нулю:

$$\text{Сила инерции} + \text{сила тяжести} + \text{сила давления} + \text{сила трения} = 0,$$

то сумма средних по пространству величин этих сил также равна нулю:

$$\text{Средняя по пространству} \left[\text{сила инерции} + \text{сила тяжести} + \text{сила давления} + \text{сила трения} \right] = 0.$$

IX-2.3. **Аппроксимация.** В качестве первого шага аппроксимации пренебрегают силами инерции. Локальной инерцией пренебрегают потому, что изменения

уровня грунтовых вод обычно очень невелики. По этой причине нестационарные движения сквозь пористую среду обычно рассматривают как последовательность стационарных движений (см. IV-5). Однако некоторые специальные задачи требуют учета локальной инерции,

например исследование водопроницаемости заполненного битым камнем мола под действием периодических гравитационных волн.

Конвективной инерцией также пренебрегают. Поскольку скорости обычно очень малы, то их квадраты и члены, являющиеся функциями от их квадратов (силы конвективной инерции), являются величинами второго порядка малости по сравнению с другими членами (см. IV-5.2.1). Ниже мы рассмотрим область применимости этого допущения.

IX-2.4. **Средние силы. Закон Дарси.** Уравнение движения в конечном счете сводится к равенству нулю всех приложенных сил:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} \left(-\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \right) dx dy dz = 0.$$

Для осей OY и OZ можно написать два аналогичных уравнения. В векторном виде для трехмерного пространства можно записать:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint_{\Delta x \Delta y \Delta z} [-\mathbf{grad} (p + \rho g z) + \mu \nabla^2 \mathbf{V}] dx dy dz = 0.$$

При введении средних величин $\bar{\bar{V}}$ и $\bar{\bar{p}}$ следует отметить, что уравнение движения включает одну постоянную силу (тяжести) и две линейные силы (давления и вязкости).

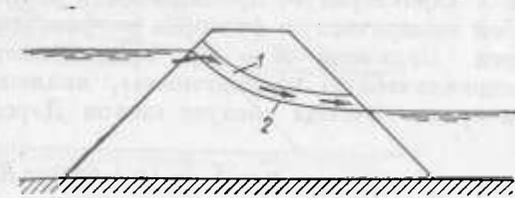


Рис. IX-4. Капиллярные эффекты в потоке сквозь пористую среду. 1 — зона действия капиллярных эффектов; 2 — теоретическая линия насыщения.

Выполняя такую же процедуру интегрирования, что и в случае турбулентного движения (см. VII-2), находим:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int \int \int -\text{grad}(\bar{p} + \rho g z) dx dy dz = -\text{grad}(\bar{p} + \rho g z).$$

Рассмотрим теперь силы вязкости. Поскольку они линейны, то естественно ожидать, что они пропорциональны средней скорости \bar{V} до тех пор, пока нет квадратичных эффектов, обусловленных конвективной инерцией и турбулентностью. Поэтому принимают их пропорциональными $\mu \bar{V}$ и записывают:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int \int \int \mu \nabla^2 \bar{V} dx dy dz = \frac{\mu}{k} \bar{V},$$

где k характеризует проницаемость пористой среды и представляет собой эмпирическую функцию коэффициента пустотности и размера зерен. Величина $K = k/\mu$ представляет собой так называемую «гидравлическую проводимость», являющуюся мерой проницаемости среды. Отсюда следует «закон Дарси»:

$$\bar{u} = K \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g z) = K \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x},$$

$$\bar{v} = K \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + \rho g z) = K \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y},$$

$$\bar{w} = K \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + \rho g z) = K \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial z},$$

или в векторной форме

$$\bar{\mathbf{V}} = K \text{grad}(\bar{p} + \rho g z) = K \text{grad} \bar{p}^*.$$

В неизотропной пористой среде величина K имеет различные значения — K_x , K_y , K_z — для каждой из осей OX , OY , OZ .

Этот закон утверждает, что средняя скорость жидкости, протекающей через пористую среду, прямо пропорциональна градиенту давления, действующему на жидкость. Величина $\bar{p}^* = \bar{p} + \rho g z$ является пьезометрическим напором. Упрощение фрикционного члена носит эмпирический характер и строго обосновать его, по-видимому, затруднительно. Для этого необходимо было бы проделать выкладки и вычисления для потока такого типа, какой показан на рис. IX-1. С другой стороны, представляется резонным, что уравнения Навье — Стокса перестают быть пригодными, с микроскопической точки зрения, для жидкости, протекающей через очень тонкие каналы пористой среды, например через пористый фарфор. В этом случае необходимо вести исследование на основе законов молекулярного движения. Этот вопрос относится к кинетической теории жидкостей.

IX-2.5. Безвихревое движение и поток сквозь пористую среду. Важно отметить, что среднее движение, определяемое законом Дарси, всегда является безвихревым.

Подставляя величины \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , данные выше, легко доказать, что $\partial \bar{u} / \partial y - \partial \bar{v} / \partial x = 0$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} \right] = 0.$$

Аналогичные выводы можно получить и для двух других выражений, приведенных в II-5.2. Однако турбулентный поток через пористую среду не может иметь среднего движения, определяемого потенциальной функцией. Он обязательно является вихревым.

IX-2.6. Потенциал скорости. Вычисление потенциала скорости φ выполняется по тем же правилам, что и для поля свободного потока

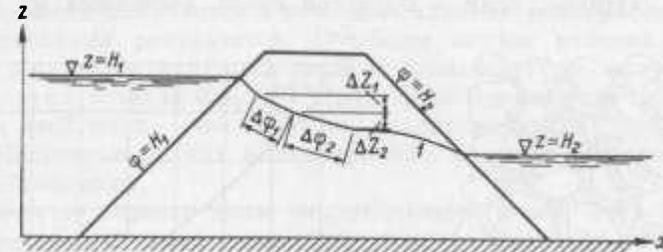


Рис. IX-5. Величина потенциала скорости для потока со свободной поверхностью в пористой среде. 1 — свободная поверхность, на которой $\Delta z_1 = \Delta z_2, \dots, \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2, \dots$

при безвихревом движении. Однако необходимо отметить, что определение функции φ в потоке сквозь пористую среду слегка отличается от того, которое дано в главе II. Потенциал скорости для потока сквозь пористую среду обычно определяется выражениями: $\bar{u} = -K \partial \varphi / \partial x$, $\bar{v} = -K \partial \varphi / \partial y$, $\bar{w} = -K \partial \varphi / \partial z$ или $\bar{\mathbf{V}} = -K \text{grad} \varphi$. Подставляя эти величины в уравнения Дарси, получаем

$$\bar{u} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -K \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g z)$$

и два аналогичных уравнения для \bar{v} и \bar{w} . Отсюда легко видеть, что функция φ равна пьезометрическому напору, т. е. $\bar{p}^* = (\bar{p} + \rho g z) = \varphi$. Иногда функцию φ определяют также из выражения $[\bar{p}/(\rho g) + z] = \bar{p}^*/(\rho g)$, т. е. $\bar{u} = -K \rho g \partial \varphi / \partial x$ и т. д. На рис. IX-5 показана величина и физический смысл функции φ , соответствующей такому определению. Потенциал скорости является постоянным вдоль боковых откосов дамбы и линейно уменьшается с увеличением z на свободной поверхности потока внутри дамбы. Поэтому постоянная величина Δz соответствует постоянной величине $\Delta \varphi$. Это положение будет изложено более подробно в XI-6.3.1 при рассмотрении метода гидродинамических сеток.

IX-3. Область применимости закона Дарси

Нам надо все же убедиться, что характеристика проницаемости k является функцией только свойств пористой среды. Это справедливо только при малых числах Рейнольдса.

IX-3.1. Число Рейнольдса. Число Рейнольдса для потока сквозь пористую среду определяется выражением $\bar{V}\delta_c/\nu$, где \bar{V} — средняя, или удельная, скорость, определенная выше, а δ_c — диаметр зерна. Диаметр зерна найти легко, в то время как диаметр «каналов», которые можно было бы рассматривать как трубки, определить очень сложно. При определении диаметров «каналов» предполагают, что между ними и размерами зерен существует простое линейное соотношение. Однако, если в пористой среде, состоящей из крупных

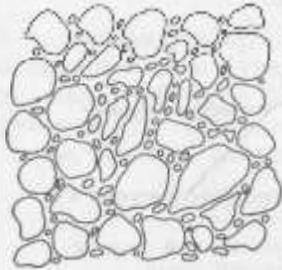


Рис. IX-6. При наличии более мелких частиц «поры» между ними сужаются.

зерен, имеются включения из мелких частиц, то это ведет к уменьшению размеров «каналов» (рис. IX-6). «Каналы» имеют тот же порядок величины, что и наименьшие частицы. Поэтому в данном случае правильнее определять число Рейнольдса по более мелким частицам. За «характеристический диаметр» δ_c эмпирически можно принимать средний диаметр 10% самых мелких зерен. Более точное рассмотрение этого вопроса требует дальнейших исследований.

IX-3.2. Конвективная инерция. Хотя скорости в пористой среде очень малы, пространственные перепады скорости велики. Это трудно представить себе, учитывая сильную искривленность фактических траекторий в пористой среде. Поэтому конвективная инерция оказывает заметное влияние на движение, если число Рейнольдса больше единицы, даже при отсутствии турбулентности. Так как конвективная инерция квадратична, то более правильным оказывается не закон Дарси, а так называемый закон Форхгеймера:

$$\text{grad } \bar{p}^* = a\bar{V} + b\bar{V}|\bar{V}|^n,$$

где $0 < n < 1$.

IX-3.3. Турбулентность в пористой среде. При больших числах Рейнольдса ($R > 100$) поток становится турбулентным. Закон Форхгеймера еще остается пригодным, но величина коэффициентов a и b изменяется.

При очень больших числах Рейнольдса линейный член $a\bar{V}$ становится пренебрежимо малым, а показатель степени n стремится к единице:

$$\text{grad } \bar{p}^* = b\bar{V}|\bar{V}|.$$

В этом случае при том же коэффициенте пустотности и при том же распределении зерен различных размеров коэффициент b является функцией шероховатости зерен. Аналогичное явление рассматривается в элементарной гидравлике при турбулентном потоке в шероховатой трубе.

IX-3.4. Коэффициент проницаемости. Величина коэффициента проницаемости получается с помощью анализа размерностей и экспериментальных результатов. В общем случае найдено, что эта величина является функцией числа Рейнольдса $\bar{V}\delta_c/\nu$, коэффициента пустотности ϵ и числа Фруда $V^2/(g\delta)$. Было предложено много функций для этой цели — мы не будем анализировать и сравнивать их здесь. Некоторые из них в большей или меньшей степени теоретически обоснованы.

В качестве первого шага аппроксимации может быть использовано приведенное ниже уравнение, справедливое для любого типа потока: ламинарного или турбулентного. Этот эмпирический закон был установлен экспериментально для диапазона чисел Рейнольдса от 10^2 до 10^5 :

$$\frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{C_x}{\epsilon^5} \frac{V^2}{2g\delta_c} \quad \text{или} \quad \frac{C_x(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \frac{V^2}{2g\delta_c},$$

где $\Delta H/\Delta L$ — градиент давления ($\Delta H/\Delta L = \mu\bar{V}/k$), а C_x — коэффициент сопротивления шероховатой сферы для того же самого числа Рейнольдса (рис. IX-7) (см. XIV-5.1). В ламинарном потоке с пренебрежимо малой конвективной инерцией ($R < 1$) мы имеем $C_x = 24/(\bar{V}\delta_c/\nu)$. Отсюда находим, что коэффициент Дарси равен:

$$\frac{\mu}{k} = \frac{12\mu}{\rho g \delta_c^2 \epsilon^5} \quad \text{или} \quad \frac{12\mu}{\rho g \delta_c^2} \frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

IX-1. Рассчитайте полный расход как функцию от напора через пористую среду с полным поперечным сечением $A = 1$ фут² и длиной в направлении потока $l = 3$ фута. Характерный диаметр зерен $\delta = 0,3$ мм, а коэффициент пустотности $\epsilon = 0,40$. Для определения коэффициента потерь напора используйте рис. IX-7. Определите напор, при котором закон Дарси становится непригодным, и напор, при котором появляется турбулентность. Повторите эти же вычисления для среды, состоящей из двух последовательно расположенных слоев: $l = 1,5$ фута, $\delta = 0,5$ мм и $l = 1,5$ фута, $\delta = 0,1$ мм; и для среды, состоящей из трех слоев: $l = 1$ фута, $\delta = 0,1$ мм, $0,3$ мм и $0,5$ мм, соответственно. Коэффициент пустотности — прежний, кинематический коэффициент вязкости $\nu = 1,076 \cdot 10^{-5}$ фут²/с.

О т в е т: однослойная среда — $\Delta H/\Delta L = [C_x V^2/(2g\delta)](1-\epsilon)^2/\epsilon^3$, $C = 24\nu/(V\delta)$; $Q = 1,43 \cdot 10^{-2} \Delta H$ фут³/с; при $\Delta H < 0,76$ применим закон Дарси; при $R > 100$ возникает турбулентность.

Из рис. IX-7: $C_x = 1$; при $\Delta H > 319$ футов возникает турбулентность. Двухслойная среда — $\Delta H_{\text{полн}} = [12\nu Q/(gA)][(1-\epsilon)^2/\epsilon^3] \Sigma(\Delta l/\delta^2)$; $Q = 3,06 \times$

$\times 10^{-3} \Delta H$; при $\Delta H < 2,14$ фута — применим закон Дарси; при $\Delta H > 550$ футов — возникает турбулентность.

Трехслойная среда — $Q = 4,15 \cdot 10^{-3} \Delta H$; при $\Delta H < 1,58$ фута — применим закон Дарси; при $\Delta H > 424$ фута — возникает турбулентность.

IX-2. Рассмотрите поток сквозь пористую среду с поперечным сечением $A = 100$ фут² и длиной в направлении среднего потока $L = 100$ футов. Требуется построить уменьшенную модель этой пористой среды в масштабе $\lambda = 1/10$, так что $a = 1$ фут² и $l = 10$ футов и при одинаковом коэффициенте пустотности ϵ . Мы хотим, чтобы расход подчинился правилу подобия Фруда, т. е. $q = \lambda^{5/2} Q$ при напоре $(\Delta h)_{\text{модель}} = (\Delta h)_{\text{прототип}} \times \lambda$. Для этой цели размер зерен на модели δ_m должен быть связан с размерами зерен прототипа δ_p соотношением $\delta_m = K \lambda \delta_p$. Определите величину K в случае, когда $H = 100$ футов, $\delta = 1$ мм и $\epsilon = 0,40$.

Ответ: $K = \lambda^{-3/4}$.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПЕРВОЙ ЧАСТИ

Неизвестные, подлежащие определению

При решении гидродинамических задач требуется найти две неизвестные функции от пространственных координат x, y, z и времени t , а именно, скорость $V(u, v, w)$ и давление p .

Однако в турбулентном потоке мы имеем дело с движением, осредненным по времени. Неизвестными функциями являются $\bar{V}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ и \bar{p} . Флуктуации скорости $V'(u', v', w')$ порождают дополнительные силы конвективной инерции, действующие на среднее движение подобно внешним силам.

В потоке сквозь пористую среду мы имеем дело с движением, осредненным по пространству. Неизвестными величинами являются $\bar{V}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ и \bar{p} .

Во всех случаях (идеальная жидкость, ламинарный поток, турбулентный поток, поток сквозь пористую среду) с помощью уравнения неразрывности и уравнения движения получают две неизвестные — скорость и давление, действительные или осредненные по времени или пространству.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности имеет одинаковую математическую форму для всех четырех типов движения. Для идеальной жидкости и ламинарного потока оно выражается через действительную скорость:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Для турбулентного потока оно выражается через скорость, осредненную по времени:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

Для потока сквозь пористую среду оно выражается через скорость, осредненную по пространству.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0.$$

Уравнения движения

Ниже записаны уравнения движения только вдоль оси Ox для четырех рассмотренных случаев:

	Инерция	Давление, тяжесть, трение	Конвективная инерция, обусловленная турбулентностью
Идеальная жидкость: уравнение Эйлера	$\rho \frac{du}{dt}$	$= -\frac{\partial p^*}{\partial x}$;
Ламинарный поток: уравнение Навье — Стокса	$\rho \frac{du}{dt}$	$= -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$;
Турбулентный поток: уравнение Рейнольдса (или Буссинеска) —	$\rho \frac{d\bar{u}}{dt}$	$= -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right)$;
Поток сквозь пористую среду: закон Дарси —	0	$= -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\mu}{k} \bar{u}$.

Поскольку эти четыре уравнения содержат подобные члены, то могут быть использованы подобные методы интегрирования. Некоторые из них пригодны только после некоторых аппроксимаций или допущений, позволяющих упростить основные уравнения. Например, если пренебречь турбулентными флуктуационными членами и вязкими членами, то турбулентный поток ведет себя как поток идеальной жидкости.

Чтобы упростить запись и для большей общности, в последующих главах будут употребляться только обозначения $V(u, v, w)$ и p , поскольку ясно, что в турбулентном потоке V и p означают \bar{V} и \bar{p} , а в потоке сквозь пористую среду соответственно \bar{V} и \bar{p} .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С ОСНОВНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Глава X

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

X-1. Сила и инерция. Работа и энергия

X-1.1. Интегрирование уравнения движения в некоторых общих случаях. Законы, определяющие движение элемента жидкости, были получены в первой части этой книги. Эти законы даны в дифференциальной форме.

Интегрирование уравнения движения вдоль какой-либо линии или по объему жидкости дает некоторые общие соотношения между двумя неизвестными: скоростью V и давлением p , независимо от каких-либо специальных граничных условий. Целью настоящей главы является установить эти общие соотношения путем интегрирования уравнения движения.

Прежде чем выполнять само интегрирование, вспомним некоторые основные положения механики, чтобы лучше понять полученные соотношения.

X-1.2. Количество движения и энергия в элементарной механике. Рассмотрим второй закон Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение: $F = m \, dV/dt$. Умножая каждый член на элементарную длину dS и учитывая, что $V = dS/dt$, получаем

$$F \, dS = m \frac{dV}{dt} dS = mV \, dV = md \left(\frac{V^2}{2} \right);$$

$F \, dS$ — это работа, совершаемая силой F , действующей вдоль dS , в то время как $md \left(V^2/2 \right)$ — это изменение кинетической энергии массы m , вызванное силой F , действующей вдоль пути dS . Интегрируя по dS , получаем

$$\int F \, dS = m \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right),$$

что представляет собой выражение равенства между работой и кинетической энергией, выведенное непосредственно из выражения равенства между приложенной силой и инерцией.

X-1.3. Количество движения и энергия в гидравлике. Рассмотрим теперь уравнения движения, полученные в первой части: уравнения Эйлера, Навье — Стокса, Рейнольдса и закон Дарси. Все они выражают равенство сил. Если их умножить на расстояние dS и проинтегрировать вдоль расстояния S , то получим выражения равенства работы и энергии.

Если силы инерции равны нулю или пренебрежимо малы, как это имеет место в случае потока сквозь пористую среду, то получаем равенство между работой приложенных сил.

Поскольку эти уравнения выведены для элементарной частицы жидкости единичного объема ($m = \rho$), то полученные из них формулы дадут, на первом этапе, соотношение между кинетической энергией элементарной частицы жидкости и работой приложенных сил, действующих на эту частицу.

X-1.4. Процесс интегрирования и упрощающие допущения. В этой главе речь будет идти только о точном в математическом смысле интегрировании. Однако такое точное интегрирование требует некоторых ограничений и упрощающих допущений. Прежде всего, жидкость считается идеальной. При этом точное интегрирование без ограничения направления может также осуществляться и для вихревого потока.

Способы интегрирования излагаются последовательно от наиболее простого случая к самому сложному. Будут указаны упрощающие допущения, однако они не всегда удовлетворяются на практике. Поэтому для практических целей необходимо приближенное интегрирование, например при изучении потока жидкости в трубе и т. д. Этот вопрос рассмотрен в главе XII.

X-2. Безвихревое движение идеальной жидкости

В этом параграфе рассмотрены случаи, когда точное интегрирование возможно во всех направлениях; на практике эти случаи ограничены безвихревым движением идеальной жидкости. Приводимые ниже в качестве примеров случаи расположены по порядку от наиболее простых до самых сложных.

X-2.1. Медленное стационарное движение и однородное стационарное движение. X-2.1.1. Медленное стационарное движение. Поскольку движение стационарно, члены локальной инерции равны нулю; поскольку движение медленное, то членами конвективной инерции можно пренебречь; а поскольку жидкость идеальная, то силы трения равны нулю. Таким образом, уравнение движения сводится к равенству приложенных сил — давления и тяжести, что математически записывается в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial (p + \rho gz)}{\partial z} = 0.$$

Так как оси OX и OY горизонтальны, то первые два уравнения показывают, что давление является постоянным в горизонтальной плоскости. Третье уравнение дает

$$p + \rho gz = p^* = \text{const.}$$

Мы видим, что величина p линейно изменяется с удалением от свободной поверхности. Это соответствует закону гидростатики, т. е. этот закон можно рассматривать как соответствующий стационарному предельному случаю медленного движения идеальной жидкости.

Однако поскольку при отсутствии движения силы трения также равны нулю, то в этом случае закон гидростатики является точным, в то время как в случае медленного движения он является лишь приближенным.

Х-2.1.2. Однородный стационарный поток реальной жидкости. Важно отметить, что аналогичный закон получается для однородного стационарного потока реальной жидкости, т. е. при наличии сил трения.

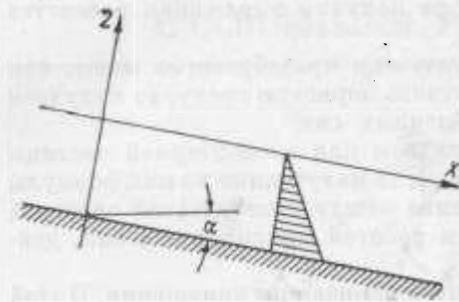


Рис. X-1. В однородном потоке распределение давления гидростатическое (под углом α).

Рассмотрим однородный поток в направлении оси OX , направленной под углом α к горизонту (см. рис. X-1). Поскольку движение является однородным, то $\partial u / \partial x = 0$. Таким образом, в однородном потоке члены конвективной инерции всегда равны нулю. Учитывая, что ось OZ также отклоняется от вертикали на угол α , имеем $\partial(p + \rho g z \cos \alpha) / \partial z = 0$.

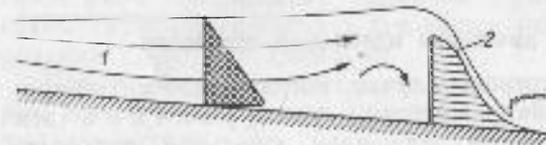


Рис. X-2. Гидростатическое распределение давления в тех местах, где кривизна траекторий мала. 1 — бассейн; 2 — дамба.

Интегрируя по z (как видно из рис. X-1, величина z всегда отрицательна), получаем $p = p_a + \rho g z \cos \alpha$, где p_a — атмосферное давление.

Изобары, или линии равного давления, наклонены к горизонтальной плоскости под углом α . Отсюда следует, что архимедовы силы, действующие на любое тело в таком потоке, например на донные наносы, направлены под углом α к вертикали.

Во многих реальных случаях в потоках со свободной поверхностью угол α очень мал, и $\cos \alpha$ можно считать равным единице. Поэтому распределение давления в потоке со свободной поверхностью чаще всего является гидростатическим.

Этот гидростатический закон считается достаточно точным даже для неоднородного или не медленного движения, если кривизна траекторий мала. Расчет кривой подпора обычно основан на таком допущении, даже если это специально не оговаривается (рис. X-2).

На рис. X-3, X-4 и X-5 показаны некоторые случаи, в которых нельзя пренебрегать влиянием конвективной инерции на распределение давления и, наоборот, распределение давления влияет на картину течения. Эффект кривизны потока рассмотрен также в XVII-2.3.1.

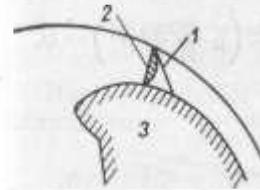


Рис. X-4. Давление растет с глубиной медленнее, чем по гидростатическому закону.

1 — гидростатическое распределение давления; 2 — фактическое распределение давления; 3 — водослив.

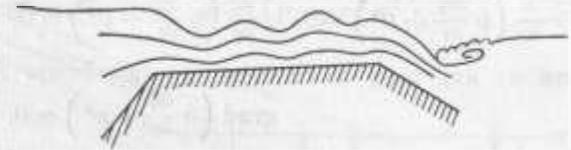


Рис. X-5. Кривизна траекторий над водосливом с широким гребнем.

Х-2.2. Медленное нестационарное движение и однородное нестационарное движение идеальной жидкости. Х-2.2.1. Общий случай. Введение членов локальной инерции в уравнения, приведенные в X-2.1.1, дает уравнения, пригодные для медленного нестационарного движения идеальной жидкости:

Эти уравнения пригодны и для не медленного нестационарного однородного потока идеальной жидкости, поскольку в этом случае члены конвективной инерции также равны нулю, как мы это увидим в XII-2.1.2.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p^*}{\partial z};$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{grad} p^* = 0.$$

Если медленное движение математически является безвихревым (см. IV-5.2.3), то скорость $\mathbf{V}(u, v, w)$ можно определить с помощью потенциала скорости φ :

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad} \varphi \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Прделаем следующие преобразования:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и аналогично

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Подставляя значения производных по t в уравнение движения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p^* \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p^* \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p^* \right) = 0,$$

или

$$\text{grad} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p^* \right) = 0.$$

Интегрирование по расстоянию дает для любого направления

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z = f(t).$$

Производная от $f(t)$ по любой пространственной координате равна нулю.

Х-2.2.2. Условие Коши—Пуассона на свободной поверхности. На свободной поверхности, определяемой выражением $z = \eta$, давление p постоянно. Поэтому, включая функцию $f(t)$ в выражение производной $\partial \varphi / \partial t$, мы получаем уравнение Бернулли:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + g\eta = \text{const.}$$

Перемещение (свободной поверхности) предполагается бесконечно малым, поэтому $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\eta} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0}$. Дифференцируя все по t и учитывая, что $\partial z / \partial t = w = \partial \varphi / \partial z$, при условии пренебрежения нелинейными членами (см. XVI-1.4), получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Это — условие Коши—Пуассона на свободной поверхности, которое будет подробно рассмотрено в XVI-1.5.

Х-2.3. Стационарное безвихревое движение идеальной жидкости. Уравнения движения вдоль осей OX , OY , OZ для стационарного безвихревого движения идеальной жидкости имеют вид (см. VI-1.2.3):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x}, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{V^2}{2} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial y}, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{V^2}{2} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial z}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p^* \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p^* \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p^* \right) = 0.$$

В векторной форме получим:

$$\rho \text{grad } \frac{V^2}{2} - \text{grad } p^* \quad \text{или} \quad \text{grad} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p^* \right) = 0.$$

Интегрирование этих уравнений по расстоянию дает для любого направления

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.},$$

или, если все поделить на ρg ,

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H,$$

где H — константа, представляющая собой так называемый полный напор, т. е. сумму скоростного напора $V^2/(2g)$, напора давления $p/\rho g$ и напора возвышения (высоты положения, или геодезического напора) z . Величина $p/\rho g + z$ регистрируется пьезометром, она называется пьезометрическим напором (рис. X-6).

Наконец, мы получаем следующий очень важный результат: пространственные производные от полного напора H в безвихревом движении равны нулю:

$$\text{grad} (H) = 0.$$

Х-2.3.1. Физический смысл полученного уравнения хорошо известен: оно выражает сохранение энергии элементарной частицы жидкости в виде суммы кинетической энергии, энергии давления и потенциальной энергии. Подчеркнем, что в безвихревом движении уравнение Бернулли справедливо для любого направления; т. е. оно справедливо как вдоль траектории, так и вдоль нормали к траектории. Укажем также, что скорость V и давление p означают локальные значения скорости и давления и не относятся к средним значениям скорости и давления для поперечного сечения, как будет показано при обобщении уравнения Бернулли для случая изучения потока в трубе (глава XII).

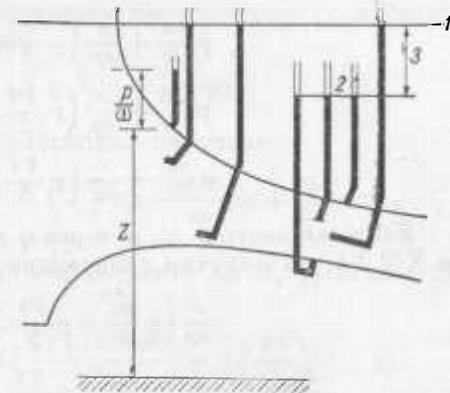


Рис. X-6. В безвихревом потоке полный напор в любой точке постоянен. 1 — полный напор; 2 — пьезометрический напор; 3 — скоростной напор $V^2/2g$.

В инженерной практике разработан целый ряд практических приложений указанной формулы. Например, расчет давления вдоль границы, если поле скоростей задано, можно выполнить, применяя данное уравнение с помощью метода гидродинамических сеток (см. XI-6). Надо помнить, что этот метод можно использовать только в случае безвихревого потока, который встречается на практике в коротких сужающихся гидротехнических сооружениях (см. II-4.4.).

X-2.3.2. Если выразить V через φ , то уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + p + \rho g z = \text{const.}$$

X-2.4. **Нестационарный безвихревой поток идеальной жидкости.** Если движение нестационарно, в уравнения, рассмотренные в предыдущем случае, необходимо ввести члены локальной инерции:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0.$$

Если выразить u , v , w через φ аналогично тому, как это сделано в X-2.2.1, то получим следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

или

$$\text{grad} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0.$$

Интегрируя эти выражения по соответствующим направлениям и выражая V^2 через φ , получаем для любого направления

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + p + \rho g z = f(t).$$

X-3. Вихревое движение идеальной жидкости

Несмотря на тот факт, что физической причиной завихренности является трение, в теоретической гидравлике рассматриваются некоторые типы вихревого движения без учета сил трения. Такой случай и будет сейчас рассмотрен. Это послужит полезной основой для дальнейшего изучения реального вихревого потока в общем виде с учетом упрощающих допущений (см. главу XII).

Будет показано, что в случае вихревого движения точное интегрирование в любом направлении невозможно. Однако возможно точное интегрирование вдоль траектории.

X-3.1. Стационарное вихревое движение идеальной жидкости.

X-3.1.1. Рассмотрим сначала уравнения движения в форме Эйлера

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p^*}{\partial z},$$

где символ d/dt означает полную производную. Предполагается, что u , v и w изменяются только в пространстве. Поскольку движение стационарно, то частные производные $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ и $\partial w/\partial t$ равны нулю.

Умножим эти три уравнения соответственно на dx , dy и dz , которые по определению являются компонентами элемента линии тока dS (а не компонентами произвольно направленного элементарного отрезка, как в X-2), так что

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt.$$

Тогда, складывая все три уравнения, получаем

$$\rho \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) = - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x} dx + \frac{\partial p^*}{\partial y} dy + \frac{\partial p^*}{\partial z} dz \right).$$

Подстановка в левую часть u , v и w вместо dx/dt , dy/dt и dz/dt дает

$$(u du + v dv + w dw) = d \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) = d \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

С другой стороны, правая часть является полным дифференциалом от p^* . Отсюда окончательно получаем

$$d \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] = -dp^*,$$

т. е.

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$$

Мы получили то же самое уравнение, что и в случае безвихревого движения. При этом мы не вводили допущения об отсутствии завихренности, но возможность точного интегрирования была ограничена только направлением вдоль линии тока, так как мы использовали подстановку $dx = u dt$, $dy = v dt$ и $dz = w dt$.

X-3.1.2. Случай стационарного вихревого движения идеальной жидкости является очень важным, и поэтому при его исследовании используются различные исходные формы записи движения.

Продemonстрируем другой вывод уравнения Бернулли, рассматривая члены конвективной инерции в развернутом виде. (Преобразования для p^* остаются теми же, что и в предыдущем случае.)

Умножим выражения для конвективной инерции вдоль осей координат соответственно на dx , dy и dz :

$$\begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx, \\ & \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy, \\ & \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz. \end{aligned}$$

Поскольку dx , dy , dz являются компонентами элемента линии тока dS , то из уравнения линии тока $dx/u = dy/v = dz/w = dt$ (см. I-2.4) получим следующие равенства:

$$v dx = u dy; \quad w dx = u dz; \quad w dy = v dz.$$

Подставляя их в приведенные выше выражения и складывая полученные результаты, получим:

$$\begin{aligned} & \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial u}{\partial y} dy + u \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) + \rho \left(v \frac{\partial v}{\partial x} dx + v \frac{\partial v}{\partial y} dy + v \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) + \\ & + \rho \left(w \frac{\partial w}{\partial x} dx + w \frac{\partial w}{\partial y} dy + w \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) = \\ & = \rho (u du + v dv + w dw) = d \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с тем, который приведен в X-3.1.1.

X-3.1.3. Аналогичное интегрирование можно выполнить и в том случае, когда члены конвективной инерции записаны в виде:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\eta w - \zeta v) \right] dx, \\ & \rho \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\zeta u - \xi w) \right] dy, \\ & \rho \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(\xi v - \eta u) \right] dz, \end{aligned}$$

где ζ , η , ξ — коэффициенты вихря. Член $\rho V^2/2$ прямо получается из компонент $\rho (\partial/\partial x) (V^2/2) dx$, $\rho (\partial/\partial y) (V^2/2) dy$, $\rho (\partial/\partial z) (V^2/2) dz$, в то время как члены, содержащие ζ , η , ξ , исчезают после введения соотношений $v dx = u dy$, $w dx = u dz$, $w dy = v dz$, которые имеют место вдоль линии тока, несмотря на то, что сами величины ζ , η и ξ , в отличие от случая, рассмотренного в X-2.3, не равны нулю.

X-3.1.4. Поскольку соотношение $\rho V^2/2 + p + \rho g z = \text{const}$ выполняется вдоль линии тока dS (dx , dy , dz), то производная от полного напора $H = V^2/2g + p/\bar{\omega} + z$ вдоль этой траектории равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\bar{\omega}} + z \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial S} = 0.$$

В стационарном потоке положительное значение величины $\partial H/\partial S$ означает, что вдоль траектории dS действует внешняя сила типа силы, обусловленной работой насоса. Если же $\partial H/\partial S$ меньше нуля, то это значит, что либо вдоль траектории dS действует внешняя сила, обусловленная работой турбины, либо присутствует сила трения.

Изменение величины H вдоль S количественно характеризует (в линейных единицах) действие турбинных механизмов или потери напора.

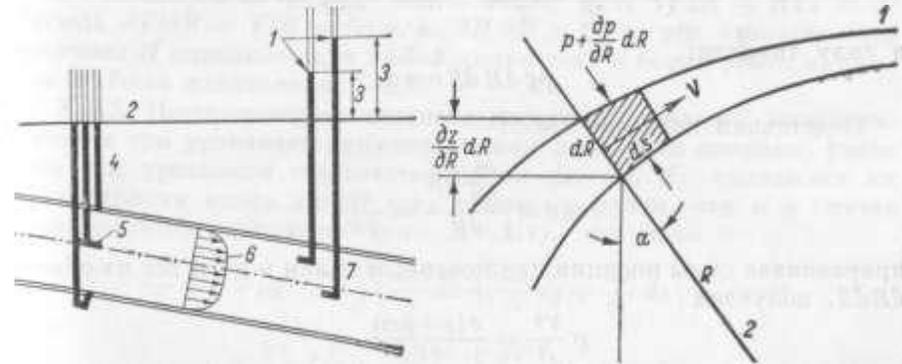


Рис. X-7. В вихревом потоке полный напор изменяется от одной линии тока к другой.

1 — полные напоры; 2 — пьезометрический напор; 3 — скоростные напоры; 4 — напоры давления; 5 — пластина; 6 — распределение скорости; 7 — трубки Пито.

Рис. X-8. Обозначения.

1 — линии тока; 2 — радиус кривизны.

X-3.1.5. Важно отметить, что в вихревом потоке величина H изменяется при переходе от одной линии тока к другой, в то время

как в безвихревом потоке величина H для любой линии тока одинакова. Рисунок X-7 иллюстрирует этот результат.

X-3.2. Распределение давления в направлении, перпендикулярном к линиям тока. X-3.2.1. В безвихревом потоке изменение p в любом направлении находится путем применения уравнения Бернулли к известному полю скорости.

В вихревом потоке уравнение Бернулли дает изменение p вдоль линии тока как функцию изменения V , но не дает никаких указаний на то, каким образом происходит изменение p в направлении, перпендикулярном к линиям тока. В инженерной практике, однако, одинаково важно знать изменение p в обоих указанных направлениях.

Мы видели, что распределение давления в однородном потоке является гидростатическим (см. X-2.1.2). Гидростатический закон сохраняет силу также в том случае, когда кривизна траекторий невелика.

X-3.2.2. Рассмотрим теперь общий случай, когда кривизна линий тока (траекторий) имеет заметную величину. Рассмотрим бесконечно малый, искривленный отрезок двухмерной трубки тока, показанный на рис. X-8, и элементарную массу жидкости $\rho dR dS$, заключенную в этой трубке.

Поскольку движение происходит в направлении трубки тока, то это означает, что действие приложенных сил и сил инерции на указанную элементарную массу в направлении, перпендикулярном к линиям тока, уравнивает друг друга.

Инерция элементарной массы порождает центробежную силу, равную $\rho dR dS V^2/R$, где R — радиус кривизны линий тока. Приложенные силы представляют собой разность сил давления, действующих на две линии тока:

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial R} dR\right) dS - p dS = \frac{\partial p}{\partial R} dR dS$$

и силу тяжести:

$$\rho g dR dS \cos \alpha.$$

Подставляя значение $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial z}{\partial R} dR}{dR} = \frac{\partial z}{\partial R},$$

приравнявая силы инерции приложенным силам и деля все на объем $dR dS$, получаем

$$\rho \frac{V^2}{R} = \frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial R},$$

или

$$\rho \frac{V^2}{R} = \frac{\partial p^*}{\partial R},$$

или также

$$\frac{V^2}{gR} = \frac{\partial \left(\frac{p^*}{\omega}\right)}{\partial R},$$

или еще

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V^2}{g} \ln R - \frac{p^*}{\omega} \right) = 0.$$

Интегрирование этого уравнения вдоль dR позволяет рассчитать распределение давления по полю скорости вдоль искривленной границы, например вдоль приподнятого носка водослива.

Если R стремится к бесконечности, то величина $(\partial/\partial R)(p^*/\omega)$ стремится к нулю и $p^* = \text{const}$, как и было найдено для случая однородного потока (см. X-2.1.2).

X-3.2.3. Вывод, проделанный выше, не требовал допущения отсутствия завихренности. Следовательно, он справедлив как для безвихревого потока, так и для вихревого. Мы видели, что в безвихревом потоке распределение давления можно также найти с помощью уравнения Бернулли, которое в этом случае справедливо для любого направления, в том числе и для направления, перпендикулярного к линиям тока. Таким образом, в безвихревом потоке для расчета распределения давления по направлению, перпендикулярному к линиям тока, существуют два метода. Очевидно, что они должны давать одинаковый результат. Это можно продемонстриро-

вать, комбинируя полученную выше формулу с условием отсутствия завихренности.

Очень легко показать, что изменение полного напора $H = V^2/2g + p^*/\omega$ вдоль радиуса кривизны R в безвихревом потоке равно нулю, т. е. что $\partial H/\partial R = 0$. Подставляя сюда выражение, полученное в X-3.2.2, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{p^*}{\omega} \right) = \frac{V}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} \right).$$

В безвихревом потоке $VR = \text{const}$, т. е. $VdR + RdV = 0$. Отсюда $\partial V/\partial R + V/R = 0$, т. е. $\partial H/\partial R = 0$, а это означает, что величина H одинакова для любой линии тока в безвихревом потоке, как и было показано в X-2.3.

X-3.3. Нестационарное вихревое движение идеальной жидкости. Вводя в три уравнения движения члены локальной инерции, умножая эти уравнения соответственно на dx , dy , dz , складывая их и интегрируя вдоль линии тока таким же путем, как и в случае стационарного движения (см. X-3.1.1), получаем

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z + \rho \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) = \text{const},$$

или

$$\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z + \rho \int \frac{\partial V}{\partial t} dS = \text{const},$$

т. е.

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0,$$

или, поделив все на ρg :

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial S} = 0.$$

Если учесть силы трения, то последнее выражение будет меньше нуля.

X-4. Выводы и наиболее важные формулы

В этой главе рассматривалась идеальная жидкость. В соответствии с этим допущением были получены следующие формулы:

Закон гидростатики, стационарное медленное движение —

$$p^* = p + \rho g z = \text{const};$$

стационарный однородный поток (реальная жидкость); ось OZ составляет угол α с вертикалью —

$$p + \rho g z \cos \alpha = \text{const};$$

нестационарное медленное движение —

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p^* = f(t);$$

условие на свободной поверхности для нестационарного медленного движения —

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0;$$

стационарный безвихревой поток —

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + z = \text{const};$$

нестационарное безвихревое движение —

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + z = f(t);$$

стационарный вихревой поток —

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + z \right) = 0;$$

стационарный поток (вихревой либо безвихревой) —

$$\frac{V^2}{gR} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{p}{\omega} + z \right);$$

нестационарный вихревой поток —

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + z \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Все эти формулы получены точным интегрированием. К сожалению, в инженерной практике могут найти применение лишь формулы, полученные для случая, когда движение считается безвихревым.

В случае вихревого движения интегрирование удастся осуществить только вдоль бесконечно тонкой трубки тока, сводящейся к линии тока. Для того чтобы можно было использовать эти формулы на практике, надо выполнить интегрирование по поперечному сечению. Этот вопрос будет рассмотрен в главе XII «Обобщение уравнения Бернулли».

УПРАЖНЕНИЯ

Х-1. Скорость вокруг краев кругового цилиндра дается уравнением

$$V = 2U \sin \theta,$$

где U — скорость на бесконечно большом расстоянии от цилиндра, где давление равно p_∞ . Определите распределение давления вокруг цилиндра.

О т в е т:

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2 [1 - 4 \sin^2 \theta].$$

Х-2. Покажите, что для стационарного потока справедливо равенство

$$2(u\eta - v\xi) = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right],$$

а также два других подобных соотношения, получаемых из приведенного путем круговой перестановки членов.

О т в е т:

$$2(u\xi - w\xi) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right],$$

$$2(v\xi - u\eta) = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right].$$

Х-3. Потенциал скорости для потока, обтекающего сферу радиуса R , дается выражением

$$\varphi = U \left(\frac{R^3}{2r^2} + r \right) \cos \theta.$$

Определите распределение скорости и давления вокруг сферы:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

На основании полученного результата объясните форму дождевой капли, а также объясните, принимая во внимание наличие капиллярных эффектов, почему существует максимальный критический размер капли, который не может быть превзойден.

О т в е т:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -1,5U \sin \theta;$$

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right).$$

Х-4. Волновой фильтр состоит из проволочной сетки, опущенной в поток жидкости. Такой фильтр создает пренебрежимо малые возмущения потока. Однако он приводит к появлению силы внутреннего трения F , пропорциональной средней скорости, т. е. $F = -KV$. Движение потока будем считать безвихревым. Установите условие на свободной поверхности, которое следует использовать вместо условия Коши — Пуассона в случае, когда коэффициент пустотности равен единице (т. е. фильтр практически нематериален), и в случае, когда он имеет конечную величину $\varepsilon < 1$.

О т в е т:

$$V = \text{grad } \varphi,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{dV}{dt} + \text{grad} \left[\frac{p}{\rho} + gz \right] + KV = 0.$$

Линеаризуя, получаем:

$$\text{grad} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + K\varphi \right] = 0.$$

На свободной поверхности, где $z = \eta$, имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{g}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + K \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

КАРТИНА ПОТОКА. ФУНКЦИЯ ТОКА. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ

XI-1. Общие соображения об определении картины потока

Законы, определяющие движение бесконечно малой частицы жидкости, были установлены в части I (см. II-9). Затем, в главе X, были получены некоторые общие соотношения между давлением и силой тяжести и скоростью. Связь между указанными величинами дается уравнением Бернулли, которое было выведено с помощью точного интегрирования независимо от граничных условий. Было показано, что такое интегрирование превращает равенство между силой и изменением количества движения в равенство между работой и энергией. Из полученных общих соотношений можно определить давление p по известной скорости V и наоборот.

Кроме того, дифференциальные уравнения, полученные из уравнений движения и неразрывности, позволяют нам непосредственно найти теоретическое решение любой конкретной задачи, т. е. определить скорость V (или давление p), если поставлены определенные граничные условия. Эти граничные условия определяют рассматриваемый конкретный случай, например случай ламинарного потока на наклонной плоскости, рассмотренный в VI-2.

Однако в большинстве случаев, встречающихся в инженерной практике, граничные условия обычно слишком сложны, и, как указывалось выше, общего решения уравнений неразрывности и Навье — Стокса, по-видимому, не существует. Поэтому применение теории ограничено только самыми простыми случаями. Тем не менее в целом ряде практических задач рассматриваются ситуации, очень близкие к тем простым случаям, которые поддаются математическому анализу. Решение таких задач может быть выполнено после выбора схематизированных граничных условий, выраженных в достаточно простой математической форме.

Цель настоящей главы заключается в изучении некоторых из таких точных математических методов. Кроме того, на математических принципах, изложенных в этой главе, основан целый ряд приближенных методов: графических, численных или экспериментальных. Приближенные методы значительно расширяют область применения теории и включают случаи с более сложными граничными условиями. Одним из таких приближенных методов является хорошо известный метод гидродинамических сеток.

Здесь всюду имеется в виду, что слово «точный» относится только к математическим операциям. Физическая точность зависит от пределов применимости основных допущений, необходимых для использования данного метода.

Уже отмечалось, что определению подлежат две неизвестные функции: скорость V и давление p , и что теоретически обе эти величины могут быть непосредственно найдены из уравнений движения

и неразрывности. Однако во многих случаях рассматриваемые методы позволяют лишь построить распределение относительной скорости в виде поля скорости, рассчитанного по уравнению неразрывности с использованием некоторых допущений, например допущения об отсутствии завихренности. Вычисление абсолютной величины скорости представляет собой второй этап расчета. Этот этап весьма несложен, если известна абсолютная величина скорости в какой-либо одной точке или на границе. На третьем этапе определяется распределение давления. Это делается с помощью установленных в главе X соотношений между V и p , таких как уравнение Бернулли.

В этой главе рассмотрена задача определения поля скорости с помощью некоторых особо важных аналитических методов. Эти аналитические методы основаны на использовании двух математических понятий, позволяющих кратко и выразительно описать картину потока в целом. Этими понятиями являются: функция тока и потенциал скорости.

XI-2. Функция тока

XI-2.1. **Определение.** Функция тока представляет собой математическое средство компактного и четкого описания картины потока с помощью его линий тока.

Функция тока может быть использована для вычисления потока несжимаемой жидкости любого типа: вихревого и безвихревого, стационарного и нестационарного, двухмерного и трехмерного, ламинарного и турбулентного, медленного и не медленного. В случае турбулентного движения, однако, имеется в виду, что линии тока описывают только осредненное по времени движение, т. е. вектор средней скорости \bar{V} . Функцию тока можно использовать также для описания движения, осредненного по пространству, т. е. для потока через пористую среду при любом значении числа Рейнольдса.

Хотя теоретически функция тока может быть определена и использована и в случае трехмерного движения, однако ее расчет в этом случае очень сложен, а применимость ограничена. Поэтому на практике она используется главным образом в двухмерном потоке, и только этот случай и будет рассмотрен в данной книге.

Функцию тока можно определить с помощью любой из нескольких ее характеристик, и тогда другие характеристики можно вывести из выбранного определения. Определим функцию тока через компоненты скорости так же, как мы это сделали для потенциала скорости ϕ .

XI-2.2. **Функция тока и неразрывность.** Определение функции тока естественным образом вытекает из уравнения неразрывности $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$. Действительно, рассмотрим функцию $\psi(x, y, t)$, причем $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. Из уравнения неразрывности следует, что в любом случае $(\partial/\partial x)(\partial\psi/\partial y) - (\partial/\partial y)(\partial\psi/\partial x) = 0$, т. е. функция ψ всегда удовлетворяет условию неразрывности. Другими словами, существование функции ψ подразумевает выполнение условия неразрывности, и наоборот, условие неразрывности подразумевает существование функции тока.

XI-2.3. Функция тока, линии тока и расход. Функция $\psi = \text{const}$ является не только уравнением одной линии тока, но и уравнением для любой линии тока в рассматриваемом потоке. Различными линиям тока соответствует различное значение постоянной в правой части.

Чтобы подтвердить сказанное, рассмотрим уравнение линии тока $dx/u = dy/v$ (см. (I-2.3)), которое можно переписать в виде $u dy - v dx = 0$. Подставляя величины u и v , выраженные через ψ , получим уравнение для линий тока в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0.$$

Левая часть представляет собой полный пространственный дифференциал от $\psi(x, y, t)$. Поэтому уравнение для любой линии тока

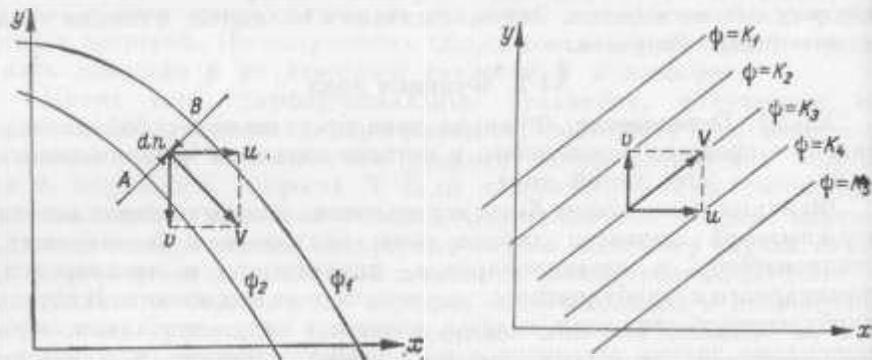


Рис. XI-1. Расход и функция тока; Рис. XI-2. Однородный поток, определяемый функцией тока.

можно записать в виде $d\psi = 0$, или в случае стационарного движения в виде $\psi(x, y) = \text{const}$, а в случае нестационарного движения в виде $\psi(x, y, t_0) = \text{const}$. Изменение величины константы в правой части дает различные линии тока в рассматриваемом потоке, но сама функция $\psi(x, y)$ сохраняет свою аналитическую форму неизменной. Именно по этой причине функция ψ и называется функцией тока.

Рассмотрим картину потока, показанную на рис. XI-1. Расход dQ , проходящий через элемент dn , перпендикулярный к линиям тока, равен

$$dQ = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi,$$

что также представляет собой полный пространственный дифференциал от ψ . Отсюда следует, что $V = dQ/dn = d\psi/dn$.

Полный расход между двумя соседними линиями тока $\psi_1(x, y) = K_1$ и $\psi_2(x, y) = K_2$ получаем путем интегрирования от A до B :

$$\int_{AB} dQ = \int_{AB} d\psi = \psi_2 - \psi_1 = \Delta\psi.$$

Таким образом, полный расход между двумя линиями тока выражается разностью соответствующих им значений $\psi_1 = K_1$ и $\psi_2 = K_2$. Средняя величина скорости между точками A и B равна

$$V = \frac{\Delta\psi}{\Delta n} = \frac{\Delta\psi}{AB}.$$

XI-2.4. Пример функции тока — однородный поток. Функция тока в однородном потоке может иметь вид (рис. XI-2)

$$\psi = Ay - Bx.$$

Компоненты скорости в этом случае будут:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = A, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = B,$$

и тогда $V = \sqrt{A^2 + B^2}$. Величина V не зависит от x и y , т. е. поток является однородным.

Уравнение линий тока имеет вид

$$Ay - Bx = K.$$

Линии тока являются прямыми, наклон которых равен $y/x = B/A$. Разным значениям K соответствуют разные линии тока. Расход между двумя линиями тока определяется разностью соответствующих значений K .

XI-2.5. Функция тока и вихревое движение. Интенсивность вихря (см. главу II) определяется выражением $2\zeta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$. Если выразить u и v через ψ , то получим

$$2\zeta = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

т. е.

$$2\zeta = \nabla^2 \psi.$$

Таким образом, безвихревое движение, в котором $\zeta = 0$, определяется функцией тока ψ , являющейся решением уравнения Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$. Другими словами, уравнение $\Delta^2 \psi = 0$ определяет безвихревое движение, удовлетворяющее условию неразрывности. Можно легко показать, что однородный поток, определяемый функцией тока в примере, данным в XI-2.4, является безвихревым.

XI-2.6. Общие замечания об использовании функции тока. Функцию тока можно использовать для расчета картины потока с помощью основных уравнений (движения и неразрывности), выражая в этих уравнениях u и v через ψ . В этом случае задача сводится к нахождению только одной неизвестной ψ вместо двух (u и v), но, в соответствии с определением функции тока, порядок уравнения повышается на одну степень.

Например, рассмотрим уравнения, используемые в теории пограничного слоя (см. IV-5.2.4 и V-4.3):

уравнение неразрывности $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$; уравнение движения $u \partial u/\partial x + v \partial u/\partial y = \nu \partial^2 u/\partial y^2$.

Определяя на основании первого уравнения функцию ψ из соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и подставляя соответствующие значения u и v в уравнение движения, получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Теперь требуется отыскать только одну неизвестную ψ , но само уравнение — третьего порядка, а не второго, как было в случае, когда движение описывалось двумя компонентами скорости u и v . Одним словом, функция тока позволяет преобразовать систему двух уравнений с двумя неизвестными u и v в одно уравнение более высокого порядка с одним неизвестным.

Введя граничные условия, можно найти из полученного уравнения теоретические значения ψ последовательным интегрированием, после чего величины u и v находятся простым дифференцированием.

XI-3. Потенциал скорости

XI-3.1. Употребление. Потенциал скорости был определен в II-5.3. Подобно функции тока, эта функция является математическим средством компактного описания картины потока.

Потенциал скорости может быть использован для любого типа безвихревого потока: стационарного и нестационарного, двухмерного и трехмерного. Он может применяться для исследования турбулентного движения при условии, что он будет относиться к осредненному по времени движению, а турбулентность будет близкой к изотропной. На практике турбулентный поток за пределами пограничного слоя часто может рассматриваться как безвихревой (см. VIII-2.2).

Потенциал скорости может применяться и для изучения потока сквозь пористую среду, если он будет относиться к осредненному по пространству движению, а число Рейнольдса будет меньше единицы (см. IX-2.6).

За исключением этого последнего случая, потенциал скорости может применяться только, если влияние трения пренебрежимо мало и в коротких сужающихся гидротехнических сооружениях. При его использовании для дивергентной (расходящейся) части потока надо помнить, что силы конвективной инерции часто приводят к явлению отрыва и появлению вихревых зон и что существует ограничение для возможности применения потенциала скорости. Если поверхность отрыва известна, то поток за пределами застойной зоны также можно описывать с помощью потенциала скорости при условии, что влияние трения пренебрежимо мало, как это делалось в конвективной (сходящейся) части потока.

XI-3.2. Определение. Напомним, что потенциал скорости определяется как такая функция от (x, y, z, t) , которая, будучи продифференцирована по любому направлению, дает компоненту ско-

рости в этом направлении. Например, скорость в направлении S равна: $V = (\partial \psi / \partial S)$ или $d\psi = V \cdot dS$.

В частности, в направлении осей OX, OY, OZ функция ψ определяется выражениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

XI-3.3. Потенциал скорости и вихревое движение. Было показано, что потенциал скорости существует только в случае безвихревого движения. Для двухмерного движения условие отсутствия завихренности имеет вид (см. II-4.1)

$$2\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Выражая компоненты скорости через ψ , получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Это выражение представляет собой тождество и означает, что функция ψ всегда удовлетворяет условию отсутствия завихренности; другими словами, существование ψ подразумевает, что поток является безвихревым. Аналогичные выводы можно получить и для трехмерного движения.

Интересно отметить следующую параллель: потенциал скорости является естественным математическим следствием допущения отсутствия завихренности в потоке $\partial u / \partial y - \partial v / \partial x = 0$, точно так же, как функция тока является естественным математическим следствием условия неразрывности $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$.

XI-3.4. Эквипотенциальные линии и эквипотенциальные поверхности. Эквипотенциальной линией в двухмерном движении и эквипотенциальной поверхностью в трехмерном движении называются такая линия или поверхность, в каждой точке которой функция ψ сохраняет постоянное значение:

$$\psi(x, y, z) = \text{const} = K,$$

или

$$\psi(x, y, z, t_0) = \text{const} = K,$$

т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0, \quad \text{или } d\psi = 0.$$

Различные значения постоянной K определяют различные эквипотенциальные линии или поверхности, подобно тому как различные значения функции тока ($\psi = K$) определяют различные линии тока.

С другой стороны, вектор скорости и линии тока всегда перпендикулярны к эквипотенциальным линиям или поверхностям. Рассмотрим уравнение эквипотенциальной линии, данное выше для случая двухмерного потока:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \quad \text{или } u dx + v dy = 0.$$

Отсюда следует, что наклон эквипотенциальной линии равен $dy/dx = -u/v$, т. е. он составляет прямой угол с наклоном линии тока (см. XI-2.3). С помощью соображений более общего характера этот результат следует из того факта, что величины $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ представляют собой направляющие косинусы перпендикуляра к поверхности, определяемой соотношением $\phi = K$.

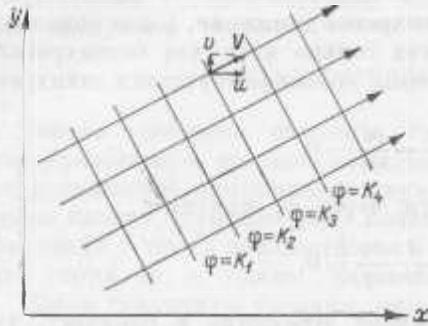


Рис. XI-3. Однородный поток, определяемый потенциалом скорости.

XI-3.5. Потенциал скорости и неразрывность. Напомним, что подстановка функции ϕ в уравнение неразрывности $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ ведет к выражению $\nabla^2\phi = 0$ (см. III-3.4). Аналогично, подстановка функции ψ в уравнение, выражающее отсутствие завихренности, ведет к выражению $\nabla^2\psi = 0$, как было показано в XI-2.6.

Таким образом, двумерный безвихревой поток может быть определен путем решения либо уравнения $\nabla^2\phi = 0$, либо уравнения $\nabla^2\psi = 0$.

Эти соображения иллюстрируются в обобщенном виде следующей таблицей:

<p>Неразрывность служит условием для ОПРЕДЕЛЕНИЯ ϕ, а выражается в виде $\nabla^2\phi = 0$</p>	<p>Отсутствие завихренности служит условием для ОПРЕДЕЛЕНИЯ ψ, а выражается в виде $\nabla^2\psi = 0$</p>
---	--

Одним словом, оба выражения, и $\nabla^2\phi = 0$ и $\nabla^2\psi = 0$, определяют безвихревое движение, удовлетворяющее условию неразрывности.

XI-3.6. Пример потенциала скорости: однородный поток. Наиболее простым примером является двумерный однородный поток, для которого потенциал скорости имеет вид (рис. XI-3)

$$\phi = Ax + By.$$

Компоненты скорости в любой точке будут:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = A, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = B, \quad V = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Это тот же самый поток, который задавался функцией тока

$$\psi = Ay - Bx.$$

Эквипотенциальные линии задаются путем приравнивания ϕ различным константам K :

$$Ax + By = K.$$

Эти линии являются прямыми, наклон которых равен

$$\frac{y}{x} = -\frac{A}{B}$$

Отметим, что эти эквипотенциальные линии перпендикулярны к линиям тока (см. XI-3.4).

XI-3.7. Общие замечания об использовании потенциала скорости. Введение ϕ вместо u , v и w в основные уравнения движения и неразрывности сводит число неизвестных от трех (или двух в случае двумерного движения) к одному. Однако порядок производных повышается на одну степень. Тогда подлежащая решению система уравнений приобретает следующий общий вид:

$$\begin{aligned} &\text{уравнение неразрывности: } \nabla^2\phi = 0; \\ &\text{уравнение движения: } \rho\frac{d\phi}{dt} + (\rho/2)[(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2 + (\partial\phi/\partial z)^2] + p + \rho gz = f(t). \end{aligned}$$

Это уравнение движения часто используется в качестве условия на свободной поверхности, причем тогда $p = \text{const}$. Но в этом случае приходится вводить другую неизвестную функцию: $z = \eta(x, y, t)$, являющуюся уравнением свободной поверхности. Правда, в случае бесконечно малых движений эта неизвестная может быть исключена, и уравнение движения вместе с уравнением свободной поверхности просто заменяются так называемым условием Коши — Пуассона:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0.$$

Этот вопрос рассмотрен в главе XVI. Граничное условие на фиксированной твердой границе имеет вид $\partial\phi/\partial n = 0$, что указывает на равенство нулю компоненты скорости, перпендикулярной к границе. Безвихревой поток под давлением определяется, по крайней мере в относительных величинах, только из условия неразрывности $\nabla^2\phi = 0$ и условия на фиксированной границе $\partial\phi/\partial n = 0$.

XI-4. Стационарное, безвихревое, двумерное движение. Циркуляция скорости

XI-4.1. Обзор. Пример. Полярные координаты. XI-4.1.1. Обзор предыдущих результатов. Как было показано выше, безвихревое двумерное движение удовлетворяет всем условиям, представленным в обобщенном виде в следующей таблице, которая подчеркивает параллельность свойств функции тока и потенциала скорости:

<p>Непрерывность</p> $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ <p>позволяет определить</p> <p>функцию тока ψ</p>	<p>Отсутствие завихренности</p> $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ <p>позволяет определить</p> <p>потенциал скорости ϕ</p>
<p>Линии тока определяются выражениями $d\psi = 0$; $\psi = K$</p>	<p>Эквипотенциальные линии определяются выражениями $d\phi = 0$; $\phi = K$</p>
<p>Выражения для компонент скорости имеют вид:</p> $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x};$ $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y};$ $V = \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial S}$	
<p>dn — элемент эквипотенциальной линии, определяемой уравнением $d\phi = 0$; dn перпендикулярен к линиям тока</p>	<p>dS — элемент линии тока, определяемой уравнением $d\psi = 0$; dS — перпендикулярен к эквипотенциальным линиям</p>
<p>Отсутствие завихренности выражается уравнением $\nabla^2 \psi = 0$</p>	<p>Условие непрерывности выражается уравнением $\nabla^2 \phi = 0$</p>

Из перечисленных свойств следуют и многие другие, которые позволили разработать целый ряд весьма гибких и эффективных методов изучения стационарного, безвихревого, двухмерного

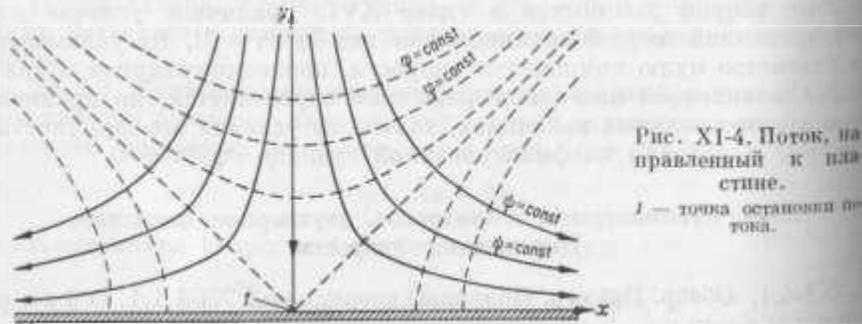


Рис. XI-4. Поток, направленный к пластине.
I — точка остановки потока.

движения. Поэтому такое движение занимает в гидродинамике и инженерной практике чрезвычайно важное место, ибо многие виды трехмерного движения могут с успехом исследоваться как двухмерные, так как либо вертикальной компонентой, либо одной из горизонталь-

ных часто можно пренебречь. Например, поток в широкой реке, где влияние подпора слабо, или поток к скважине часто могут рассматриваться как двухмерное движение.

Читатель может обратиться к главе II и к разделу XI-3.1, чтобы вспомнить, когда поток может считаться безвихревым и когда, следовательно, можно применять излагаемые ниже методы.

XI-4.1.2. Пример: поток в сторону перпендикулярной пластинки (или поток внутри прямого угла). Простой пример однородного потока уже был рассмотрен. Другим примером безвихревого двухмерного потока является поток, определяемый функцией тока: $\psi = xy$. Задаваясь различными постоянными значениями ψ , мы получаем, что линии тока представляют собой семейство прямоугольных гипербол, дающих картину потока, направленного к пластинке, расположенной перпендикулярно к первоначальному движению (рис. XI-4). Такое движение является безвихревым, поскольку

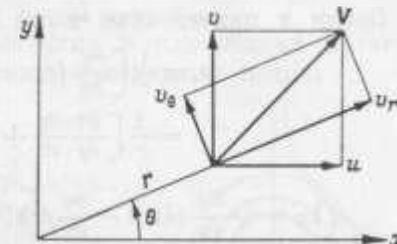


Рис. XI-5. Полярные координаты; обозначения.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Следовательно, существует потенциал скорости. Его можно найти, рассматривая следующие равенства:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y.$$

Отсюда

$$\phi = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + f(y), \quad \psi = -\int y dy = -\frac{1}{2} y^2 - f(x).$$

Легко показать, что выражение $\phi = (1/2)(x^2 - y^2)$ удовлетворяет обоим указанным выше условиям.

Эквипотенциальные линии, определяемые уравнением $\phi = \text{const}$, образуют семейство прямоугольных гипербол, в любой точке нормальных к линиям тока.

XI-4.1.3. Полярные координаты. Перед переходом к изучению некоторых типичных картин потока полезно установить ряд фундаментальных соотношений в полярных координатах. Из рис. XI-5 видно, что

$$V = u + v = v_r + v_\theta,$$

или

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta.$$

Также можно записать:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta; \\ \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta; & \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\sin \theta; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta; & \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Вводя в приведенные выше уравнения функцию ψ , получаем

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} (r \cos \theta) + \frac{\partial \psi}{\partial x} (-r \sin \theta) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\end{aligned}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \theta = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Вводя функцию φ , получаем:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (r \cos \theta) \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Окончательно находим:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Путем аналогичных выкладок находим, что условие отсутствия завихренности для двумерного потока

$$2\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

в цилиндрических координатах будет иметь вид

$$2\zeta = \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0.$$

XI-4.2. Элементарные формы потока и циркуляция.

XI-4.2.1. Элементарные формы потока. Многие случаи, встречающиеся в инженерной практике, очень близки к некоторым стандартным формам потока. Большое число стандартных форм можно получить путем комбинации или преобразования трех основных элементарных форм. Этими тремя основными формами потока являются (рис. XI-6):

а) однородный поток, рассмотренный в виде примера в XI-2.4 и XI-3.6;

б) радиальный поток с источником либо стоком в центре;

в) круговой поток или водоворот (потенциальный вихрь), который является безвихревым потоком с так называемой циркуляцией скорости. Если имеется один такой водоворот или сочетание

нескольких водоворотов, то результирующая сложная картина потока остается безвихревой. Однако циркуляция скорости не может быть равной нулю, если область, определяемая путем интегрирования, включает один водоворот.

XI-4.2.2. Формы потока без циркуляции скорости. В качестве примеров приведем несколько элементарных комбинаций форм потока без циркуляции (рис. XI-7):

- источник и сток;
- дублет — источник и сток в одной точке;
- поток вокруг полутела — источник и однородный поток;
- обтекание цилиндра — дублет и однородный поток;

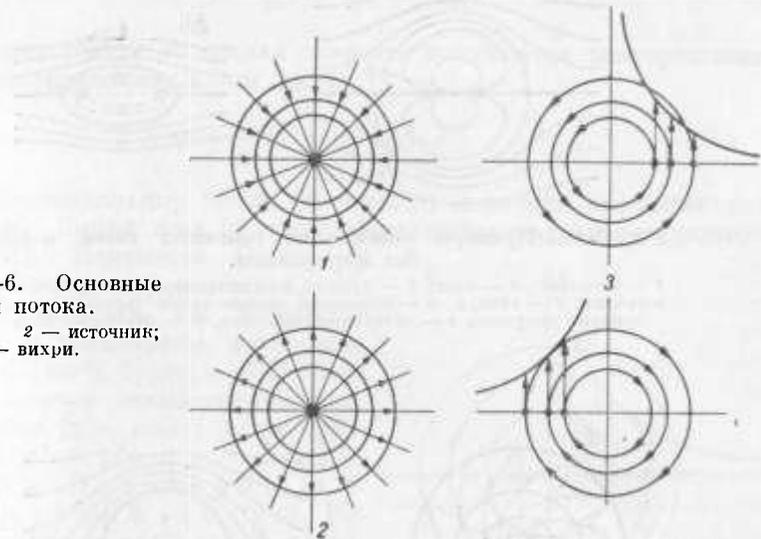


Рис. XI-6. Основные типы потока.
1 — сток; 2 — источник;
3 — вихри.

д) обтекание длинного тела (тело Рэнкина или закрепленное удобообтекаемое тело) — источник, сток и однородный поток; или источник, серия стоков и однородный поток.

XI-4.2.3. Формы потока с циркуляцией скорости. Примерами элементарных комбинаций форм потока с циркуляцией скорости являются (рис. XI-8):

- спиральный водоворот — сток и водоворот;
- обтекание цилиндра с циркуляцией скорости;
- обтекание цилиндра с циркуляцией скорости можно с помощью конформного отображения преобразовать в поток вокруг крыла. Этот вопрос относится к теории крыла.

XI-4.2.4. Источник и сток. Источник представляет собой радиальный поток, направленный наружу от центральной точки, которая считается бесконечно малой (рис. XI-6). Сток представляет собой радиальный поток, направленный внутрь к центральной точке.

На практике такой поток довольно хорошо описывает поток сквозь пористую среду в направлении скважины небольшого

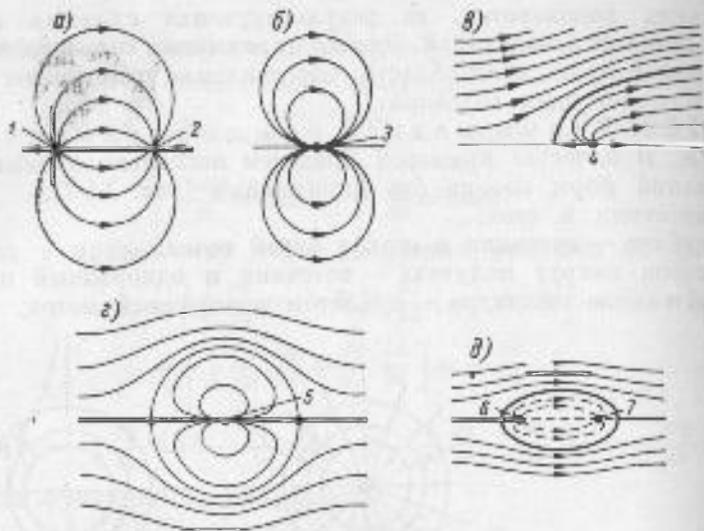


Рис. XI-7. Примеры комбинаций основных типов потока без циркуляции.

1 — источник; 2 — сток; 3 — диплет; 4 — источник; 5 — диплет; 6 — источник; 7 — сток; а, б — отдельные особые точки потока; з — обтекание полутела; з — обтекание цилиндра; д — обтекание тела.

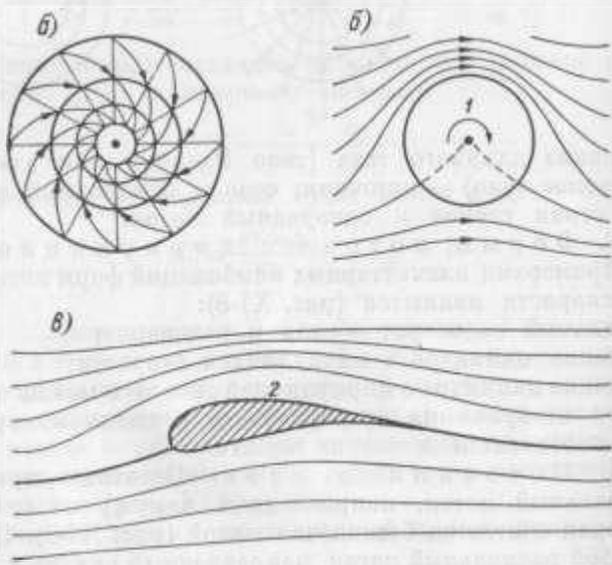


Рис. XI-8. Примеры потока с циркуляцией скорости.
1 — циркуляция; 2 — воздушное крыло; а — спиральный вихрь; б — обтекание цилиндра, в — обтекание крыла.

диаметра, если вертикальная компонента мала, т. е. если мала кривизна зеркала грунтовых вод. Однако главная причина интереса к этим элементарным формам заключается, как указывалось, в том, что обычно встречающиеся в инженерной практике сложные формы потока часто можно представить в виде комбинации источников, стоков и других элементарных форм.

Пусть расход источника равен Q . Компоненты скорости в любой точке будут:

$$v_{\theta} = 0 \text{ (из соображений симметрии),}$$

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Функция тока и потенциал скорости получают непосредственным интегрированием. Они равны:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

Эквипотенциальные линии ($\varphi = \text{const}$) являются окружностями ($r = \text{const}$). Линии тока ($\psi = \text{const}$) являются прямыми радиусами ($\theta = \text{const}$). Изменение Q на $-Q$ дает функции φ и ψ для стока.

Легко показать, что потенциал скорости в трехмерном источнике, где $V = Q/(4\pi r^2)$, будет: $\varphi = Q/(4\pi r)$. В этом случае эквипотенциальные поверхности ($\varphi = \text{const}$) будут представлять собой сферы ($r = \text{const}$).

XI-4.2.5. Водоворот (потенциальный вихрь). Водоворот представляет собой поток, в котором линии тока являются концентрическими окружностями (рис. XI-9). В «вынужденном водовороте» вода вращается как монолитная масса и скорость пропорциональна расстоянию от центра (см. II-4.1).

Здесь мы изучаем «свободный водоворот» (потенциальный вихрь). Поток такого типа является чисто математическим понятием, не имеющим физического эквивалента. Однако в сочетании с другими простыми потоками, такими как однородный поток или сток, он может иметь физический смысл.

В свободном водовороте распределение скорости определяется законом $Vr = \text{const} = K/(2\pi)$. Отсюда видно, что v_{θ} стремится к бесконечности при стремлении r к нулю. Такое движение является безвихревым.

Поскольку движение вдоль радиуса отсутствует, то

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

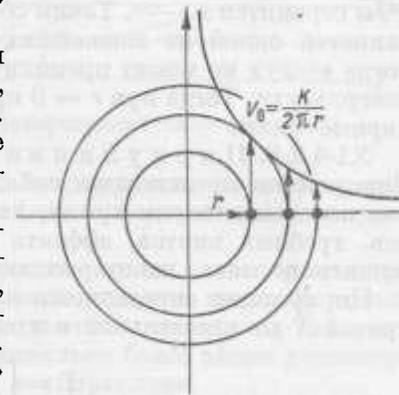


Рис. XI-9. Потенциальный вихрь.

Отсюда получаем

$$v_{\theta} = V = \frac{K}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

что дает нам выражения:

$$\varphi = \frac{K}{2\pi} \theta, \quad \psi = - \int \frac{K}{2\pi r} dr = - \frac{K}{2\pi} \ln r.$$

Общий вид картины потока такой же, как и в случае источника или стока, только линии тока и эквипотенциальные линии поменялись теперь местами. Поскольку поток является безвихревым, то в любом месте его можно использовать уравнение Бернулли:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p^*}{\omega} = \text{const},$$

откуда

$$\frac{K^2}{8\pi^2 r^2 g} + \frac{p^*}{\omega} = \text{const}.$$

Интересно отметить, что когда r стремится к нулю, величина p^*/ω стремится к $-\infty$. Таким образом, наличие водоворотов в потоке является одной из важнейших причин возникновения кавитации, когда воздух не может проникнуть в центр водоворота со свободной поверхности. Тогда при $r \rightarrow 0$ приобретают большое значение капиллярные силы.

XI-4.2.6. Циркуляция скорости. Определение. Циркуляция представляет собой математическое понятие, на котором основаны теории крыла, лопастей турбин и насосов, пропеллеров, гребных винтов, эффекта Магнуса, вызывающего отклонение теннисного мяча, некоторых видов движения песка в потоке, и др.

Циркуляция определяется как интеграл вдоль любой замкнутой кривой S от касательной к этой кривой компоненты скорости V_S :

$$\Gamma = \int_S V_S dS.$$

Можно показать, что в безвихревом потоке циркуляция Γ равна нулю. Исключение составляет случай, когда область, окруженная замкнутой кривой, включает точку, являющуюся центром свободного водоворота. Тогда

$$\Gamma = v_{\theta} \cdot 2\pi r$$

и, поскольку

$$v_{\theta} = \frac{K}{2\pi r},$$

то

$$\Gamma = K.$$

Такой поток называется безвихревым потоком с циркуляцией. В вихревом потоке циркуляция вдоль замкнутой кривой в общем отлична от нуля, и можно показать, что циркуляция вдоль кривой,

окружающей элементарную площадь $dx dy$, равна $d\Gamma = \zeta dx dy$. Можно также показать, что циркуляция Γ равна потоку вектора вихря, имеющего компоненты ζ, η, ξ , через рассматриваемую площадь, ограниченную кривой S . Здесь мы ограничимся только определением важного понятия циркуляции. Применение его требует изучения разделов гидромеханики, выходящих за пределы содержания этой книги.

XI-4.3. Комбинация элементарных форм потока. Как указывалось выше, большое количество весьма сложных форм потока можно получить простым наложением друг на друга трех основных

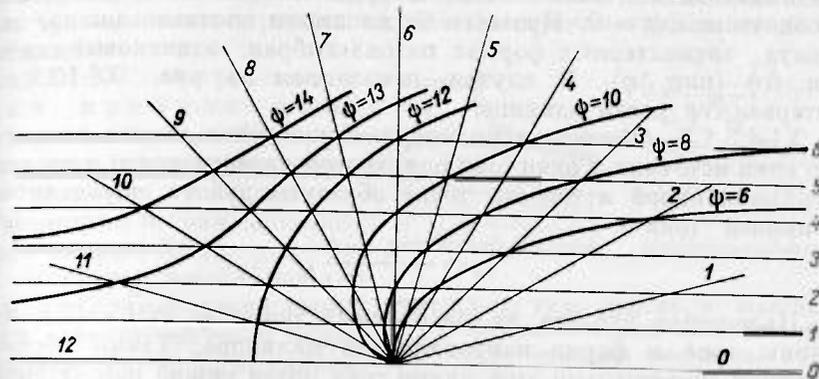


Рис. XI-10. Графический метод суперпозиции типов потока.

элементарных форм, рассмотренных в предыдущих параграфах: однородного потока, радиального потока (источника или стока) и кругового потока (водоворота).

Сначала будут даны примеры, а затем путем рассмотрения граничных условий будет проанализированы условия, которым должны удовлетворять суммируемые формы потока, потенциал скорости и функции тока. Кроме того, дано несколько более общее рассмотрение методов расчета, применяемых в гидравлике.

XI-4.3.1. Два примера. XI-4.3.1.1. Обтекание полутела. Мы уже видели, что однородный поток может быть определен выражениями $\varphi_1 = Ax$ или $\psi_1 = Ay$. Источник может быть определен выражениями $\varphi_2 = (Q/2\pi) \ln r$ или $\psi_2 = (Q/2\pi)\theta$. Суммирование дает форму потока, определяемую потенциалом скорости

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Ax + \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

и функцией тока

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Ay + \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Эта форма потока показана на рис. XI-10. Можно ясно видеть, что центральная линия тока полностью отделяет источник от внешней части плоскости. Эту линию тока можно рассматривать, например, как закругленный конец пирса. Если рассматривать рисунок

как вертикальное сечение потока, то его верхняя половина может служить изображением ветрового потока над холмом.

Линии тока и эквипотенциальные линии могут быть получены графически из двух исходных форм потока. Для этого достаточно найти ряд точек, в которых сумма величин $\psi_1 = K_1$ (или $\varphi_1 = K'_1$) и $\psi_2 = K_2$ (или $\varphi_2 = K'_2$) равнялась бы одной и той же величине K (K'). Например, пересечение линий $\psi_1 = 4$ и $\psi_2 = 5$ определяет точку со значением $\psi = \psi_1 + \psi_2 = 9$. Пересечение линий $\psi_1 = 3$ и $\psi_2 = 6$ также определяет точку со значением $\psi = 9$. Линия, соединяющая все такие точки, и будет линией тока, помеченной обозначением $\psi = 9$. Провести такие линии очень несложно, если в двух элементарных формах потока выбран одинаковый интервал $\Delta\psi$ (или $\Delta\varphi$). В случае, показанном на рис. XI-10, этот интервал $\Delta\psi$ равен единице.

XI-4.3.1.2. *Обтекание цилиндра.* Аналогично можно показать, что один источник и один сток одинаковой интенсивности и расположенные в одной и той же точке образуют дублет, определяемый функцией тока

$$\psi_1 = -\frac{K \sin \theta}{r}.$$

Наложение дублета на однородный поток $\psi_2 = Ur \sin \theta$ дает линию тока в форме направляющей цилиндра. Таким образом, внешний относительно этой линии тока поток можно рассматривать как поток идеальной жидкости, обтекающей цилиндр. Функция тока для такого потока имеет вид

$$\psi = -\frac{K \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta,$$

или

$$\psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta,$$

где $R = \sqrt{K/U}$, а U — скорость на бесконечном удалении от цилиндра. Можно показать, что R — радиус цилиндра. Потенциал скорости будет

$$\varphi = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta.$$

Распределение скорости вокруг цилиндра описывается выражением

$$V = v_\theta|_{r=R} = \frac{4}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2U \sin \theta,$$

а распределение давления — выражением

$$(p - p_\infty) = \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta),$$

где p_∞ — давление на бесконечности. Можно показать, что чистая сила давления на цилиндр, определяемая выражением

$$F = 4 \int_0^{\pi/4} p \cos \theta R d\theta,$$

равна нулю. Этот результат является общим. Полная сила, действующая со стороны однородного потока идеальной жидкости на погруженное тело, при отсутствии циркуляции скорости равна нулю. Это парадокс Даламбера.

XI-4.3.2. *Общее правило суммирования.* Поскольку $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ являются решениями уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$, то и любая комбинация $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$ также является решением этого же уравнения, и, таким образом, описываемая ею форма потока возможна. Такое же правило существует для функции тока ψ , являющейся решением уравнения $\nabla^2 \psi = 0$. Это правило имеет ограничения. Их мы и рассмотрим в следующем разделе.

XI-4.3.3. *Ограничения правила суммирования.* Примеры позволят лучше понять сущность наших рассуждений. Рассмотрим потоки, показанные на рис. XI-11.

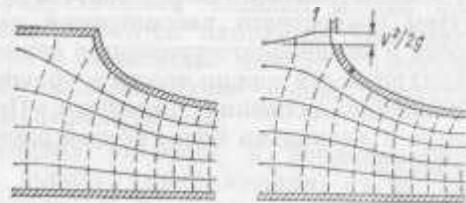


Рис. XI-11. Типы потока в зависимости от формы свободной поверхности.

1 — свободная поверхность.

В случае потока под давлением суммирование решений, характеризуемых скоростями V_1 и V_2 в данной точке, не изменяет формы потока, поскольку она не зависит от абсолютной величины скорости. Во втором же случае, в потоке со свободной поверхностью, форма потока изменится, поскольку наклон свободной поверхности изменяется в зависимости от скорости. В этом случае решения нельзя суммировать, так как они зависят от абсолютной величины скорости. Это происходит оттого, что поток описывается нелинейным уравнением — уравнением движения, или более точно — уравнением Бернулли, в котором возвышение свободной поверхности связано с квадратом скорости. Форму потока под давлением можно определить прямо по фиксированным границам, которые дают положение двух линий тока. Эта форма потока зависит только от линейных соотношений: уравнение неразрывности: $du/dx + dv/dy = 0$, или $\nabla^2 \varphi = 0$; условие отсутствия завихренности: $du/dy - dv/dx = 0$, или $\nabla^2 \psi = 0$;

граничное условие: $\partial \varphi / \partial n = 0$.

Это граничное условие содержит только требование неразрывности. Форма потока зависит не от абсолютной величины скорости, а только от ее относительной величины. Одним словом, решение, описывающее форму потока под давлением, при данных граничных условиях является единственным. Часто вместо граничного условия задается абсолютная величина скорости в какой-либо точке, но само определение этой скорости может потребовать применения нелинейного уравнения движения. На последнем этапе можно независимым образом рассчитать распределение давления с помощью уравнения движения в форме уравнения Бернулли.

Во втором случае поток имеет свободную поверхность. Положение этой свободной поверхности неизвестно и должно быть рассчитано с помощью как нелинейного уравнения движения, так и уравнения неразрывности. Граничное условие на свободной поверхности, $p = \text{const}$, содержит силу и должно быть введено в уравнение движения для расчета формы линий тока свободной поверхности. В свою очередь эта форма оказывает влияние на картину потока.

Таким образом, форма потока и поле скорости — с одной стороны, и распределение давления и линии тока свободной поверхности, с другой, не могут быть рассчитаны независимо последовательными этапами, как в предыдущем случае. Форма потока зависит от абсолютной величины скорости и может быть определена только путем совместного рассмотрения линейного уравнения неразрывности и нелинейного уравнения движения. Допущение об отсутствии завихренности можно ввести в уравнение движения, но это не делает уравнение движения линейным. Приведенные выше соображения ведут к нескольким более общим замечаниям о важности граничных условий.

XI-5. Соображения о важности граничных условий

XI-5.1. Теоретические соображения о различных типах потока. Из изложенного выше следует, что в любом потоке метод определения формы потока зависит от типа граничных условий и от допущений относительно завихренности. С этой точки зрения можно выделить две главные категории движения, которые встречаются во всех методах, применяемых в гидравлике: аналитических, численных, графических или аналоговых. Эти главные категории представляют собой, с одной стороны, безвихревое движение под давлением и медленное движение, а с другой — поток со свободной поверхностью и поток при наличии сил трения.

XI-5.2. Безвихревое движение под давлением и медленное движение. Первая категория включает все виды безвихревого движения под давлением, или движения, которые считают таковыми, а также медленное движение, в котором квадратичными членами можно пренебречь.

XI-5.2.1. Случай потока под давлением. Линии тока на границах полностью определены, поскольку они совпадают с границами. Граничные условия требуют соблюдения условия неразрывности, т. е. чтобы скорость была направлена параллельно границе. Форма потока полностью зависит только от линейных уравнений, выражающих условия неразрывности и отсутствия завихренности. В этом случае форма потока определяется относительно легко.

Поле скорости выражается в относительных величинах. Для перехода к абсолютным величинам в одной точке должна быть известна абсолютная величина скорости, определенная либо из граничного условия, либо путем расчета с помощью уравнения движения на

этой границе (например, с помощью формулы Торичелли $V = \sqrt{2gz}$).

Наконец, распределение давления находится по известному распределению скорости с помощью уравнения движения. С другой стороны, найденная в этом случае по линейным законам картина движения может рассматриваться как результат суперпозиции более простых основных форм потока.

XI-5.2.2. Случай медленного движения. В случае медленного движения это движение математически рассматривается как бесконечно малое, даже в случае наличия свободной поверхности. Поэтому всеми квадратичными членами можно пренебречь, и уравнение движения становится линейным. Свободная поверхность считается известной в начальный момент и совпадающей с горизонтальной линией. В этом случае можно накладывать друг на друга различные формы потока.

Например, если ϕ_1 — потенциал скорости в периодической кавитационной волне первого порядка приближения, т. е. без конвективных инерционных членов, а ϕ_2 — потенциал скорости другой волны, распространяющейся в противоположную сторону, то ϕ_1 и ϕ_2 определяются системой линейных уравнений:

$$\text{уравнение неразрывности: } \nabla^2 \phi = 0;$$

$$\text{уравнение движения; условие на свободной поверхности:}$$

$$[\partial^2 \phi / \partial t^2 + g \partial \phi / \partial z]_{z=0} = 0;$$

$$\text{условие на дне: } [\partial \phi / \partial n]_{z=-d} = 0.$$

Функция $\phi = \phi_1 + \phi_2$ является потенциалом результирующего движения типа стоячих волн или «толчей» (см. XVI-3).

Функции ϕ_1 и ϕ_2 можно рассчитать и для волн в приближении более высокого порядка из нелинейных условий для свободной поверхности, учитывающих конвективную инерцию. Но тогда функцию ϕ , характеризующую результирующее движение, возникающее при взаимодействии двух волн, нельзя получить простым суммированием функций ϕ_1 и ϕ_2 . Ее следует определить из основных уравнений. Аналогичные соображения имеют силу и в случае нерегулярных волн, движущихся в одном и том же направлении с различными скоростями. Здесь имеет место нелинейное взаимодействие.

Итак для того, чтобы можно было складывать потенциальные функции скорости и функции тока, они должны зависеть только от линейных и однородных уравнений. Граничные условия также должны быть однородными.

XI-5.3. Поток со свободной поверхностью и поток при наличии сил трения. Вторая категория движений включает все движения со свободной поверхностью, или движения, в которых силы трения не являются пренебрежимо малыми, в результате чего движение является вихревым.

XI-5.3.1. Поток со свободной поверхностью. Условие на свободной поверхности содержит силу ($p = \text{const}$). Таким образом, его можно подставить только в уравнение движения, выражающее равенство сил.

Форма потока зависит не только от линейного уравнения неразрывности, но и от нелинейного уравнения движения, которое сводится к линейному только в случае однородного движения. Картина потока можно рассчитать, совместно используя уравнение неразрывности и уравнение движения на свободной поверхности. Возникающие трудности обусловлены не только нелинейностью, но также и тем, что сама свободная поверхность неизвестна.

XI-5.3.2. Поток при наличии сил трения. При наличии силы трения (приводящей к появлению отличного от нуля вихревого члена) граничное условие имеет вид: $V = 0$. Такое граничное условие должно быть введено также в уравнение движения. Главным затруднением при изучении потока такого типа является нелинейность уравнения движения, обусловленная наличием членов конвективной инерции.

Названные математические трудности очень усложняют исследование. Поэтому в теоретической гидравлике чрезвычайно важную роль играют безвихревое движение под давлением и медленное движение, даже если они лишь приблизительно воспроизводят реальные условия.

XI-6. Гидродинамическая сетка

XI-6.1. Принцип построения гидродинамической сетки. Гидродинамическая сетка представляет собой семейство эквипотенциальных линий, совмещенное с семейством линий тока, что дает характеристику полной картины двухмерного потока (см. XI-2.3).

Равенство $V = \partial\psi/\partial s = \partial\psi/\partial n$ в конечных разностях примет вид: $V = \Delta\psi/\Delta s = \Delta\psi/\Delta n$.

Сначала выбираем постоянную величину $\Delta\psi$ в поле полной скорости, что означает постоянство расхода ΔQ между двумя смежными линиями тока, так как $\Delta\psi = \Delta Q$ (см. XI-2.3). Затем выбираем интервал $\Delta\psi$, равный интервалу $\Delta\psi$, так что $\Delta s = \Delta n$. Величина Δs представляет собой элемент линии тока, а Δn — элемент эквипотенциальной линии, причем оба элемента пересекаются под прямым углом. Таким образом, Δs и Δn являются двумя сторонами криволинейного квадрата, который стремится к истинному квадрату, когда Δs и Δn стремятся к бесконечно малым величинам ds и dn .

Сказанное позволяет построить полную картину двухмерного безвихревого потока в виде сетки (рис. XI-12). Линии тока определяют направление скорости в любой точке. Величина скорости, выраженная в относительных величинах, обратно пропорциональна стороне ячейки.

Графическая процедура построения гидродинамической сетки зависит от того, является ли рассматриваемый поток потоком под давлением или потоком со свободной поверхностью.

XI-6.2. Поток под давлением. XI-6.2.1. Область приложения. Первым примером широкого использования метода гидродинамических сеток может служить случай потока между двумя фиксированными границами, т. е. поток под давлением.

Те же правила служат для построения сетки вокруг твердого тела при четко заданных условиях на бесконечности. Следует также указать, что многие потоки со свободной поверхностью, например, в широких и относительно мелких реках, где ось вихревого движения расположена горизонтально, могут быть описаны двухмерным потенциалом скорости и изучены методом гидродинамических сеток (см. XI-5.4). При этом, однако, необходимо пренебречь компонентами, обусловленными влиянием волновых движений и подпора. Все эти виды потоков определяются по тем же правилам, что и потоки между фиксированными границами.

XI-6.2.2. Метод построения гидродинамической сетки. Построение, показанное на рис. XI-12, начинаем в области, где распределение скорости является очевидным, например в однородном или радиальном потоке. В зависимости от требуемой точности выбирается некоторое количество линий тока, имея в виду, что это количество может быть без затруднений увеличено в каком-либо районе, если в этом месте потребуется большая точность. Затем проводятся эквипотенциальные линии, пересекающие линии тока (включая и границы) под прямым углом. Получается сетка из малых квадратных ячеек.

Самый простой способ проверки правильности построения состоит в проведении диагоналей в ячейках. Эти диагонали должны образовывать плавные и взаимно перпендикулярно пересекающиеся линии. Это — метод Празиля (см. рис. XI-12 и XI-14). Если требования, предъявляемые к диагоналям, не выполняются, производится второе построение. Для исправления первоначальных ошибок чертежи, выполненные на кальке, накладываются друг на друга, и весь процесс повторяется, пока не достигается желаемый результат. Обычно для того, чтобы получить точную гидродинамическую сетку методом проб и ошибок, достаточно трех последовательных построений.

XI-6.2.3. Ограничения применимости метода гидродинамических сеток. Ограничения применимости метода гидродинамических сеток для изучения потока под давлением те же самые, что и ограничения, накладываемые на допущение об отсутствии завихренности. Другими словами, метод сеток может быть использован для изучения коротких конвективных (сужающихся) потоков или потоков в пористой среде, где число Рейнольдса меньше единицы.

Дивергентный (расходящийся) поток, сопровождаемый отрывом и образованием вихрей, длинные сооружения, где силы трения

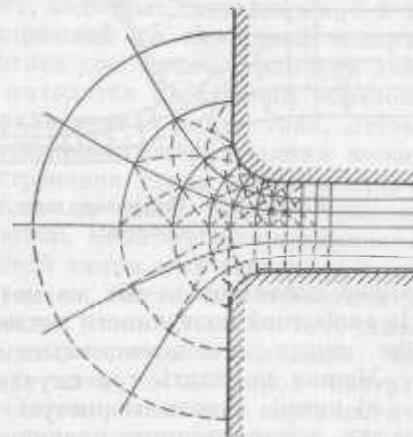


Рис. XI-12. Гидродинамическая сетка для радиального и однородного потоков.

приводят к завихренности движения, и нестационарный поток не могут успешно изучаться с помощью метода гидродинамических сеток. При образовании вихревого следа метод сеток можно применять, если линия отрыва определена (рис. XI-13), — тогда скорость и давление вдоль этой линии считаются постоянными. Их определение

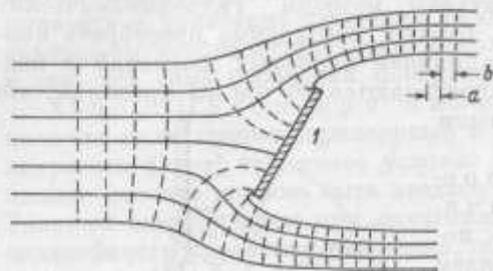


Рис. XI-13. Вихревая зона.
1 — пластина.

можно использовать тот же метод, что и для потока под давлением. На свободной поверхности задается условие, определяющее расстояние между эквипотенциальными линиями.

Можно выделить три случая:

а) поток сквозь пористую среду — вертикальные расстояния между последующими эквипотенциальными линиями постоянны, поскольку $\Delta\phi = \text{const}$ (см. IX-2.6, рис. IX-5);

б) горизонтальный поток с большой скоростью — поток, выходящий из отверстия или из-под затвора шлюза с сжатием и под значительным напором (рис. XI-14). В этом случае согласно уравнению Бернулли имеем: $V = \sqrt{2g(H-z)}$, где H — полный напор, а z означает точное превышение рассматриваемой точки относительно уровня за шлюзом (в нижнем бьефе). Во многих случаях z всегда мало по сравнению с H , и V считается постоянной на свободной поверхности. Тогда расстояния между эквипотенциальными линиями одинаковы. Другими словами, такой поток можно определить, считая, что сила тяжести пренебрежимо мала ниже по течению от затвора шлюза;

в) поток с вертикальной компонентой скорости (над порогом) — скорость на свободной поверхности изменяется в зависимости от z .

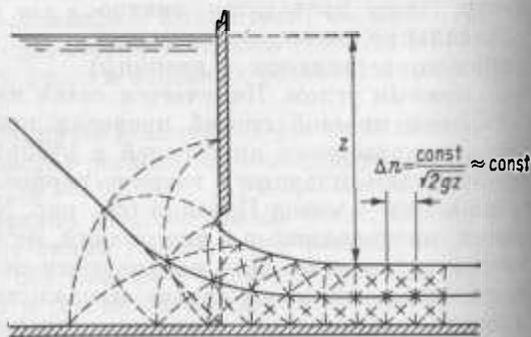


Рис. XI-14. Горизонтальный поток с большой скоростью.

В соответствии с законом Бернулли имеем $V = \sqrt{2gz}$. Отсюда расстояние между свободной поверхностью и первой линией тока дается выражением

$$\frac{\Delta\phi}{V} = \frac{\text{const}}{\sqrt{2gz}} = \Delta n = \Delta s$$

XI-6.3.2. Свободная поверхность заранее неизвестна. Теоретически в случаях, подобных ситуациям а, б и в, для определения линии тока, совпадающей со свободной поверхностью, а также полной картины потока достаточно уравнений движения и неразрывности. Решение находится следующим образом. Сначала на глаз проводится примерная первая линия тока. Затем, как было показано в XI-6.3.1, рассчитываются расстояния между эквипотенциальными линиями. Построенная таким образом гидродинамическая сетка должна совпасть на своей нижней границе с заданной фиксированной поверхностью. Если этого не происходит, то положение начальной поверхностной линии тока несколько изменяется, и построение повторяется заново. Легко себе представить, что такой метод проб и ошибок является утомительным и неточным.

Поэтому, хотя такая процедура теоретически и возможна, попытки построить гидродинамическую сетку со свободной поверхностью без вспомогательных экспериментов оказываются нереалистичными (и тем более в случаях, когда поток ограничен двумя свободными поверхностями, например в свободно падающей струе). Чаще всего экспериментального (с помощью модели) определения свободной поверхности оказывается достаточно для практических инженерных целей, так как, поскольку модель создана, ее можно использовать для измерения распределения давления. В этом случае построение гидродинамической сетки превращается в упражнение чисто академического характера.

На практике применение метода сеток со свободной поверхностью рационально только применительно к потоку сквозь земляную плотину, ввиду его важности и трудности воспроизведения на модели. Для облегчения начального этапа построения сетки используются некоторые эмпирические соотношения. Фактически, однако, этот процесс чаще изучают с помощью электрических аналогий, хотя и в этом случае определение свободной поверхности может быть связано с серьезными трудностями.

XI-6.4. Другие методы. Конформное отображение. XI-6.4.1. Метод релаксации и аналоговые методы. Для построения гидродинамической сетки существует целый ряд методов. Все они основаны на одних и тех же принципах, и поэтому при определении свободной поверхности встречаются аналогичные затруднения.

В основе метода релаксации лежат численные расчеты.

Очень часто используется аналогия с электрическим полем — при этом путем измерений разности потенциалов между различными точками прямо определяют положение эквипотенциальных линий.

Существует много разных систем, в которых используются ячейки с жидкими сопротивлениями, влажная земля и т. д.

Релаксационный метод и метод электроаналогий можно легко распространить на трехмерный безвихревой поток.

Другой аналоговый метод основан на том факте, что среднее движение ламинарного потока постоянной толщины можно считать безвихревым (см. II-5.4). Краска типа флуоресцина или перманганата непосредственно дает линии тока.

Наконец, поскольку среднее движение ламинарного

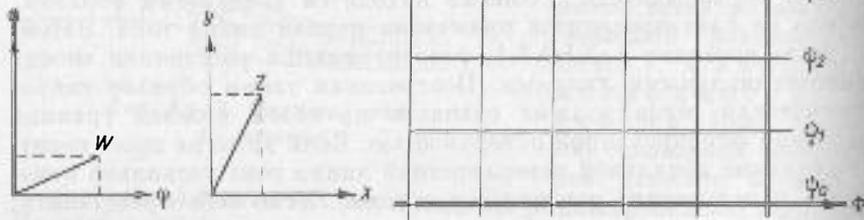


Рис. XI-15. Обозначения, употребляемые при конформном отображении.

Рис. XI-16. Однородный поток.

потока сквозь пористую среду является безвихревым, то в этом случае аналоговый метод очень легко использовать также для получения двухмерной и трехмерной картины потока.

XI-6.4.2. Конформное отображение. XI-6.4.2.1. Полное изложение этого эффективного математического средства изучения двухмерного безвихревого потока с циркуляцией скорости или без нее выходит за рамки настоящей книги. Мы изложим только основные принципы метода.

В основе конформного отображения лежит использование комплексных чисел $W = \varphi + i\psi$ и $Z = x + iy = re^{i\theta}$ и функции комплексного переменного $W = f(Z)$ (рис. XI-15).

Коротко говоря, операция конформного отображения состоит в установлении соотношения между каждой точкой данной картины потока в плоскости x, y и соответствующей ей точкой картины потока в плоскости φ, ψ . Часто оказывается, что, осуществляя переход от картины реального потока в плоскости x, y к его конформному отображению в плоскости φ, ψ , мы получаем последнее в виде картины однородного потока. Можно также осуществлять целый ряд последовательных операций конформного отображения, чтобы в конце концов шаг за шагом перейти от очень сложной формы потока к изображению в виде однородного потока.

Конформное отображение можно использовать также для определения свободных линий тока, применяя так называемую теорему Шварца — Кристоффеля. Однако применение этой теоремы требует пренебрежения силами тяжести.

XI-6.4.2.2. Пример. Обтекание цилиндра. Рассмотрим преобразование

$$W = U \left(Z + \frac{R^2}{Z} \right),$$

где $W = \varphi + i\psi$ представляет собой уравнение однородного потока в W -плоскости, т. е. в системе прямоугольных координат φ, ψ . Этот поток параллелен оси φ , а линии тока определяются значениями $\psi = \text{const}$ и перпендикулярны оси ψ (рис. XI-16).

Написанное выше соотношение выражает собой преобразование потока, обтекающего цилиндр радиуса R , в однородный поток. Это можно показать путем следующих выкладок:

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi &= U \left(re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right) = U \left(r \cos \theta + \frac{R^2}{r} \cos \theta + \right. \\ &\left. + ir \sin \theta - i \frac{R^2}{r} \sin \theta \right) = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + iU \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Теперь мы видим, что потенциальная функция имеет вид

$$\varphi = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta,$$

а функция тока

$$\psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta,$$

что соответствует случаю обтекания цилиндра (см. XI-4.3.1.2).

XI-6.4.2.3. Аналогичным образом можно использовать следующие преобразования:

однородный поток:

$$W = (a + ib)Z;$$

источник при $Z = A$:

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - A);$$

водоворот (вихрь) с центром при $Z = A$:

$$W = -\frac{iK}{2\pi} \ln(Z - A);$$

спиральный вихрь при $Z = A$:

$$W = \frac{1}{2\pi} (Q - iK) \ln(Z - A);$$

комбинация источника в $-A$ и стока в A :

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{Z + A}{Z - A};$$

поток через скважину:

$$Z = \text{ch } W;$$

обтекание цилиндра с циркуляцией скорости:

$$W = U \left(Z + \frac{R^2}{Z} \right) - \frac{iK}{2\pi} \ln Z;$$

поток около угла, образованного двумя стенками:

$$W = Z^n \left(\theta = \frac{\pi}{n} \right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

XI-1. Постройте гидродинамическую сетку в двумерной области, показанной на рисунке, и рассчитайте распределение относительного давления на обеих границах и вдоль линии тока, начинающейся из точки *A* в центре входной трубы.

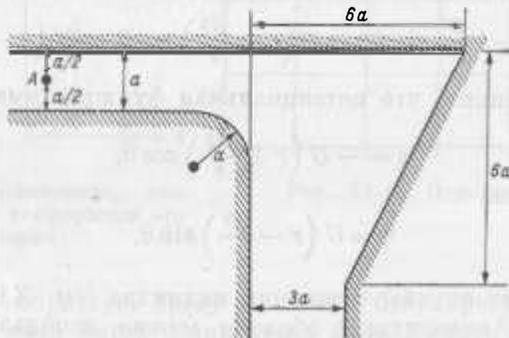


Рис. к упражнению XI-1.

XI-2. Запишите уравнения Навье — Стокса, выраженные через функцию тока $\psi(x, y)$ в случае двумерного движения.

О т в е т:

$$\rho \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \right]$$

$$\rho \left[- \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] = - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi \right].$$

XI-3. Покажите, что потенциал скорости в случае трехмерного источника имеет вид

$$\varphi = - \frac{Q}{4\pi r}.$$

XI-4. Определите функцию тока и потенциал скорости для однородного потока со скоростью *V*, наклоненного под углом α к оси *X*.

О т в е т:

$$\psi = V (y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

XI-5. Начертите ориентировочно эквипотенциальные линии и линии тока в потоке, обтекающем цилиндр радиуса *R*. Найдите соответствующую функцию тока.

О т в е т:

$$\psi = Uy \left[1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right] = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

XI-6. Исследуйте различные характеристики потока, определяемого функцией тока

$$\psi = -x^2.$$

Определите, будет ли этот поток завихренным и рассчитайте вихрь скорости. Является ли жидкость сжимаемой? Начертите линии тока и эквипотенциальные линии.

О т в е т:

$$u = 0, \quad v = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \text{ (движение вихревое); вихрь равен } -1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ (жидкость несжимаемая).}$$

Эквипотенциальных линий нет; это — поток Куэтта между двумя параллельными плоскостями.

XI-7. Рассмотрите однородный поток в положительном направлении оси *X*. Скорость изменяется линейно от *V* = 0 при *y* = 0 до *V* = 10 фут/с при *y* = 10 футов. Определите выражение для ψ .

О т в е т:

$$\psi = \frac{1}{2} y^2.$$

XI-8. Начертите картину потока от источника до стока графическим способом.

XI-9. Рассмотрите поток вокруг цилиндра, определяемый потенциальной функцией $\varphi = -U (r - R^2/r) \cos \theta$. На каких расстояниях возмущение скорости цилиндром составляет более 50, 10, 1%? Нарисуйте эти три изолинии влияния вокруг цилиндра.

О т в е т: эти линии — окружности с радиусами: $r = 1,4 R$ (50%); $r = 3,1 R$ (10%) и $r = 10 R$ (1%).

XI-10. Рассмотрите водоворот (вихрь) со стоком и свободной поверхностью, в котором вертикальной компонентой скорости пренебрегается. Рассчитайте возвышение свободной поверхности $\eta(r)$.

О т в е т:

$$\varphi = - \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{K}{2\pi} \theta, \quad \eta = \eta_\infty - [v_\infty^2 + v_\theta^2] \frac{1}{2g},$$

$$\eta = \eta_\infty - \frac{Q^2 + K^2}{8\pi^2 g} \frac{1}{r^2}.$$

XI-11. Рассмотрите потенциал скорости

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{K}{2\pi} \theta.$$

Найдите функцию тока и общие уравнения для эквипотенциальных линий и линий тока. Вычертите соответствующую картину потока, считая, что $Q = K$ и $Q = \frac{1}{4} K$, с помощью графической суперпозиции.

О т в е т: эквипотенциальные линии —

$$r = e^{-\frac{K}{Q} (\theta - \theta_0)};$$

линии тока —

$$r = e^{\frac{Q}{K} (\theta - \theta_0)}.$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{K}{2\pi} \ln r.$$

Х1-12. Покажите, что потенциал скорости дублета имеет вид

$$\varphi = \frac{K \cos \theta}{r}$$

и что эквипотенциальные линии и линии тока являются дугами окружностей.

О т в е т: возьмем потенциал скорости для источника и стока одинаковой интенсивности, отстоящих друг от друга на расстоянии $2a$, т. е.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} [\ln r_1 - \ln r_2],$$

где r_1 и r_2 — расстояния, измеренные соответственно от источника и стока. Введем следующие соотношения:

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta.$$

Положим $2aQ/2\pi = K$ и перейдем к пределу, устремив a к нулю.

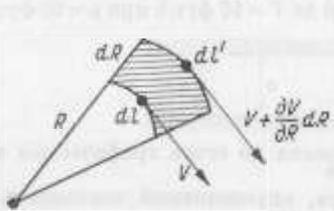


Рис. к упражнению Х1-13.

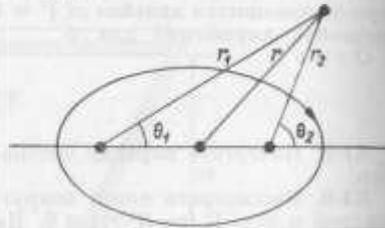


Рис. к упражнению Х1-15.

Х1-13. Покажите, что

$$d^2\Gamma = \left(\frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} \right) dR dl \text{ и } \frac{\partial H}{\partial R} = \rho g V \frac{d^2\Gamma}{dR dl},$$

где $H = V^2/(2g) + p/(\rho g) + z$; V — скорость частицы; Γ — циркуляция скорости; dR — элемент, перпендикулярный к линиям тока, а dl — элемент линии тока, как показано на приведенном рисунке.

Х1-14. Функция тока для потока, обтекающего цилиндр с циркуляцией скорости, имеет вид

$$\psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$$

где Γ — циркуляция. Определите положение застойных точек на цилиндре в зависимости от Γ . Покажите, что полная сила, действующая со стороны потока на единицу длины цилиндра, равна

$$F = \rho U \Gamma.$$

О т в е т:

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}; v_\theta = 0, \text{ где } \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi R U},$$

$$p = \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(-2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U} \right)^2 \right].$$

Полная сила:

$$X = -\int_0^{2\pi} p R \cos \theta d\theta = 0,$$

$$Y = \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\rho U \Gamma.$$

Х1-15. Найдите потенциальную функцию для потока, обтекающего «тело Рэнкина». Функция тока имеет вид (см. рисунок)

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) + U r \sin \theta.$$

Определите форму «тела Рэнкина» и рассчитайте давление вокруг него, считая давление на бесконечности p_∞ известным.

О т в е т:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + U r \cos \theta.$$

Форма — при $\psi = 0$ получаем $r = \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) / (U \sin \theta)$.

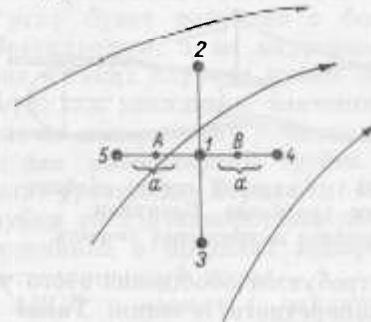


Рис. к упражнению Х1-16.

Х1-16. Покажите с помощью конечных разностей, что в безвихревом потоке величина функции тока в точке I равна

$$\psi_1 = \frac{1}{4} (\psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5).$$

Индексы „i“ относятся к точкам i на рисунке.

О т в е т:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_A = \frac{\psi_5 - \psi_1}{a}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_B = \frac{\psi_1 - \psi_4}{a},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_A - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_B}{a} = \frac{\psi_4 + \psi_5 - 2\psi_1}{a^2}.$$

Аналогично определяем $\partial^2 \psi / \partial y^2$. А поскольку $\nabla^2 \psi = 0$, то находим ψ_1 .

Х1-17. В случае потока, проходящего через отверстие длиной $2C$ и определяемого конформным преобразованием

$$Z = C \operatorname{ch} W,$$

где $Z = x + iy$, а $W = \varphi + i\psi$, покажите, что линии тока в плоскости z определяются семейством гипербол и что эквипотенциальные линии определяются семейством эллипсов с теми же самыми фокусами, что и у гипербол.

О т в е т:

$$x = C \operatorname{ch} \varphi \cos \psi,$$

$$y = C \operatorname{sh} \varphi \sin \psi.$$

Эквипотенциальные линии ($\varphi = \text{const}$) —

$$\frac{x^2}{C^2 \operatorname{ch}^2 \varphi} + \frac{y^2}{C^2 \operatorname{sh}^2 \varphi} = 1.$$

Линии тока ($\psi = \text{const}$) —

$$\frac{x^2}{C^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{C^2 \sin^2 \psi} = 1.$$

Фокусы —

$$(0, C) \text{ и } (0, -C).$$

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

XII-1. Элементарное приложение уравнения Бернулли к трубке тока

XII-1.1. Область приложения обобщенной формы уравнения Бернулли. В случае вихревого движения уравнение Бернулли справедливо только вдоль линии тока. Однако для практических

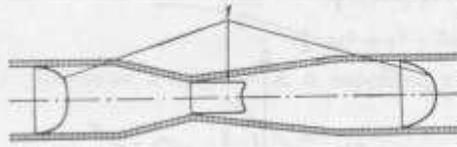


Рис. XII-1. Вихревой поток; обобщенное уравнение Бернулли. 1 — профили распределения скорости.

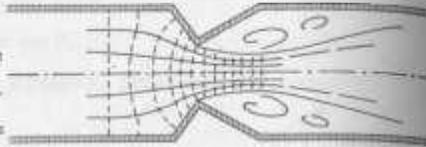


Рис. XII-2. Безвихревой поток; уравнение Бернулли справедливо только в некоторых определенных местах.

целей требуется обобщение этого уравнения на трубку тока конечного поперечного сечения. Такое обобщение достигается интегрированием уравнения Бернулли, связывающего скорости и давление вдоль линии тока, по поперечному сечению.

Интегрирование обосновано, если средний поток является приблизительно «одномерным», как это бывает на практике в трубах, туннелях, реках и каналах. В этих случаях предполагается, что компоненты скорости, перпендикулярные к оси среднего движения, малы и их эффектом можно пренебречь. Это допущение позволяет получить целый ряд очень полезных аппроксимаций. Однако оно же является первой причиной ошибок и затруднений, если кривизна траекторий становится заметной. Это ограничение не всегда отмечается в учебниках и руководствах. Чтобы проиллюстрировать этот факт, в качестве примера рассмотрим трубку Вентури. Если кривизна траекторий мала (рис. XII-1), то обобщенное уравнение Бернулли можно использовать для средней по поперечному сечению величины скорости. Распределение давления будет приближенно гидростатическим.

Распределение давления вдоль стенки трубки Вентури приближенно соответствует уравнению Бернулли, в которое входит ско-

рость, осредненная по поперечному сечению. Если же кривизна траекторий значительна (рис. XII-2), то в сужающейся части потока движение можно считать безвихревым. Здесь надо пользоваться точной формой уравнения Бернулли, т. е. пользоваться локальными значениями скорости и давления. Применение обобщенного уравнения Бернулли здесь недопустимо. Вероятно, ошибки будут меньше, если считать такое движение безвихревым и лишенным трения и вычислять распределение давления по локальным значениям скорости вдоль стенки.

Аналогичные соображения можно привести и в отношении потока перед диафрагмой. Давление в углу будет получено с большей точностью, если считать поток безвихревым, а не вихревым. Это означает, что на практике давление в таких случаях лучше определять, подставляя в уравнение Бернулли локальные значения скорости, а не величины, осредненные по поперечному сечению.

XII-1.2. Уравнение Бернулли для элементарной трубки тока. XII-1.2.1. Сначала напомним, как уравнение Бернулли используется для бесконечно тонкой трубки тока с поперечным сечением ΔA . Скорость будем считать постоянной в пределах поперечного сечения. Будем рассматривать нестационарный поток.

Рассмотрим объем жидкости $ABCD$ в момент t , заключенный в трубке тока (рис. XII-3).

Согласно условию неразрывности,

$$\Delta A_1 V_1 = \Delta A_2 V_2,$$

где ΔA_1 и ΔA_2 , V_1 и V_2 — поперечные сечения и скорости соответственно в AB и CD .

Объем жидкости $ABCD$ в момент $t + dt$ превращается в $A'B'C'D'$. Объем $AA'B'B$ равен $\Delta A_1 V_1 dt$, а объем $CC'D'D$ равен $\Delta A_2 V_2 dt$. По условию неразрывности

$$\Delta A_1 V_1 dt = \Delta A_2 V_2 dt.$$

XII-1.2.2. Теперь приравняем изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости к работе, произведенной приложенными силами, т. е. силами давления и тяжести.

В случае стационарного движения кинетическая энергия общей части $A'B'CD$ остается без изменения, и изменение кинетической энергии равно разности кинетических энергий объемов $CC'D'D$ и $AA'B'B$,

$$\rho \Delta A_2 V_2 dt \frac{V_2^2}{2} - \rho \Delta A_1 V_1 dt \frac{V_1^2}{2}.$$

Это — пространственное изменение кинетической энергии. В случае нестационарного движения полная масса жидкости всего объема $ABCD$ изменяет свою кинетическую энергию

$\int_{\Delta A} \int_A^C \rho(V^2/2) dS dA$ также и во времени. Это изменение кинетической энергии за интервал времени dt будет

$$\int_{\Delta A} \int_A^C \frac{\partial \left(\rho \frac{V^2}{2} \right)}{\partial t} dS dA = \rho \int_{\Delta A} \int_A^C V \frac{\partial V}{\partial t} dS dA,$$

где ΔA — величина поперечного сечения в любом месте. Если ΔA между A и C остается постоянной, то, поскольку

$$\int_{\Delta A} \int_A^C dA dS = \Delta A S,$$

изменение кинетической энергии равно

$$\rho \Delta A V^2 dt \frac{\partial V}{\partial t}$$

XII-1.2.3. Эти изменения кинетической энергии надо приравнять работе приложенных сил — тяжести и давления — за тот же интервал времени.

Работа силы тяжести для общей части $A'B'CD$ равна нулю, и, таким образом, в целом работа силы тяжести равна той, какую надо затратить, чтобы объем $AA'B'B$ поднять в положение $CC'D'D$. Следовательно, эта работа равна величине $(-g)$, умноженной на скорость, с которой масса $\rho \Delta A_1 V_1 dt$ (равная массе $\rho \Delta A_2 V_2 dt$) поднимается с уровня z_1 до уровня z_2 , т. е. равна весу, умноженному на расстояние:

$$-\rho g \Delta A_1 V_1 dt z_1 + \rho g \Delta A_2 V_2 dt z_2.$$

Силы давления на искривленные стенки трубки тока не вносят вклада в работу, поскольку они действуют в направлении, перпендикулярном к потоку. Поэтому работа сил давления ограничена эффектом сил p_1 и p_2 , действующих по нормали к ΔA_1 и ΔA_2 и направленных в противоположных направлениях. Эта работа равна силе, умноженной на расстояние:

$$p_1 \Delta A_1 V_1 dt - p_2 \Delta A_2 V_2 dt.$$

XII-1.2.4. Приравняв изменение кинетической энергии работе приложенных сил, деля все на dt и вводя работу сил трения F , получаем обобщенное уравнение Бернулли в виде

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{V_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 \right) \Delta A_2 V_2 - \left(\rho \frac{V_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 \right) \Delta A_1 V_1 = \\ = \rho \int_{\Delta A} \int_A^C V \frac{\partial V}{\partial t} dS dA + F. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta A_2 V_2 = \Delta A_1 V_1 = \Delta A V$, то, поделив все на $\Delta A V$ и пренебрегая силой трения, получим уравнение Бернулли в знако-

мой форме, пригодной для употребления вдоль линии тока (см. X-3.3):

$$\left(\rho \frac{V_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 \right) - \left(\rho \frac{V_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 \right) = \rho \int_A^C \frac{\partial V}{\partial t} dS,$$

а поделив все на ρg и вводя полный напор

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z,$$

получим

$$\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

XII-1.2.5. Применение уравнения Бернулли в приведенном выше виде для трубки чрезвычайно просто. Именно в этой форме оно и используется в инженерной практике. Однако, чтобы показать все упрощения, которые приходится делать при таком обобщении уравнения, представляется полезным дать более строгий вывод, с привлечением некоторых поправочных коэффициентов. Этими поправочными коэффициентами чаще всего пренебрегают, и, кроме того, они недостаточно хорошо изучены. К счастью, они действительно малосущественны для той точности, которая требуется на практике. Однако мы покажем, что уравнение Бернулли, которое очень часто представляют как точную формулу элементарной гидравлики, на самом деле является лишь приближенным.

XII-1.3. Средняя скорость на поперечном сечении. Рассмотрим поперечное сечение трубки тока, определенное как поверхность, перпендикулярная к линиям тока. Скорость в пределах этого поперечного сечения обычно меняется за счет турбулентности как в пространстве, так и во времени (рис. XII-4). Таким образом, средний расход определяется путем двойного интегрирования по пространству и по времени:

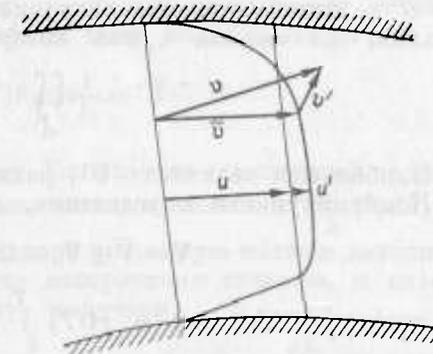


Рис. XII-4. Средняя скорость на поперечном сечении.

Средняя скорость будет равна

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \iint_A V dA dT.$$

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{A} \iint_A V dA dT.$$

При рассмотрении турбулентности (см. VII-1.3) мы видели, что в данной точке

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}',$$

где $\bar{\mathbf{V}} = (1/T) \int_0^T \mathbf{V} dt$ и $\bar{\mathbf{V}}' = (1/T) \int_0^T \mathbf{V}' dT = 0$

Аналогично рассмотрим изменение средней по поперечному сечению величины \bar{U} . Величину U можно определить в виде

$$U = \frac{1}{A} \iint_A \bar{V} dA,$$

так что

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{U} + \mathbf{U}',$$

где U' — флуктуационная величина, положительная либо отрицательная, но полная сумма которой равна нулю:

$$\bar{U}' = \frac{1}{A} \iint_A U' dA = 0.$$

Наибольшая величина $|U'|$ равна $|U|$ на твердой стенке. Комбинируя эти определения, получаем

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}' = \mathbf{U} + \mathbf{U}' + \mathbf{V}',$$

где $(1/A) \int \int_A U' dA = 0$ и $(1/T) \int_0^T V' dT = 0$.

Заметим при этом, что величины \bar{U}'^2 и \bar{V}'^2 всегда положительны.

В дальнейших выкладках проще использовать специальные коэффициенты σ и χ , определяемые соотношениями $U' = \sigma U$ и $V' = \chi U$, так что

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}(1 + \sigma + \chi).$$

Можно отметить, что величина σ неизменна во времени, а величина χ может изменяться в пространстве в случае неизотропной турбулентности. Поэтому среднюю величину χ приходится находить путем осреднения как по времени, так и по пространству.

Этот поправочный коэффициент χ , обусловленный турбулентностью, можно получить и непосредственно из уравнения Рейнольдса, рассматривая соотношение между флуктуационными членами и членами конвективной инерции. В гидравлике им обычно пренебрегают.

XII-2. Обобщение уравнения Бернулли на случай трубки тока

XII-2.1. Процесс осреднения по поперечному сечению. Закон сохранения энергии для элементарной трубки бесконечно малого сечения A выражается формулой, приведенной в XII-1.2. Тот факт, что поперечное сечение бесконечно мало, делает формулу точной,

поскольку фактически сводит трубку к линии тока. Эта формула имеет вид

$$\left(\rho \frac{V_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2\right) V_2 dA_2 - \left(\rho \frac{V_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1\right) V_1 dA_1 - \int_A^c \rho V \frac{\partial V}{\partial t} dS dA - F = 0.$$

Поскольку эта сумма всегда равна нулю для одной линии тока в данный момент, ее осредненная по времени величина также всегда равна нулю. (Это такое же осреднение, как то, которое было использовано для вывода уравнений Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса в VII-1.6.)

Аналогично, осредненная по конечному поперечному сечению величина этой суммы должна всегда быть равна нулю, т. е.

$$\frac{1}{A} \iint_A (*) dA = 0,$$

где (*) означает указанную сумму. Если вместо осредненной по поперечному сечению величины взять полную величину $\iint_A (*) dA$, то и она будет равна нулю. Беря теперь указанную полную величину, полученную интегрированием по поперечному сечению, и находя среднюю по времени величину, получаем

$$\frac{1}{T} \iint_0^T \iint_A \left[\left(\rho \frac{V^2}{2} + p_2 + \rho g z_2\right) V_2 dA_2 - \left(\rho \frac{V^2}{2} + p_1 + \rho g z_1\right) V_1 dA_1 - \rho \int \frac{\partial V}{\partial t} V dS dA - F \right] dT = 0.$$

Далее последовательно рассмотрим каждый из этих членов.

XII-2.2. Члены скоростного напора. Выражая V через U , получаем для члена скоростного напора

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A \rho \frac{V^2}{2} V dA dT = \frac{\rho}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \iint_A U^3 (1 + \sigma + \chi)^3 dA dT = \rho \frac{U^3}{2} \left[A + 3 \frac{1}{T} \iint_0^T \iint_A (\sigma + \chi) dA dT + 3 \frac{1}{T} \iint_0^T \iint_A (\sigma + \chi)^2 dA dT \right],$$

причем, так как величины σ и χ обычно малы, то величиной $(\sigma + \chi)^3$ пренебрегают.

Рассмотрим последовательно эти интегралы. Поскольку величина σ изменяется только в пространстве, а величина χ — и в пространстве и во времени, то из первого интеграла получаем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A (\sigma + \chi) dA dT = \iint_A \sigma dA + \iint_A \frac{1}{T} \int_0^T \chi dT dA = 0,$$

а из второго

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A (\sigma + \chi)^2 dA dT = \iint_A \sigma^2 dA + \iint_A \frac{1}{T} \int_0^T \chi^2 dT dA \neq 0,$$

поскольку член с двойным произведением

$$2 \iint_A \sigma dA \frac{1}{T} \int_0^T \chi dT \equiv 0.$$

Два слагаемых, полученных из второго интеграла, отличны от нуля и всегда положительны. Введем обозначения $\bar{\sigma}^2$ и $\bar{\chi}^2$, определяемые из соотношений

$$\bar{\sigma}^2 A = \iint_A \sigma^2 dA$$

и

$$\bar{\chi}^2 A = \iint_A \frac{1}{T} \int_0^T \chi^2 dT dA.$$

Окончательно находим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A \rho \frac{V^2}{2} dA dT = \rho \frac{U^3 A}{2} (1 + 3\bar{\sigma}^2 + 3\bar{\chi}^2) = (1 + \alpha) \rho \frac{U^2}{2} Q,$$

где

$$\alpha = 3\bar{\sigma}^2 + 3\bar{\chi}^2.$$

Для ламинарного потока в круглой трубе имеем

$$3\bar{\chi}^2 = 0$$

и, как найдено в элементарной гидравлике,

$$3\bar{\sigma}^2 = 1.$$

Для турбулентного потока:

$$3\bar{\chi}^2 \cong 0,05,$$

$$3\bar{\sigma}^2 \cong 0,05 \div 0,01.$$

ХИИ-2.3. Члены давления. Рассмотрим теперь члены давления

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A p^* V dA dT.$$

За счет турбулентности имеем

$$p^* = \bar{p}^* + p' = \bar{p}^* (1 + \pi),$$

где $\pi = p'/\bar{p}^*$ и $\bar{p}^* = (1/T) \int_0^T p^* dT$.

Подставляя эти величины, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \iint_A \bar{p}^* U (1 + \pi) (1 + \sigma + \chi) dA dT = \\ = \bar{p}^* U \left[A + \frac{1}{T} \iint_A \int_0^T (\sigma\pi + \chi\pi) dA dT \right]. \end{aligned}$$

Средние величины произведений $\sigma\pi$ и $\chi\pi$ отличны от нуля. Однако поправка, вносимая множителем π , так мала, что ею обычно пренебрегают.

Уравнение Бернулли иногда обобщают для некоторых криволинейных потоков со свободной поверхностью, например для потоков через водослив. В этом случае величину \bar{p}^* можно рассматривать как сумму гидростатического члена, величина которого равна $p_a + \rho g z$, и добавочного члена Δp . Этот добавочный член равен нулю, когда кривизна траекторий мала, но становится существенным в некоторых случаях, что учитывается поправочным коэффициентом δ :

$$\delta = \frac{1}{A} \iint_A \frac{\Delta p}{\bar{p}^*} V dA.$$

так что

$$\iint_A \bar{p}^* V dA = \bar{p}^* U A (1 + \delta).$$

Величина δ положительна, когда поток направлен в положительную сторону и выгнут вверх, и отрицательна, когда поток выгнут вниз. Это было показано выше на рис. X-2—X-4.

ХИИ-2.4. Гравитационные члены. Аналогично легко найти, что гравитационный член равен

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iint_A \rho g z V dA dT = \rho g z U A = \rho g z Q,$$

поскольку все поправочные множители входят в первой степени и средняя величина от них равна нулю.

ХII-2.5. Члены локальной инерции. Наконец, рассмотрим член локальной инерции:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \iiint_A \rho \frac{\partial V}{\partial t} V dA dT dS.$$

Можно записать:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \iiint_A \frac{V^2}{2} dA dT dS = \\ & = \rho \int_S A \frac{\partial}{\partial t} \frac{U^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \int_A [1 + 2(\sigma + \chi) + (\sigma + \chi)^2] dA dT dS. \end{aligned}$$

Упрощая, так же как и прежде, получим:

$$\rho \int_S A \frac{\partial}{\partial t} \frac{U^2}{2} (1 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\chi}^2) dS = \rho A \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) U \frac{\partial U}{\partial t}$$

ХII-2.6. Практическая форма уравнения Бернулли для трубки тока. Учитывая полученные выше поправочные коэффициенты и разделив все члены на $Q = UA$, получаем обобщенную форму уравнения Бернулли для трубки тока:

$$\begin{aligned} & \left(\rho \frac{U^2}{2} (1 + \alpha_2) + \bar{p}_2 (1 + \delta_2) + \rho g z_2\right) - \left(\rho \frac{U^2}{2} (1 + \alpha_1) + \right. \\ & \left. + \bar{p}_1 (1 + \delta_1) + \rho g z_1\right) = \rho \int_S \frac{\partial U}{\partial t} \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) dS + F. \end{aligned}$$

Если пренебречь величинами σ^2 , χ^2 и δ и поделить все на ρg , то получим обычную форму уравнения Бернулли, применяемую в инженерной практике:

$$\left(\frac{U^2}{2g} + \frac{\bar{p}_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{U^2}{2g} + \frac{\bar{p}_1}{\rho g} + z_1\right) = \frac{1}{g} \int_S \frac{\partial U}{\partial t} dS + F.$$

В случае однородного потока в трубе длиной L член локальной инерции приобретает вид

$$\frac{1}{g} \int_S \frac{\partial U}{\partial t} dS = \frac{L}{g} \frac{dU}{dt}.$$

Эту формулу можно использовать для изучения, например, уравнильных бассейнов, шлюзов и т. д.

ХII-2.7. Приложение к исследованию уравнильного бассейна. Приведем пример использования обобщенного уравнения Бернулли для исследования нестационарного движения ввиду его большого значения в инженерной практике. Рассматривается уравни-

тельный бассейн, изображенный на рис. ХII-5, в случае, когда расход в подводящем рукаве равен нулю. Применение уравнения Бернулли к участку между точками a и b дает:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{V_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + z_a\right) - \left(\frac{V_b^2}{2g} + \frac{p_b}{\rho g} + z_b\right) = (\text{Потери напора})_{ab} + \\ & + \frac{1}{g} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial t} dL. \end{aligned}$$

Величина $V_a^2/2g$ пренебрежимо мала, поскольку скорость V_a в резервуаре очень невелика. Величина $V_b^2/(2g)$ также очень мала, и ею обычно пренебрегают.

Кроме того, $p_a = p_b =$ атмосферному давлению. Член, характеризующий потери напора, включает потери напора на входе в галерею, потери напора в галерее, равные $\Delta H = fV^2/(2gD)$, и потери напора, обусловленные донной диафрагмой уравнильного бассейна, равные $KV^2/(2g)$. Потери напора в уравнильном бассейне

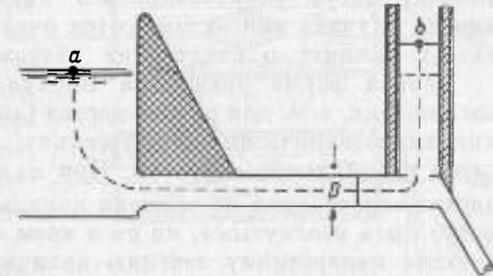


Рис. ХII-5. Уравнильный бассейн.

обычно пренебрежимо малы, так же, как и $V_b^2/(2g)$. Член локальной инерции в резервуаре и уравнильном бассейне обычно достаточно мал, и им можно пренебречь. Он учитывается только в пределах галереи.

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{g} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial t} dL = \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{L}{gf} \frac{dQ}{dt},$$

где f — поперечное сечение галереи. В случае относительно короткой галереи величину L надо увеличить с помощью поправочного коэффициента, чтобы учесть локальную инерцию почти радиального потока около входа. Наконец, если ввести обозначение $Z = z_a - z_b$, то основное динамическое уравнение для исследования уравнильного бассейна будет иметь вид

$$Z = \left(\frac{f}{D} + K_{a-b}\right) \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{gf} \frac{dQ}{dt},$$

где K_{a-b} — коэффициент трения, учитывающий влияние всех неоднородностей на пути от a до b . Условие неразрывности выражается соотношением $Qdt = FdZ$, где F — площадь поперечного сечения на свободной поверхности уравнильного бассейна. Мы не будем разбирать в этой книге метода решения данной системы уравнений, полученной при допущении, что расход через подводящий рукав равен нулю.

ХII-3. Ограничение области применения двух форм уравнения Бернулли

ХII-3.1. Две формы уравнения Бернулли. В случае стационарного потока без трения две формы уравнения Бернулли являются почти идентичными:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const},$$

$$(1 + \alpha) \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const}.$$

Строго говоря, ни одно из этих уравнений нельзя считать применимым во всех случаях, поскольку условия, необходимые для их вывода, могут удовлетворяться лишь приближенно. Однако во многих случаях они оказываются очень полезными. В этих случаях важно помнить о следующих обстоятельствах.

Первая форма уравнения Бернулли применима для безвихревого потока, т. е. для сужающегося (конвергентного) потока в коротких гидротехнических сооружениях. При этом величина V относится к локальной скорости. При наличии турбулентности V заменяется осредненной по времени локальной скоростью \bar{V} . Линии тока могут быть изогнутыми, но ни в коем случае нельзя брать осредненную по поперечному сечению величину скорости в качестве V .

Распределение давления дается как функция от локальной величины V и z . Распределение давления у стенок очень близко к распределению давления на границе тонкого пограничного слоя.

Вторая форма уравнения Бернулли применима для одномерного потока с вихревым движением, но с малой кривизной траекторий. U означает скорость, осредненную по поперечному сечению, а величина скоростного напора $U^2/(2g)$ должна быть исправлена коэффициентом $(1 + \alpha)$, который на практике часто не учитывают, полагая его равным единице. Величина α обусловлена турбулентностью и неоднородностью скорости в пределах поперечного сечения. Распределение давления является гидростатическим в пределах поперечного сечения или, говоря точнее, величина давления в центре потока немного меньше, чем у границ, за счет эффекта турбулентных флуктуаций (см. VIII-2.2 и VIII-2.3). Распределение давления от одного поперечного сечения к другому изменяется как функция от квадрата средней скорости на этих поперечных сечениях U^2 .

ХII-3.2. Трубка Вентури и диафрагма в качестве измерительных устройств. На практике определить точную величину поправочного коэффициента α нелегко. Кроме того, многие допущения, например о незначительности кривизны траекторий, о пренебрежимо малой величине потерь напора и т. д., удовлетворяются далеко не всегда.

Поэтому надо хорошо понимать, что трубка Вентури, используемая для измерения расхода путем простого применения уравнения Бернулли без поправочных коэффициентов, сама по себе не является точным прибором. Именно по этой причине изготовители вынуждены снабжать ее специальным графиком с поправочной кривой, полученной экспериментально путем измерения расхода

в тарировочном бассейне. Общий поправочный множитель, различный для каждого типа трубки Вентури, должен задаваться как функция числа Рейнольдса в горловине трубки.

Аналогичные замечания относятся и к гидростатической диафрагме, где распределение давления перед диафрагмой лучше определять по локальной скорости, а не по скорости, осредненной в пределах поперечного сечения. Распределение давления за диафрагмой является приближенно гидростатическим, поскольку поток либо почти параллелен, либо является очень медленным за пределами узкого канала.

ХII-3.3. Опыт Банки. Применение уравнения Бернулли для опытов с трубкой Вентури хорошо известно. Несмотря на ряд указанных выше приближений, экспериментально подтверждено, что когда в конвергентном потоке V возрастает, то величина p^* убывает пропорционально $1/\sqrt{V}$, и наоборот, в дивергентном потоке p^* увеличивается пропорционально $1/\sqrt{V}$. Если дивергенция слишком резкая, то происходит отрыв потока, и величина p^* почти не меняется вокруг струи. Это также имеет место при вторжении струи в резервуар. Можно поставить вопрос: будет ли любое изменение p^* приводить к изменению V в соответствии с законом Бернулли? Ответ можно получить с помощью эксперимента, который впервые осуществил Банки, и в котором изменения давления передаются через мембрану потоку, протекающему через трубку (рис. ХII-6). Если давление внутри надетого на трубку кожуха увеличивается, то давление, передаваемое через мембрану внутрь трубки, также увеличивается, поэтому величина V уменьшается и резиновая мембрана расширяется. Если же давление в кожухе уменьшается, то V увеличивается и резиновая мембрана сжимается. Этот парадоксальный результат находится в соответствии с законом Бернулли. Однако этот опыт трудно осуществить из-за отрыва потока. Этот факт показывает также принципиальную неправомерность применения уравнения Бернулли для трубок тока. Наконец, изменение формы резинового участка трубки изменяет и расход в ней, в результате чего движение является нестационарным. В сущности этот вопрос относится к области гидроупругости.

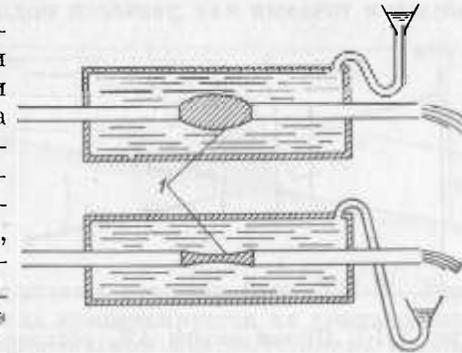


Рис. ХII-6. Эксперимент Банки.
1 — участок из резиновой трубки.

ХII-4. Определение потерь напора

ХII-4.1. Стационарный однородный поток. Рассмотрим стационарный поток в трубе. Потери напора могут быть теоретически рассчитаны для многих случаев, когда поток является ламинарным,

а форма поперечного сечения проста, например круглая или квадратная. Но в случае турбулентного потока величину потерь напора нельзя найти теоретически; ее требуется измерить с помощью эксперимента.

В этом случае теория позволяет нам использовать уравнение Бернулли

$$\left[(1 + \alpha_1) \frac{U_1^2}{g} + \frac{P_1^*}{\rho g} \right] - \left[(1 + \alpha_2) \frac{U_2^2}{g} + \frac{P_2^*}{\rho g} \right] = \Delta H$$

только для определения потери напора ΔH между двумя рассматриваемыми точками как разности полных напоров в этих точках. Это не представляет затруднений, пока поток является однородным, так как в этом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2, U_1 = U_2,$$

и

$$\Delta H = \frac{P_1^*}{\rho g} - \frac{P_2^*}{\rho g}.$$

XII-4.2. Потери напора при внезапном изменении потока. Внезапное изменение однородной трубы, обусловленное, например, наличием диафрагмы или изгибом, оказывает влияние на поток на

Рис. XII-7. Потери напора ΔH , обусловленные внезапным изменением условий в однородной трубе, хорошо определяются с помощью экстраполяции.

1 — экспериментальные точки.

большом расстоянии вниз по течению от того места, где произошло изменение. Потери напора, обусловленные этим изменением, можно найти путем экстраполяции линий, характеризующих напор давления (рис. XII-7). (Величины давления, полученные с помощью

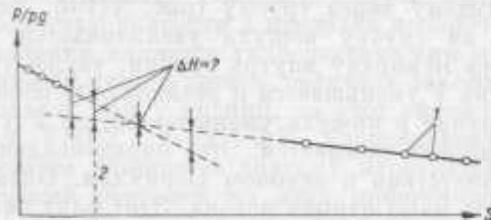


Рис. XII-8. Потери напора, обусловленные внезапным изменением условий в неоднородном потоке, не определяются однозначно с помощью экстраполяции.

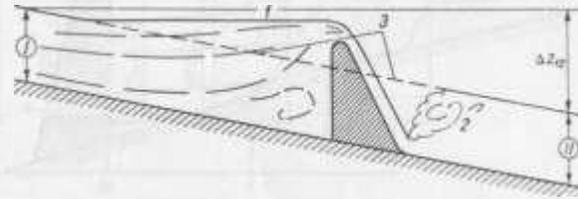
1 — экспериментальные точки; 2 — место резкого изменения условий.

пьезометров, помещенных вблизи внезапного изменения потока, изгиба или водозаборного сооружения, не могут служить для оценки потерь напора, так как поток неоднороден и имеет местное искажение давления из-за сложной формы потока.) Однако в случае неоднородного потока это довольно трудно, поскольку величина $U_1^2/(2g)$ отличается от $U_2^2/(2g)$, а величина α_1 отличается от α_2 и они обе являются неизвестными и зависят от U . Даже если считать их известными, определение потерь напора этим способом ведет к снижению точности, как это видно на рис. XII-8. Более того, в непосредствен-

ной близости от места внезапного изменения потока невозможно отделить различные виды потерь напора друг от друга. Эти различные виды потерь напора взаимодействуют друг с другом, и их линейное суммирование становится незаконным.

XII-4.3. Потери напора в потоке со свободной поверхностью. Интересно отметить, что в потоке со свободной поверхностью любое изменение характера русла не приводит к дополнительным потерям напора. В самом деле, исходное положение уровня на достаточно большом удалении вверх и вниз по течению всегда остается тем же,

Рис. XII-9. Наличие разрыва на свободной поверхности потока не изменяет полной величины потерь напора $\Delta z_{1,2}$. 1 — участок, на котором потери напора уменьшаются; 2 — участок, на котором потери напора увеличиваются; 3 — первоначальная линия свободной поверхности.



каким оно было бы и при отсутствии разрыва (рис. XII-9). Рост потерь напора в одном месте всегда компенсируется их уменьшением в другом месте. Поэтому при определении местных потерь напора на самом разрыве или резком изменении потока, типа решетки, мы должны обратить особое внимание на относительное расположение двух поперечных сечений, между которыми мы хотим найти потери напора.

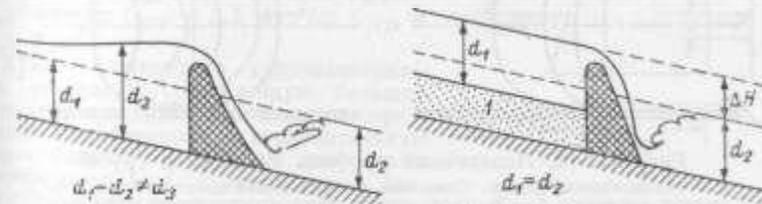


Рис. XII-10. Небольшая плотина. 1 — гравий.

Случай, изображенный на рис. XII-9, в действительности несколько видоизменяется за счет переноса донного материала (см. рис. XII-10 и XII-11).

Вопрос о влиянии подпора в случае неустойчивого русла выходит за пределы настоящей книги.

XII-4.4. Влияние локальной инерции на потери напора. Так как локальная инерция влияет на распределение скорости в трубе и на соответствующие касательные напряжения, то она оказывает значительное влияние и на величину потерь напора (рис. XII-12).

Потери напора в нестационарном потоке в данный момент теоретически нельзя считать равными потерям напора в стационарном потоке, имеющем такое же распределение мгновенных величин

средней скорости. Потери напора при одном и том же распределении мгновенных значений средней скорости будут разными в случае стационарного, ускоренного и замедленного потоков. Это может иметь значение для областей вблизи внезапных изменений потока типа донного водослива в уравнительном бассейне, где на форму потока оказывает влияние явление неустойчивости.

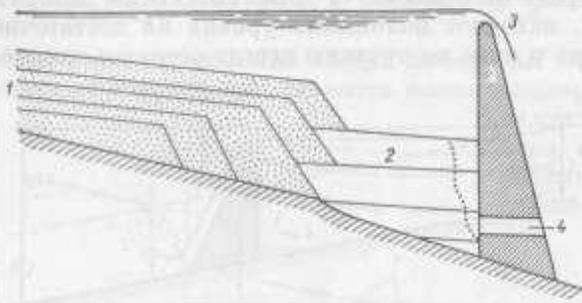


Рис. XII-11. Большая плотина.
1 — гравий, 2 — бетон, 3 — водослив, 4 — донный спуск.

Однако из-за недостатка экспериментальных данных нестационарные потоки часто изучают, используя величины потерь напора, найденные с помощью эмпирического закона, который экспериментально получен для случая стационарного потока. Как и в случае

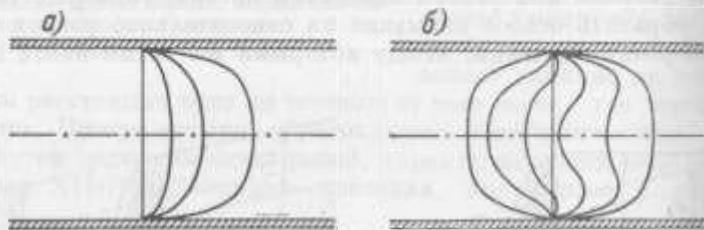


Рис. XII-12. Поперечный профиль скорости в трубе.
а — стационарный поток. Показано распределение скорости при различных расходах; б — нестационарный поток (попеременно ускоряющийся в противоположные стороны). Показано распределение скорости в различные моменты времени.

стационарного потока, для определения потерь напора в нестационарном потоке можно применять уравнение Бернулли, но при экспериментальном определении потерь напора в нестационарном потоке возникают еще более серьезные затруднения, чем в случае стационарного потока.

УПРАЖНЕНИЯ

XII-1. Два смежных бассейна имеют соответственно горизонтальные поперечные сечения S_1 и S_2 . Разность уровней в этих бассейнах в момент $t = 0$ равна $h_1 - h_2 = h$. В момент $t = 0$ открывается отверстие между двумя бассейнами, имеющее площадь поперечного сечения A . Коэффициент расхода отверстия равен 0,6. Найдите выражение для промежутка времени T , через который уровни воды в обоих бассейнах сравняются.

О т в е т:

$$T = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \frac{\sqrt{h}}{0,3A \sqrt{2g}}$$

XII-2. Рассмотрите четыре резервуара: A, B, C и D , связанные друг с другом, как показано на рисунке. Уровень в этих резервуарах поддерживается на высоте: $Z_A = 60$ футов, $Z_B = 40$ футов, $Z_C = 50$ футов и $Z_D = 10$ футов. Участок трубы между A и B имеет диаметр 10 дюймов и длину 3000 футов. Труба между C и D 12 дюймов в диаметре и 6000 футов в длину. Наконец, соединяющий

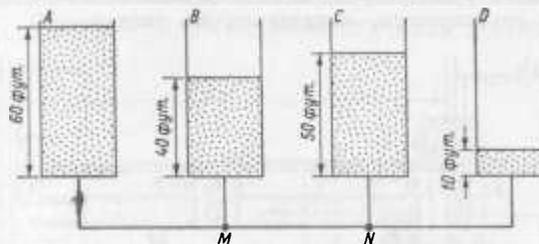


Рис. к упражнению XII-2.

участок MN имеет 5500 футов в длину. При этом точка M находится в 1000 футах от резервуара A , а точка N — в 2000 футах от резервуара D . Коэффициент трения f в этих трубах равен: 0,20 для труб диаметром 10 и 12 дюймов и 0,224 для трубы между точками M и N . Диаметр трубы MN таков, что расход через нее составляет 1,2 фут³/с. Определите расходы на участках AM, MB, CN и ND , а также диаметр трубы MN .

О т в е т: $Q_{AM} = 3,05$ фут³/с; $Q_{MB} = 1,85$ фут³/с; $Q_{CN} = 3,2$ фут³/с; $Q_{ND} = 4,4$ фут³/с.

XII-3. Рассмотрите гидроэлектрическую установку, содержащую большой резервуар, где уровень остается практически неизменным, горизонтальную галерею длиной L с круглым поперечным сечением площади F и уравнительный бассейн с горизонтальным поперечным сечением площади F и отводящий рукав, как показано на рисунке. Потери напора в галерее составляют $P = \pm P_0 (W/W_0)^2$, где W — средняя скорость потока как функция времени, а индекс «0» относится к стационарным условиям.

1) Покажите, что уравнение, определяющее положение уровня z в уравнительном бассейне, имеет вид

$$\frac{LF}{gf} \frac{d^2 z}{dt^2} + z + P = 0.$$

2) Определите период колебаний в галерее (при вычислениях величиной P пренебречь).

3) Определите амплитуду колебаний z в уравнительном бассейне в случае, когда первоначальный расход $Q_t = fW_a$ внезапно уменьшен до нуля или до меньшей, чем прежде, величины $Q'_t = fW'_a$ (величиной P снова пренебрегаем). Объясните качественно характер влияния величины P .

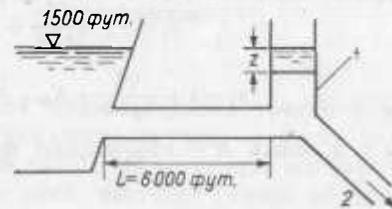


Рис. к упражнению XII-3.
1 — уравнительный бассейн; 2 — желоб.

О т в е т:

$$2) T = 2\pi \sqrt{\frac{LF}{gf}};$$

$$3) z = (W_a - W_a^*) \sqrt{\frac{Lf}{gF}} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

XII-4. Выведите основные уравнения движения для нестационарного потока в трубках, соединенных параллельно и последовательно.

XII-5. Выведите уравнение движения, обусловленного внезапным открытием затвора в трубопроводе, показанном на рисунке.

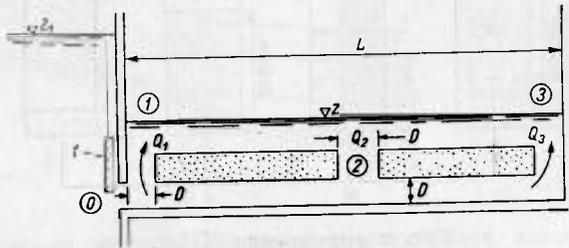


Рис. к упражнению XII-5.
1 — затвор.

О т в е т:

$$L dz = (Q_1 + Q_2 + Q_3) dt,$$

$$z_1 = z + \frac{Q_1^2}{2gD^2} + K_{0-1} \frac{(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2}{2g},$$

$$z_1 = z + \frac{Q_2^2}{2gD^2} + K_{0-2} \frac{(Q_2 + Q_3)^2}{2g} + \frac{L}{2gD} \frac{d(Q_2 + Q_3)}{dt}$$

и т. д. Здесь K — коэффициент потерь напора.

Глава XIII

ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

XIII-1. Внешние и внутренние силы

XIII-1.1. **Элементарная частица жидкости.** Уравнение движения (уравнение импульсов) $F = m dV/dt$ было выражено в дифференциальной форме для элементарной частицы жидкости единичного объема и массы ρ (см. главу VI). Напомним, что это уравнение в форме Навье — Стокса выражает равенство между силами инерции единичного объема и соответствующими приложенными силами.

Приложенные силы разделяются на внешние и внутренние (см. главу V). Внутренние силы обусловлены давлением и трением. Они по определению в сумме равны нулю и не вносят вклада во враща-

тельный момент рассматриваемой частицы. Это положение следует из третьего закона Ньютона, гласящего, что действие равно противодействию.

Внешние силы разделяются на поверхностные, обусловленные давлением и трением, и объемные, или массовые, обусловленные тяготением. Полная сумма этих сил отлична от нуля и поэтому вызывает движение элементарной частицы жидкости.

XIII-1.2. **Движение двух соседних элементарных частиц жидкости.** Рассмотрим две соседние частицы жидкости, показанные на рис. XIII-1. Векторная сумма внешних сил, действующих на две

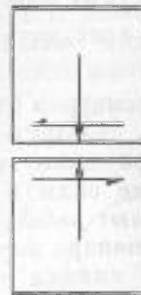


Рис. XIII-1. При изучении общего движения внешние силы на границах между двумя смежными частицами жидкости могут рассматриваться как внутренние силы

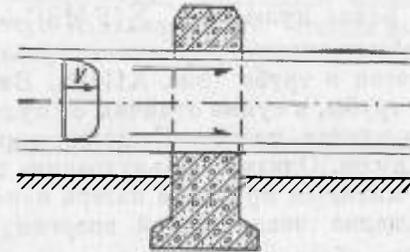


Рис. XIII-2. Внешние силы стремятся сдвинуть трубу в направлении потока, однако они не совершают работы. Потери напора обусловлены работой внутренних сил, полная сумма которых равна нулю.

соприкасающиеся поверхности, равна нулю согласно третьему закону Ньютона. Поэтому на общее движение группы из этих двух частиц будут влиять только внешние силы, действующие на наружные, не соприкасающиеся стороны этих частиц. Таким образом, рассмотрение этих внешних сил позволяет теоретически исследовать общее, совместное движение обеих частиц, но не их движение относительно друг друга.

XIII-1.3. **Обобщение на случай определенной конечной массы жидкости.** При обобщении на случай конечной массы жидкости, состоящей из бесконечного количества элементарных частиц, все внутренние силы в сумме дают нуль и не создают вращательного момента рассматриваемой массы. Общее движение этой массы жидкости зависит только от внешних сил, приложенных к ней. Следовательно, такое упрощение не позволяет исследовать внутреннее движение в пределах рассматриваемой массы жидкости, а также тонкую структуру картины потока.

XIII-1.4. **Математическое выражение импульса.** Разделяя силы на внешние F_e и внутренние F_i , можно записать уравнение импульсов $F = m dV/dt$ в виде $F = \sum F_i + \sum F_e = m dV/dt$. Так как по определению $\sum F_i = 0$, то $\sum F_e = m dV/dt$ или $\sum F_e = d(mV)/dt$.

Последнее выражение означает: изменение импульса (величины mV) во времени равно сумме внешних сил, действующих на массу жидкости.

XIII-1.5. Важное замечание относительно силы инерции, работы и энергии. Вместо выражения уравнения импульсов $F = m dV/dt$ для элементарной частицы в виде равенства между силами и инерцией, рассмотрим равенство между работой и изменением кинетической энергии, которое было получено в X-1.1, т. е. выражение $F dS = m (dV/dt) dS = d(mV^2/2)$. Так как мы можем разделить силы на внешние и внутренние, то $\sum (F_e dS) + \sum (F_i dS) = d(mV^2/2)$. Однако, несмотря на то, что полная сумма внутренних сил по определению равна нулю ($\sum F_i = 0$), работа этих внутренних сил не равна нулю, т. е. $\sum (F_i dS) \neq 0$.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим однородный поток в трубе (рис. XIII-2). Внешние силы, действующие на стенки трубы, в сумме отличны от нуля, и стремятся сдвинуть трубу в направлении потока. Существующие внутренние силы в сумме равны нулю. Однако эти внутренние силы совершают работу, и эта работа является причиной потерь напора. Потери напора выражают превращение механической энергии в тепловую силами трения.

Таким образом, если мы рассматриваем равенство энергий, внутренними силами пренебрегать нельзя.

XIII-1.6. Область применения. Из сказанного выше можно сделать вывод, что на практике применение либо уравнения сохранения количества движения (импульса), либо уравнения сохранения энергии зависит от того, насколько необходимо рассмотрение внутренних сил в исследуемом явлении. Это будет проиллюстрировано рядом примеров в настоящей главе.

Многие гидравлические задачи весьма упрощаются благодаря тому факту, что сумма внутренних сил равна нулю. Именно по этой причине теорема импульсов поистине является ключом от множества дверей, плотно закрытых для других методов, основанных на уравнении сохранения энергии. Теорема импульсов используется для расчета обобщенных эффектов, относящихся к массе жидкости в целом, без учета тонкой структуры картины потока, которая может быть весьма сложной. Однако расчет изменения импульса по данным только о внешних силах требует детального знания граничных условий на внешних краях исследуемой массы жидкости. Это положение иллюстрируется в XIII-5.

XIII-1.7. Теорема импульсов и уравнение Навье — Стокса. Уравнение импульсов, как и уравнение Бернулли, можно вывести различными путями. Одним из таких путей является использование основного уравнения Навье — Стокса (или Эйлера) с последующим интегрированием всех членов, так что вместо сил, описывающих движение элементарной частицы жидкости массы ρ , мы получаем силы, описывающие движение конечной массы жидкости m . Этот путь очевиден, так как уравнение Навье — Стокса представляет собой уравнение импульсов для массы жидкости единичного объема.

Вместо этого мы проделаем непосредственный вывод в векторной форме для произвольной массы жидкости конечных размеров. Хотя теорема импульсов используется главным образом для решения задач, связанных со стационарным потоком, здесь будет также разобран более общий случай нестационарного потока. Этот случай позволит показать те трудности, с которыми встречаются при использовании теоремы импульсов для изучения нестационарного движения.

XIII-2. Математические преобразования

XIII-2.1. Математическое выражение полного импульса конечного объема жидкости. По определению, импульсом называется произведение массы на скорость, т. е. величина mV . Отсюда импульс

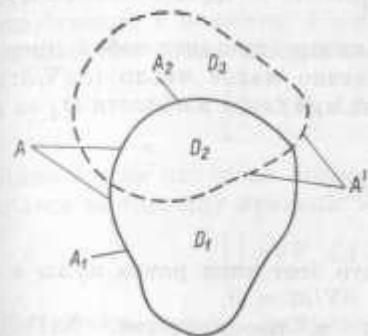


Рис. XIII-3. Обозначения, используемые при выводе уравнения импульсов.

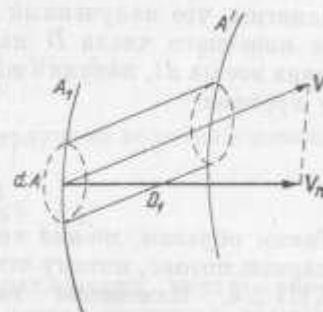


Рис. XIII-4. Обозначения, используемые при выводе уравнения импульсов.

элементарной частицы массы ρ равен ρV . Следовательно, полный импульс определенной массы жидкости объема D , в пределах которого вектор скорости меняется как во времени, так и в пространстве, будет $\iiint_D \rho V dD$, где dD — элемент объема D .

XIII-2.2. Обозначения. Необходимые выкладки аналогичны тем, которые были приведены в XII-1.2. Напомним, что масса жидкости в элементарной трубке тока рассматривалась последовательно в моменты t и $t + dt$ (см. рис. XII-3). Однако теперь мы для большей общности не будем ограничивать рассматриваемую массу жидкости трубкой тока — пусть это будет какая угодно масса жидкости в данном потоке, как показано на рис. XIII-3. Эта масса может иметь любую форму и любые размеры.

Пусть в момент t рассматриваемая масса жидкости определяется замкнутой поверхностью A , тогда в момент $t + dt$ эта же масса будет определяться замкнутой поверхностью A' , аналогичной поверхности A . Обе эти поверхности делят занимаемое ими пространство на три области: D_1 , D_2 и D_3 . В то время как область D_2 имеет конечные размеры, области D_1 и D_3 , по определению, бесконечно малы, поскольку бесконечно мал интервал времени dt .

Будем последовательно определять величины полных импульсов жидкости в этих трех областях.

XIII-2.3. Изменение импульса во времени. Импульс жидкости, заключенной в общей области D_2 в момент t , равен $\iiint_{D_2} \rho \mathbf{V} dD$, а в момент $t + dt$, поскольку величина скорости станет равной $\mathbf{V} + (\partial \mathbf{V} / \partial t) dt$, импульс в той же области будет равен $\iiint_{D_2} \rho [\mathbf{V} + (\partial \mathbf{V} / \partial t) dt] dD$.

Таким образом, разность, или изменение импульса за время dt , составит

$$\iiint_{D_2} \rho (\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dt) dD - \iiint_{D_2} \rho \mathbf{V} dD = \iiint_{D_2} \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} dt dD.$$

Заметим, что полученный интеграл представляет собой произведение конечного числа D на бесконечно малое число $(\partial \rho \mathbf{V} / \partial t) dt$. Поделив все на dt , получим изменение импульса в области D_2 за единицу времени:

$$\iiint_{D_2} \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} dD.$$

Таким образом, можно видеть, что этот член равен нулю в стационарном потоке, потому что тогда $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$.

XIII-2.4. Изменение импульса в пространстве. XIII-2.4.1. Импульс жидкости, заключенной в области D_1 (рис. XIII-4) в момент t , равен $\iiint_{D_1} \rho \mathbf{V} dD$, т. е. является произведением конечного числа $|\mathbf{V}|$ на бесконечно малое число D_1 . Область D_1 можно считать состоящей из элементарных цилиндров с основанием dA и сторонами, параллельными вектору скорости \mathbf{V} .

Объем элементарного цилиндра будет $dD = dA V_n dt$, где V_n — проекция вектора \mathbf{V} на перпендикуляр к поверхности dA . Получаем, что $\iiint_{D_1} dD = \iiint_{A_1} dA V_n dt$, где A_1 — часть поверхности рассматриваемого объема A , определяющая границы области D_1 (см. рис. XIII-3).

Отсюда импульс жидкости, заключенной в области D_1 , равен

$$\iiint_{D_1} \rho \mathbf{V} dD = dt \iint_{A_1} \rho \mathbf{V} V_n dA.$$

Таким образом, мы выразили импульс через поверхностный интеграл вместо объемного интеграла по области D_1 .

XIII-2.4.2. Импульс жидкости, заключенной в области D_3 в момент $t + dt$, равен

$$\iiint_{D_3} \rho (\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dt) dD.$$

Первый интеграл $\iiint_{D_3} \rho \mathbf{V} dD$ представляет собой произведение конечного числа $|\mathbf{V}|$ на бесконечно малое число D_3 , в то время как второй интеграл $\iiint_{D_3} \rho (\partial \mathbf{V} / \partial t) dt dD$ представляет собой произведение двух бесконечно малых чисел: $|\partial \mathbf{V} / \partial t| dt$ и D_3 . Поэтому вторым интегралом можно пренебречь.

На основании соображений, подобных высказанным выше, можно найти, что

$$\iiint_{D_3} \rho \mathbf{V} dD = - dt \iint_{A_2} \rho \mathbf{V} V_n dA,$$

где A_2 — часть поверхности рассматриваемого объема A , определяющая границы области D_3 .

XIII-2.4.3. Разность между импульсами в областях D_2 и D_1 соответственно в моменты $t + dt$ и t , вызванная пространственной изменчивостью скорости, равна

$$dt \iint_{A_2} \rho \mathbf{V} V_n dA - dt \iint_{A_1} \rho \mathbf{V} V_n dA.$$

Деля все на интервал времени dt , получаем величину изменения импульса за единицу времени

$$\iint_{A_2} \rho \mathbf{V} V_n dA - \iint_{A_1} \rho \mathbf{V} V_n dA.$$

Поскольку потоку импульса, направленному внутрь области, приписывается отрицательный знак, а потоку импульса, направленному наружу из области, — положительный знак, и поскольку $A = A_1 + A_2$, приведенная выше разность импульсов дает в результате $\iint_A \rho \mathbf{V} V_n dA$. В этом выражении можно узнать встречающуюся в элементарной гидравлике величину ρQV .

XIII-2.5. Общая формула. Полное изменение импульса (и времени, и пространственное) за единицу времени равно сумме всех внешних сил, т. е.

$$\sum \mathbf{F}_e = \iiint \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} dD + \iint \rho \mathbf{V} V_n dA.$$

XIII-2.6. Затруднения в случае нестационарного потока. В случае стационарного потока тройной интеграл по объему равен нулю (см. XIII-2.3) и уравнение импульсов приобретает простой вид:

$$\sum \mathbf{F}_e = \iint_A \rho \mathbf{V} V_n dA.$$

В этом уравнении требуется задать только граничные условия на поверхности A , так как импульс задан с помощью поверхностного интеграла. Поэтому применение данного уравнения не требует знания тонкой структуры потока внутри области D ; характеристики потока должны быть известны только на поверхности A .

В случае же нестационарного потока объемный интеграл не равен нулю, и требуется знание картины потока как функции времени и пространства внутри области D . Таким образом, применение теоремы импульсов к этому случаю наталкивается на затруднения, и на практике осуществляется гораздо реже.

XIII-2.7. Случай турбулентного потока. В предыдущих формулах обозначение V означало точное значение скорости. Приложение теоремы импульсов к турбулентному движению в такой форме теоретически невозможно из-за сложности картины потока. Однако, как указывалось выше, в турбулентном движении рассматривают только среднее движение и величину V заменяют осредненной по времени величиной \bar{V} и флуктуационной величиной V' , средняя величина которой равна нулю. С помощью выкладок, подобных приведенным в главе VII, можно показать, что

$$\frac{1}{T} \iiint_D \frac{\partial \rho V}{\partial t} dD dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \frac{1}{T} \int (\bar{V} + V') dt dD = \iiint_D \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial t} dD.$$

Таким образом, в случае стационарного движения $\bar{V} = \text{const}$, $\partial \bar{V} / \partial t = 0$ и $\iiint_D \partial \rho \bar{V} / \partial t = 0$, несмотря на турбулентность. Другими словами, член, выражающий временное изменение импульса, не изменяется в случае турбулентного движения, и фактическую величину V можно заменять средней по времени величиной \bar{V} без введения поправочного коэффициента.

XIII-2.7.1. В случае одномерного турбулентного потока теоретически возможно учесть влияние турбулентности двумя способами.

Первый способ, как и при получении уравнений Рейнольдса, состоит в том, что силы инерции, обусловленные турбулентными флуктуациями (эквивалентные потоку импульса), рассматриваются как внешние силы. В этом случае наряду с силами давления возникают внешние силы вида $-\iiint_A \rho u' u' dA$.

XIII-2.7.2. Более практичным является, однако, второй способ, когда эффект турбулентных флуктуаций учитывается так же, как это было сделано в XI-13 и XII-2 при обобщении уравнения Бернулли для трубки тока. Можно напомнить, что временные изменения учитываются зависимостью от величины σ , а изменения по поперечному сечению — зависимостью от величины χ , так что $V = U(1 + \sigma + \chi)$, где $U = (1/T) \int_0^T (1/A) \iiint_A V dA dt$. Тогда, после подстановки величины U , поверхностный интеграл приобретает вид

$$\frac{1}{T} \iiint_A \rho V V_n dA = \rho \frac{1}{T} \iiint_A U U_n (1 + \sigma + \chi)^2 dA = \rho \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) QU,$$

где $\alpha = 3\sigma^2 + 3\bar{\chi}^2$.

Можно отметить, что поправочная добавка к множителю $\alpha/3$ — такая же, как та, что была получена для члена локальной инерции,

и втрое меньше той, что была получена для члена конвективной инерции. Это естественно, так как и поток импульса, и член локальной инерции представляют собой функции от квадрата скорости.

XIII-3. Практическое применение теоремы импульсов. Случай трубки тока

XIII-3.1. Границы рассматриваемой массы жидкости. При применении теоремы импульсов прежде всего необходимо определить границы той массы жидкости, которую мы хотим рассмотреть. Эти границы выбирают там, где граничные условия хорошо известны, т. е. на твердых границах или на поперечных сечениях, где движение можно считать одномерным.

Поскольку теорема импульсов представляет собой векторное равенство, то удобно выбирать одну или две координатные оси. Обычно направление одной из осей совмещают с направлением основного потока.

Уравнение импульсов записывают в проекциях на две выбранные координатные оси. Однако во многих случаях интерес представляет только проекция на направление основного потока.

XIII-3.2. Практические выражения импульсов для одномерного потока. В случае потока, ограниченного трубкой тока, показанной на рис. XIII-5, члены уравнения импульсов

$$\iiint_A V V_n dA + \iiint_D \frac{\partial \rho V}{\partial t} dD = \sum F_e$$

применительно к массе жидкости между поперечными сечениями A_1 и A_2 примут следующий вид.

Член, характеризующий изменение импульса в пространстве, можно записать в виде

$$\iiint_A V V_n dA = \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \rho Q (V_2 - V_1).$$

Если поперечное сечение A постоянно, то поток однороден и $\iiint_A \rho V V_n dA = 0$.

Член, характеризующий изменение импульса во времени, можно записать в виде

$$\iiint_D \frac{\partial \rho V}{\partial t} dD = \rho \iiint_D \frac{\partial V}{\partial t} dA dL.$$

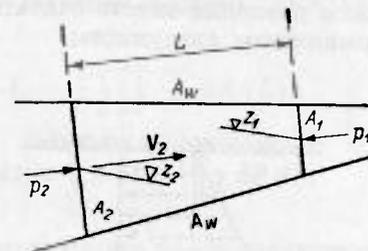


Рис. XIII-5. Применение теоремы импульсов к трубке тока; обозначения.

Если поперечное сечение постоянно и V — средняя скорость на поперечном сечении, то

$$\iiint_D \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dD = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} AL.$$

Это выражение напоминает нам, что, поскольку оно линейно относительно V , поправочный коэффициент за счет турбулентности в нем отсутствует.

XIII-3.3. Внешние силы. XIII-3.3.1. Силы давления. Силы давления можно считать состоящими из двух компонент. Эти компоненты следующие:

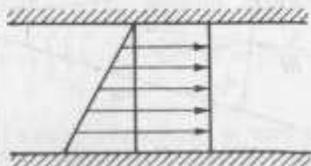


Рис. XIII-6. Силы давления на поперечном сечении.

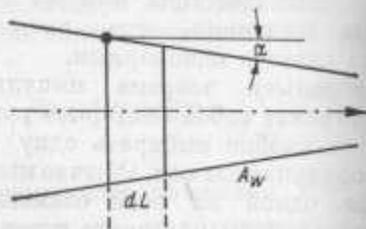


Рис. XIII-7. Силы давления на границе трубки тока.

а) сумма сил, обусловленная постоянными давлениями p_2 и p_1 , т. е. $p_2 A_2 - p_1 A_1$. Здесь можно либо учитывать, либо не учитывать атмосферное давление;

б) гидростатические силы, приложенные к центру тяжести поперечных сечений, показанные на рис. XIII-6. В случае двухмерного потока со свободной поверхностью над горизонтальным дном будем иметь

$$\sum F_e = \rho g \left[\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right].$$

Гидростатический член равен нулю в однородном потоке, и в случае потока под давлением им часто пренебрегают.

На границах трубки тока, где $V_n = 0$, сила давления дается выражением $\iint_{A_w} p n dP dL$, где P — смоченный периметр, а n — единичная нормаль к поверхности. Если P зависит от L , то выражение для этой силы будет иметь вид $\int p n P(L) dL$. Эта сила обычно учитывается только для направления основного потока вдоль оси координат, и тогда ее выражение имеет вид $\int p \sin \alpha P(L) dL$, где α — угол между осью и границей (рис. XIII-7).

В этом случае величину p можно задать в каждой точке с помощью уравнения Бернулли или с помощью допущений, основанных на физических наблюдениях и соображениях. Если все другие члены известны, то в уравнении остается только один неизвестный член, и теорема импульсов позволяет найти величину этого интеграла.

В этом случае величину p можно задать в каждой точке с помощью уравнения Бернулли или с помощью допущений, основанных на физических наблюдениях и соображениях. Если все другие члены известны, то в уравнении остается только один неизвестный член, и теорема импульсов позволяет найти величину этого интеграла.

XIII-3.3.2. Сила тяжести. Сила тяжести дается выражением $\rho g \int A dL$, а ее компонента в направлении основного потока равна $\rho g \int A dz$. Для однородного потока она приобретает вид $\mp \rho g A (z_2 - z_1)$. В горизонтальном потоке этот член равен нулю.

XIII-3.3.3. Сила трения. Сила трения имеет вид $\iint \tau dP dL$, где P снова означает смоченный периметр. Для однородного потока это выражение сводится к τPL . При рассмотрении движения в коротких сооружениях или при рассмотрении короткого участка потока (например, гидравлического прыжка или внезапного расширения) этой силой часто пренебрегают.

XIII-3.3.4. Удельная сила. Наконец, поделив все члены на ρg и приравняв их, получаем

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\alpha_2}{3}\right) \frac{V_2^2}{g} A_2 - \left(1 + \frac{\alpha_1}{3}\right) \frac{V_1^2}{g} A_1 - \frac{1}{g} \iiint \frac{\partial V}{\partial t} dA dL = \\ & = -\frac{p_2}{\rho g} A_2 + \frac{p_1}{\rho g} A_1 \mp \iint_L \frac{p}{\rho g} \sin \alpha P dL \mp \int_{z_1}^{z_2} A dz + \iint_L \tau dP dL. \end{aligned}$$

Часто оказывается удобным сгруппировать эти члены следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{V_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} \right] A_2 - \left[\frac{V_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} \right] A_1 = \frac{1}{g} \int \frac{\partial V}{\partial t} A(L) dL \mp \\ & \mp \int_L \frac{p(L)}{\rho g} \sin \alpha P(L) dL \mp \int_{z_1}^{z_2} A dz + \int_L \tau P(L) dL. \end{aligned}$$

В первой строке величиной α пренебрегли. Удельная сила для поперечного сечения A будет $[V^2/g + p/(\rho g)] A$.

Таким образом, для однородного потока имеем

$$\left[\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right] - \left[\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right] = \frac{L}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tau PL}{A},$$

поскольку $A_1 = A_2 = A$ и $V_1 = V_2$. Заметим, что член $\tau PL/A$ можно записать в виде $\tau L/R_h$, где R_h — гидравлический радиус. Полученное выражение нетрудно вывести также из уравнения Бернулли, если положить в нем $V \cong U$ (средняя скорость) и $F = \tau P/A = \tau/R_h$ (см. XII-2.6).

XIII-4. Примеры

Чтобы проиллюстрировать все сказанное выше и показать, каким образом изложенные теоретические соображения прилагаются к практике, рассмотрим несколько примеров, причем каждый раз будем обращать внимание на необходимые допущения, что далеко не всегда делается в элементарных руководствах по гидравлике.

XIII-4.1. Гидравлический прыжок на горизонтальном дне. Из наблюдений хорошо известно, что картина потока в гидравлическом

прыжке чрезвычайно сложна. Однако, рассматривая только внешние силы и изменение импульса на границах, можно изучать это сложное явление, не интересуясь сложной тонкой структурой потока.

Прежде всего границы рассматриваемого участка выбираются в плоскости, где форма потока хорошо известна, т. е. на достаточном удалении от фронта гидравлического прыжка, чтобы основной поток был направлен параллельно дну (рис. XIII-8).

Во-вторых, выбираются две координатные оси, одна из которых (OX) направлена вдоль потока.

Внешними силами, подлежащими рассмотрению в направлении оси OX , являются:

а) силы давления на границах, т. е. на вертикальных плоских поверхностях AB и CD , полная сумма которых в направлении OX отлична от нуля. Распределение давления является гидростатическим;

б) касательные напряжения, направленные вдоль оси OX на

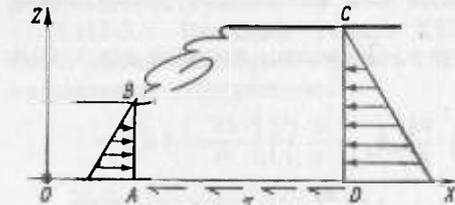


Рис. XIII-8. Гидравлический прыжок. Обозначения.

встречу потоку и обусловленные трением на границах, включая свободную поверхность и поверхности BC и AD . На таком коротком участке потока, однако, этими касательными напряжениями пренебрегают. Поэтому внешние силы, действующие вдоль оси OX , выражаются в виде

$$\sum F_e = \rho g \left[\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right]$$

Следует учесть еще дополнительный член $\int \rho u'^2 dz$, обусловленный турбулентными флуктуациями и увеличивающий давление, действующее на поверхности AB и CD , однако в данном случае мы им пренебрежем.

Изменение импульса во времени будет

$$\frac{d(mV)}{dt} = \rho Q \Delta V (V_2 - V_1).$$

Приравнявая эту величину внешним силам, получаем

$$\rho Q (V_2 - V_1) = \rho g \left[\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right],$$

или, после элементарных преобразований,

$$\frac{Q^2}{gh_1 h_2} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Направляя вторую ось вертикально вверх, получаем равенство между силой атмосферного давления, действующей на свободную поверхность, силой тяжести, равной полному весу воды в объеме $ABCD$, и внешней силой, действующей вертикально вверх на ниж-

нюю границу объема $ABCD$ со стороны дна. Изменения импульса в этом направлении не происходит.

XIII-4.2. Гидравлический прыжок в туннеле. Рассмотрим случай частично открытого затвора в туннеле, жидкость в котором находится под значительным давлением (рис. XIII-9).

Для избежания кавитационных эффектов в этом случае часто необходимо устройство вентиляционной отдушины. Когда наступают условия для образования гидравлического прыжка, водный поток действует как струйный насос (эжектор), и некоторое количество воздуха засасывается в туннель. Из-за потерь напора в вентиляционной отдушине давление на свободной поверхности меньше атмосферного. Эта разность давлений должна быть учтена в выражении

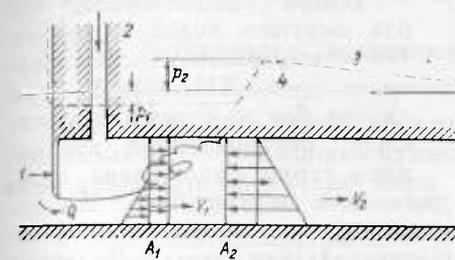


Рис. XIII-9. Гидравлический прыжок в туннеле.

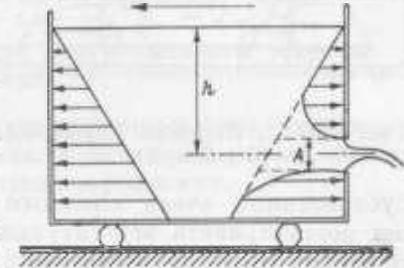


Рис. XIII-10. Реактивный эффект струи.

1 — затвор; 2 — воздушный канал; 3 — линия напора давления; 4 — атмосферное давление.

для внешних сил. Самое простое решение мы получим, если возьмем абсолютную величину давления $P = p + p_a$, откуда

$$\sum F_e = \left(P_1 A_1 + \rho g \frac{A_1 h_1}{2} \right) - \left(P_2 A_2 + \rho g \frac{A_2 h_2}{2} \right).$$

Величина P_2 больше, чем атмосферное давление, из-за потерь напора в расположенной вниз по течению части туннеля. Полученное уравнение основано на таких же допущениях, какие были сделаны в XIII-4.1. Из-за проникновения воздуха импульс на поперечном сечении 1 равен $\rho Q^2 / A_1$, а на поперечном сечении 2 импульс равен $\rho Q (Q + Q_a) / A_2$, где Q_a — расход воздушного потока при давлении P_2 ; ρQ означает массу, переносимую за единицу времени, а $(Q + Q_a) / A$ означает скорость.

Массой воздуха пренебрегают, но воздушный поток оказывает влияние на скорость воды.

XIII-4.3. Парадокс Бержерона. Рассмотрим бак на колесах, изображенный на рис. XIII-10. С одной стороны бака распределение давления является гидростатическим, в то время как с другой стороны напор давления преобразуется в скоростной напор. Разность давлений можно найти, последовательно рассчитывая гидродинамическую сетку потока, распределение давления на обеих сторонах

и, наконец, действующие силы. Однако с помощью теоремы импульсов мы можем прямо получить полную величину результирующей силы в виде

$$F = \rho QV = \rho C_c A \sqrt{2gh},$$

где C_c — коэффициент сжатия. За счет этой силы (поскольку остальные силы — тяжести и атмосферного давления — имеют горизонтальные компоненты, равные нулю) бак имеет тенденцию к движению в сторону, противоположную направлению струи. Мы имеем здесь дело с принципом реактивного движения.

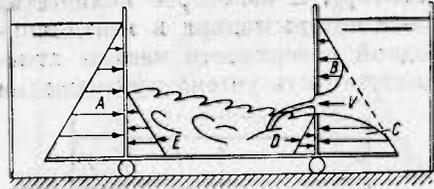


Рис. XIII-11. Парадокс Бержерона.
 $A - (B + C) = E - D$.

обусловленной очень сложным движением внутри бака. Мы можем рассматривать эту ситуацию как еще одно приложение третьего закона Ньютона («действие и противодействие равны по величине и обратны по направлению»), а теорема импульсов должна прилагаться здесь ко всей массе воды в целом. Этот результат известен под названием парадокса Бержерона.

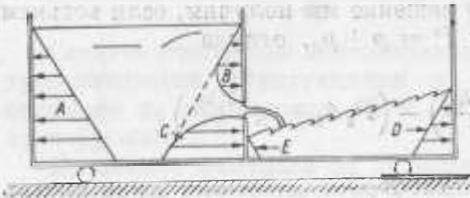


Рис. XIII-12. Парадокс Бержерона.
 $A - (B + C) = D - E$.

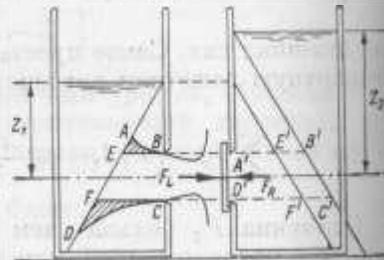


Рис. XIII-13. Еще один парадокс.
 $AEB + FCD = E'B'C'F'$.

Такой же результат мы получим в случае, показанном на рис. XIII-12. Струя действует на стенку смежного бака, скрепленного с основным. Вся система остается неподвижной.

Наконец, рассмотрим два бака, изображенных на рис. XIII-13, которые имеют отверстия одинакового поперечного сечения. Одно из отверстий закрыто пластиной, которая прижимается к отверстию напором струи, бьющей из левого бака. Площадь эпюры давления $ABCD$ равна площади $A'B'C'D'$ или, записывая иначе, $AEB + FDC = E'B'C'F'$. Рассматривая силы, действующие на пластину, получаем

$$F_L = F_R,$$

если

$$\rho A C_d (2gz_1) = \rho g A z_2,$$

т. е.

$$2C_d z_1 = z_2.$$

Если принять $C_d = 0,60$ для отверстия, то можно добиться, чтобы величина z_2 равнялась бы $1,2 z_1$, а пластина бы не падала. Изменяя отверстие в левом баке таким образом, чтобы приблизить C_d к единице, можно почти добиться равенства $z_2 = 2z_1$. Если струя, отразившись на 180° , возвращается обратно, то получим даже $z_2 = 4z_1$.

Все сказанное можно объяснить физически, рассматривая преобразование внешних сил (AEB и DCF) в импульс.

XIII-5. Затруднения, возникающие при применении теоремы импульсов

Несмотря на свою кажущуюся простоту, теорема импульсов позволяет анализировать сложные движения. При ее применении, однако, надо принимать известные меры предосторожности.

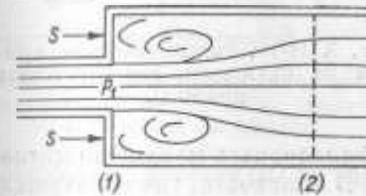


Рис. XIII-14. Внезапное расширение.

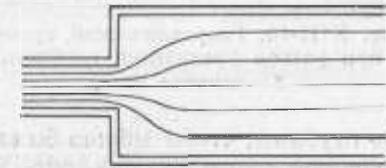


Рис. XIII-15. Внезапное расширение. Ламинарный поток.

Одна из трудностей, возникающих при использовании теоремы импульсов, связана с выбором границ и граничных условий. Не имея приближенного представления о картине потока, внешние силы рассчитать невозможно. Это обстоятельство часто требует проведения экспериментов или заставляет использовать данные прежних экспериментов. Ниже приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие высказанные соображения.

XIII-5.1. Внезапное расширение. Действующими внешними силами являются силы давления на сечениях 1 и 2 на рис. XIII-14. Обычно полагают, что давление p^* , оказываемое стенкой S на поток, равно давлению p_1^* в конце узкой трубки.

Прежде всего укажем, что если поток является ламинарным, то линии тока имеют такую кривизну, что это допущение оказывается неверным (рис. XIII-15). Однако экспериментальным путем установлено, что, когда число Рейнольдса превышает некоторое критическое значение, поток входит в широкую трубу в виде струи. Эта струя, часто неустойчивая, с помощью сил трения приводит к образованию в углах вторичных течений.

Если скорость настолько невелика, что конвективной инерцией можно пренебречь, то распределение давления на поперечном сечении l действительно является гидростатическим, и обычное допущение является справедливым. В действительности завихрения, обусловленные трением, приводят к появлению центробежных сил, что слегка увеличивает силу давления по сравнению с силой, вычисленной на основании названного допущения. Для практических целей, однако, это допущение вполне пригодно.

XIII-5.2. Гидравлический прыжок, вызванный резким увеличением глубины. В этом примере рассмотрен случай, в котором невозможно рассчитать внешние силы без специальных экспериментов.

Предположим, что в канале имеет место внезапное увеличе-

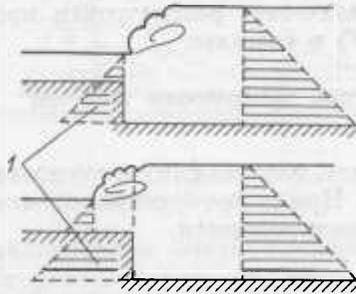


Рис. XIII-16. Гидравлический прыжок при резком увеличении глубины. 1 — внешние силы.

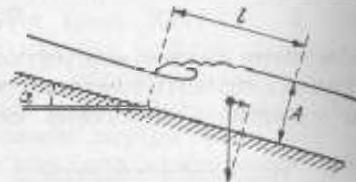


Рис. XIII-17. Гидравлический прыжок на наклонном дне (l — длина прыжка).

ние глубины, чтобы можно было точно фиксировать местоположение гидравлического прыжка (рис. XIII-16). В плоскости, где образуется фронт гидравлического прыжка, внешняя сила, обусловленная действием вертикальной стенки, изменяется, как показано на диаграмме. Только тщательные и систематические эксперименты могут охарактеризовать факторы, влияющие на это явление, и только эти эксперименты позволят создать соответствующую теорию.

XIII-5.3. Гидравлический прыжок на склоне. Исследование гидравлического прыжка на склоне требует учета массовой силы — силы тяжести, — которая существенно влияет на характеристики потока (рис. XIII-17). Рассматриваемая сила тяжести является направленной вдоль потока компонентой полной силы тяжести, обусловленной весом воды, которая заключена между двумя границами, расположенными, как обычно, в местах, где поток параллелен дну. Поэтому указанная сила $\rho g A l \sin \alpha$ является функцией от длины гидравлического прыжка l . Эту длину можно приблизительно определить экспериментально, но очевидно, что большой точности при этом получить нельзя. Однако длина гидравлического прыжка должна удовлетворять уравнению

$$\rho Q (V_2 - V_1) = \rho g \left[\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right] + \rho g A l \sin \alpha.$$

XIII-5.4. Водозаборное сооружение. Рассмотрим поток со свободной поверхностью, изображенной на рис. XIII-18. Подъем уровня

воды в части $ABCD$ теоретически можно рассчитать, используя уравнение импульсов вдоль оси OX для массы воды, заключенной в области $EFBC$. Таким образом:

$$\rho Q V = \rho g \left[\frac{(d + \Delta d)^2}{2} - \frac{d^2}{2} \right],$$

откуда $\Delta d = V^2/g$, а не $V^2/(2g)$, как можно было подумать на основании поверхностного анализа.

Однако практические результаты часто ближе к величине $V^2/(2g)$, чем к величине V^2/g . Это происходит не оттого, что теория импульсов неверна, а оттого, что неверными являются граничные условия.

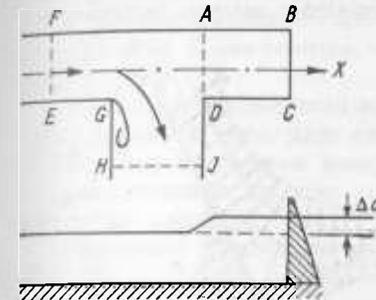


Рис. XIII-18. Внешние силы, обусловленные водозабором, теоретически найти не удастся.

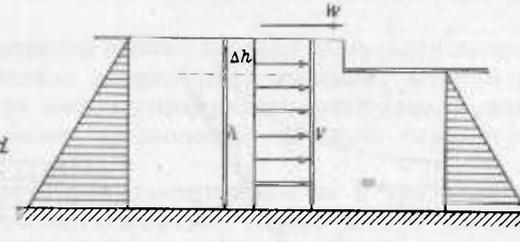


Рис. XIII-19. Волна перемещения.

Скорость на участке GD не перпендикулярна к поперечному сечению, и теорему импульсов надо в этом случае применять для всей массы $BCDJHGEF$, чтобы включить в рассмотрение разность между внешними силами, приложенными к участку DJH , где уровень выше, и внешними силами, приложенными к участку FG , где уровень ниже. К сожалению, оценить эти внешние силы теоретическим путем не удастся.

XIII-5.5. Нестационарный поток. Волна перемещения. В качестве примера нестационарного потока, к которому можно приложить теорему импульсов, рассмотрим волну перемещения (рис. XIII-19). Предполагается, что волна распространяется в спокойную воду и что скорость V , обусловленная волной перемещения, постоянна в вертикальной плоскости. Если обозначить скорость распространения волны через W , то масса воды, изменяющая свою скорость за время dt от 0 до V , будет равна $\rho (h + \Delta h) W dt$. Отсюда изменение импульса за единицу времени будет равно

$$\iiint_{\text{Vol}} \frac{\partial \rho V}{\partial t} d(\text{Vol}) = \rho V W (h + \Delta h).$$

Внешние силы будут

$$\rho g \frac{(h + \Delta h)^2}{2} - \rho g \frac{h^2}{2} \cong \rho g h \Delta h.$$

Приравнивая эти два выражения, получаем $\rho VW(h + \Delta h) = \rho gh \Delta h$. С другой стороны, на основании закона неразрывности мы можем записать $V(h + \Delta h) = W \Delta h$. Исключая V , получаем $W = \sqrt{gh}$. Более точная теория, в которой учитывается кривизна траекторий, дает (см. XVII-6.2)

$$W = \left[gh \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} + \frac{h^2}{3 \Delta h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right]^{1/2}.$$

XIII-6. Взаимосвязь между импульсом и энергией

Мы рассмотрим в этом разделе область применения теоремы импульсов и сравним ее с областью применения закона сохранения энергии.

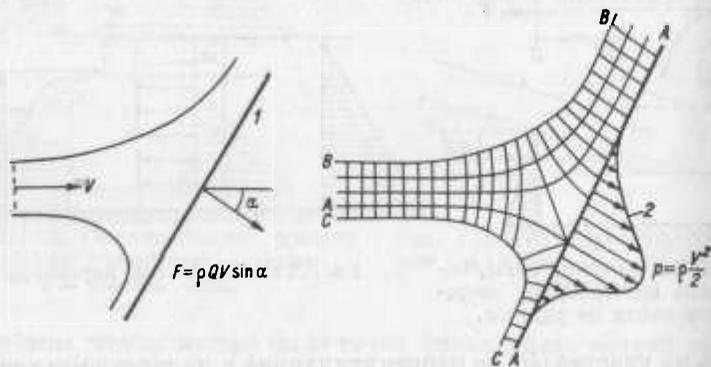


Рис. XIII-20. Полная нагрузка дается теоремой импульсов. Распределение давления можно получить с помощью уравнения Бернулли и метода гидродинамических сеток. 1 — пластина; 2 — распределение давления.

Как было указано в XIII-4.1, возможность применения того или иного из этих двух методов зависит от того, насколько изучаемое явление связано с внутренними силами. Теорема импульсов применяется для изучения обобщенных эффектов, каким бы сложным по своей структуре не был поток. Закон сохранения энергии применяется для изучения явлений, связанных с внутренним движением, и в которых должна учитываться очень тонкая структура потока.

Нетрудно понять, что второй метод встречает больше ограничений при применении к гидравлическим задачам, так как он требует, как мы видели раньше, целого ряда допущений, например отсутствия завихренности. Эти ограничения связаны с трудностями, возникающими при интегрировании уравнений Навье — Стокса.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное выше.

XIII-6.1. Безвихревой поток без трения. Полная сила напора струи, ударяющейся в закрепленную или подвижную пло-

скость, сила, действующая на повышенный носок водослива, полная горизонтальная сила, действующая на частично открытый затвор туннеля, и т. д. могут быть рассчитаны с помощью теоремы импульсов (рис. XIII-20). С другой стороны, точное распределение давления во всех этих случаях можно рассчитать следующим способом.

Поток считаем безвихревым, поэтому можно построить гидродинамическую сетку, которая дает распределение скорости. Распределение давления мы получим, используя уравнение Бернулли, выражающее закон сохранения энергии. Ясно, что этим способом можно вычислить и полную силу напора, интегрируя силы давления: $\int p dA = T$, и полученный результат можно сопоставить с тем, который получен с помощью теоремы импульсов.

При этом результат, полученный с помощью теоремы импульсов, оказывается более точным, если граничные условия известны достаточно хорошо.

XIII-6.2. Одномерный вихревой поток. Теорема импульсов может быть использована для анализа целого ряда явлений, например таких, как внезапная потеря напора при резком расширении или гидравлический прыжок, каким бы сложным по своей структуре поток не являлся.

Применяя уравнение сил — импульсов совместно с уравнением энергии — работы, можно получить величину потерь напора, вычисляя разность полных напоров: $V^2/(2g) + p/\omega + z$. Оба эти уравнения пригодны для изучения дивергентного потока, где потерями напора можно пренебречь. Однако применение уравнения энергии — работы к участку резкого расширения неправомерно без ввода дополнительного члена, выражающего потери напора, несмотря на идентичность уравнений в их дифференциальной форме.

XIII-6.3. Некоторые разнообразные приложения. Чтобы показать, насколько разнообразны возможные приложения теоремы импульсов, ниже приведены некоторые случаи, когда можно использовать эту теорему:

1) определение полной силы напора, создаваемого струей, пропеллером или эжектором при наличии двух идентичных жидкостей или двух различных жидкостей, например воздуха и воды;

2) определение полной силы, действующей на ледяной покров реки, при условии, что с помощью вертикальных эшюр скорости можно оценить силу сопротивления, которая действует на поток со стороны дна;

3) определение полной силы, действующей на крыло или лопасть, когда происходит отрыв потока от поверхности. Классическая теория крыла Жуковского дает величину этой силы при предположении, что поток обладает циркуляцией, но является безвихревым и отрыва потока не происходит.

XIII-6.4. Поток в трубе с боковым ответвлением. Поток в трубе с боковым ответвлением представляет особый интерес в качестве иллюстрации высказанных выше соображений об областях применимости уравнения Бернулли и теоремы импульсов. Рассмотрим поток,

показанный на рис. XIII-21. Если считать движение двухмерным, то первый метод анализа предполагает отсутствие завихренности. В этом случае картину потока можно рассчитать с помощью конформного отображения. Однако пренебрежение силами трения делает этот метод весьма нестрогим.

Можно также применить уравнение энергии к потокам в главном трубопроводе и в боковом ответвлении, если добавить еще член, учитывающий потери напора. Но теоретически определить величину этого добавочного члена не удастся. Можно принять, что потери напора в боковой трубе такие же, как и в случае изгиба, а в основном трубопроводе — такие же, как в случае резкого расширения: $(V - V_c)^2/(2g)$. Однако систематические экспериментальные данные не подтверждают такого предположения.

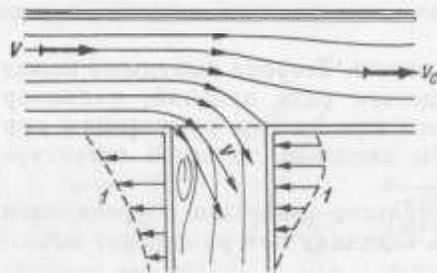


Рис. XIII-21. Поток в разветвленном трубопроводе.
1 — внешние силы.

Аналогичный упрощенный способ состоит в том, что уравнение импульсов записывается для потока в месте соединения, при условии, что добавляется член для промежуточного импульса потока в боковом ответвлении или соответствующая неуравновешенная компонента внешней силы, действующая на стенку бокового ответвления.

Из-за недостаточного знания какой-либо важной неизвестной

величины оба метода не дают возможности непосредственно использовать получаемые результаты, не прибегая к помощи экспериментов.

XIII-6.5. Заключение. Для любой задачи, в которой важен лишь обобщенный результат, лучше применять теорему импульсов из-за ее исключительной простоты, обусловленной тем фактом, что сумма всех внутренних сил считается равной нулю. Однако при пользовании теоремой импульсов следует быть очень аккуратным при оценке внешних сил и граничных условий. Часто для определения этих неизвестных исходных данных необходим эксперимент.

Если требуются более детальные сведения о характеристиках потока, то система дифференциальных уравнений, непосредственно описывающая тонкую структуру потока, может быть решена полностью. Но пригодность полученного решения оказывается ограниченной из-за ряда допущений, которые приходится делать с целью упрощения системы уравнений, для того чтобы ее можно было решить.

УПРАЖНЕНИЯ

XIII-1. Выведите уравнение импульса, интегрируя уравнение Эйлера по конечному объему. Определите поправочные члены, обусловленные турбулентностью, которые возникают при интегрировании по конечному объему уравнения Рейнольдса.

XIII-2. Рассмотрите поток в трубе радиуса R_0 , заканчивающейся двумя круглыми дисками радиуса R , которые разделены небольшим зазором ширины h , как показано на рисунке. Рассчитайте полную силу, с которой поток действует на нижний диск, считая, что поток между двумя дисками является радиальным и что полный расход равен Q .

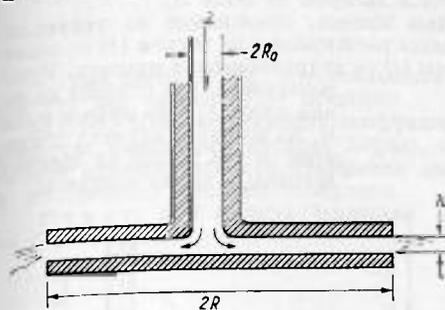


Рис. к упражнению XIII-2.

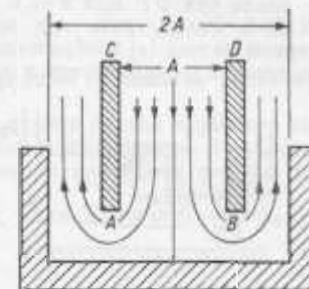


Рис. к упражнению XIII-3.

О т в е т:

$$F \approx \frac{\rho Q^2}{\pi} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{4R^2} \lg \frac{R}{R_0} \right).$$

XIII-3. Рассмотрите двухмерный поток, показанный на рисунке. Изобразите соответствующую гидродинамическую сетку и найдите распределение давления от A до B (считая, что в точках C и D отрыва не происходит). Рассчитайте полную силу, действующую на участке AB , интегрируя распределение давления, как функцию от расхода жидкости Q . Рассчитайте ту же силу с помощью теоремы импульсов. Объясните расхождение между двумя результатами.

О т в е т: по теореме импульсов полная сила равна $2\rho QV$, а в результате интегрирования распределения давления получаем лишь ρQV . Расхождение обусловлено силой, действующей в A и B .

XIII-4. Выведите следующее соотношение для гидравлического прыжка в горизонтальном прямоугольном канале:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} (V \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1),$$

где y_1 и y_2 — глубина воды соответственно выше и ниже прыжка по течению, $F_1 = V_1/\sqrt{gy_1}$ — число Фруда для потока, расположенного выше прыжка, где средняя скорость потока равна V_1 .

XIII-5. Рассмотрите поток, показанный на рисунке.

1) Изобразите две гидродинамические сетки в двух разных масштабах, чтобы проанализировать распределение давления на входе в галерею и напротив затвора.

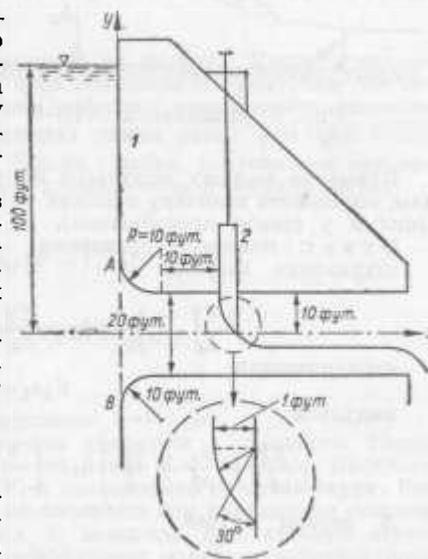


Рис. к упражнению XIII-5.
1 — плотина; 2 — затвор.

5) Рассчитайте интеграл горизонтальной и вертикальной компонент сил давления, действующих на затвор. Сравните полученную сумму горизонтальных сил с результатом, полученным по теореме импульсов.

3) Имеется ли здесь риск возникновения кавитации?

4) Найдите распределение величин u и v , а также $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ вдоль оси OY при $x = 0$ на входе в галерею от A до B .

XIII-6. Рассмотрите три двумерных потока, показанные на рисунке. На первом из них (а) изображено внезапное расширение; на втором (б) — постепенно дивергирующий поток и на третьем (в) — гидравлический прыжок. Предполагается, что глубина на левом краю h_1 и на правом краю h_2 во всех трех случаях одинакова и что расход на единицу ширины q также одинаков.

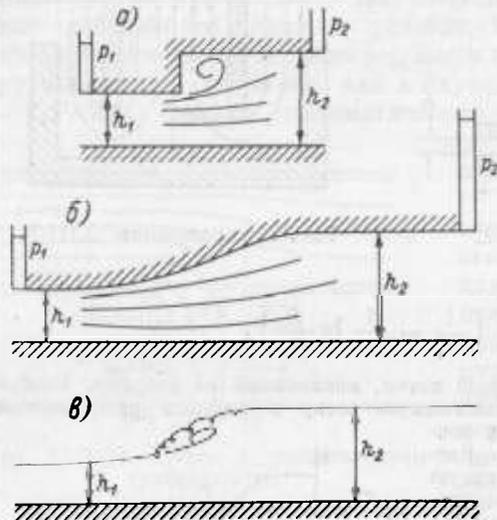


Рис. к упражнению XIII-6.

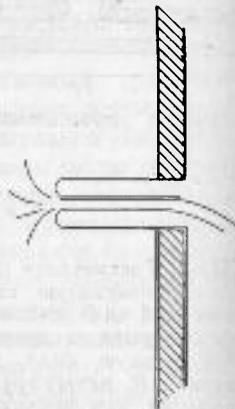


Рис. к упражнению XIII-7.

Применяя теорему импульсов и уравнение Бернулли ко всем трем случаям, определите величину внешних сил и потери напора (касательными напряжениями у стенок пренебрегаем).

О т в е т: исходные уравнения сохранения энергии

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 + \Delta H;$$

неразрывности

$$V_1 h_1 = V_2 h_2;$$

импульса

$$\left[\frac{V_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{h_1}{2} \right] h_1 - \left[\frac{V_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{h_2}{2} \right] h_2 = F.$$

В первом случае

$$F = \frac{p_1}{\rho g} (h_2 - h_1)$$

(h иногда можно пренебречь в сравнении с $p/(\rho g)$).

Во втором случае

$$F = \int_1^2 \frac{p(x)}{\rho g} \sin \alpha dx.$$

Величиной ΔH (потерями напора) пренебрегаем и таким образом вычисляем интеграл для F (h иногда пренебрегают по сравнению с $p/(\rho g)$).

В третьем случае

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}.$$

Сумма внешних сил, обусловленных атмосферным давлением, равна нулю, так что все члены $p/(\rho g)$ исчезают.

XIII-7. Найдите величину коэффициента сжатия в случае кругового отверстия (так называемая насадка Борда), показанного на рисунке. Коэффициент сжатия определяется как отношение наименьшего поперечного сечения струи к поперечному сечению отверстия.

О т в е т: $\rho Q V = \rho g z A$ (внешняя сила) и, поскольку $\rho Q V = p(2gz) AC$, то $C = 1/2$.

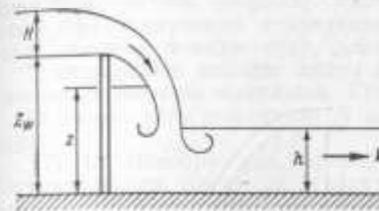


Рис. к упражнению XIII-8.



Рис. к упражнению XIII-9.

XIII-8. Рассмотрите водослив, показанный на рисунке. Найдите выражение для z как функцию от напора выше края водослива H . Допустим, что свободная поверхность водослива подвержена действию атмосферного давления, т. е. водослив открытый. Расход на единицу длины равен $q = 0,5H \sqrt{2gH}$, а величину V примем равной $0,1 \sqrt{2gh}$. Какова ошибка, допускаемая при пренебрежении углом α между направлением падения воды и вертикалью?

О т в е т:

$$\rho g \frac{z^2}{2} - \rho g \frac{h^2}{2} = \rho q [V - f(\alpha)];$$

$$f(\alpha) \cong \sqrt{2g(z_w + H - h)} \sin \alpha.$$

Подставляя $q = f(H)$, находим функцию $z = f(H)$.

XIII-9. Бьющая струя перпендикулярно ударяется о плоскость. Расход струи равен $Q = 2$ фут³/с, а скорость частиц равна $V = 20$ фут/с. Плоскость движется со скоростью U (причем $U < V$) в направлении действия струи. Рассчитайте: 1) полную силу напора струи на плоскость как функцию от скорости U ; 2) мощность струи в лошадиных силах; 3) мощность, передаваемую струей плоскости, как функцию скорости U ; 4) коэффициент полезного действия, определяемый как отношение этих двух мощностей.

Проделайте те же вычисления при условии, что плоскость заменена чашеобразным телом, показанным на рисунке.

О т в е т: $F = \rho Q (V - U)$; мощность струи $\rho Q V^2/2$; передаваемая мощность $\rho Q (V - U) U$.

В случае чашеобразного тела

$$F = 2\rho Q (V - U).$$

ХIII-10. Рассмотрите случай гидравлического прыжка, создаваемого внезапным падением дна канала на величину h . Выведите два следующих соотношения между глубиной выше прыжка y_1 и глубиной ниже прыжка y_2 :

$$\frac{V_1^2}{gy_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{h}{y_1} \right)^2 \right],$$

или

$$\frac{V_1^2}{gy_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left[\left(\frac{h}{y_1} + 1 \right)^2 - \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right],$$

в зависимости от допущения относительно распределения давления на вертикальной стенке, образующей уступ дна.

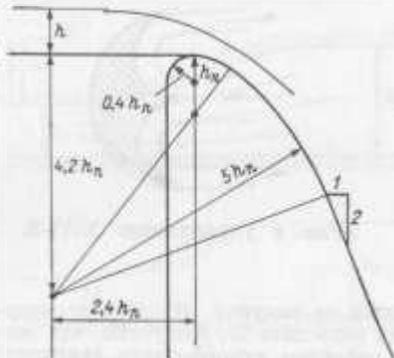


Рис. к упражнению ХIII-12 (1).

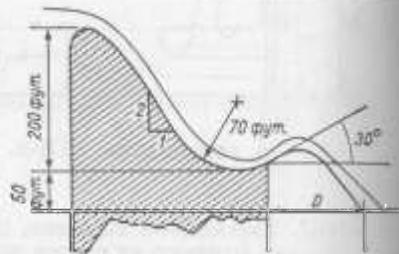


Рис. к упражнению ХIII-12 (2).

Отв е т: давление у подножия вертикальной стенки будет либо $\rho g(y_1 + h)$, либо $\rho g y_2$ в зависимости от точного местоположения скачка относительно подводного уступа.

ХIII-11. Покажите, что скорость диссипации энергии в единицу времени в гидравлическом прыжке равна

$$\frac{dE}{dt} = \rho g Q \cdot \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2}$$

и покажите также, что коэффициент полезного действия гидравлического прыжка, определяемый как отношение удельных энергий за прыжком и перед прыжком, равен

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(8F_1^2 + 1)^{3/2} - 4F_1^2 + 1}{8F_1^2(2 + F_1^2)},$$

где

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}$$

Индексы «1» и «2» означают соответственно положение перед прыжком и за прыжком.

ХIII-12. Рассмотрите водослив, изображенный на рисунке. Коэффициент расхода C , определяемый соотношением $A = Ch\sqrt{2gh}$, является функцией от величины h/h_n и эта зависимость дается в виде следующей таблицы:

h/h_n	0,2	0,4	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0
C	0,394	0,425	0,470	0,490	0,504	0,518	0,532	0,552

Положим, что $h_n = 8$ футов, а $h = 12$ футов.

- 1) Рассчитайте расход на линейный фут водослива.
- 2) Начертите гидродинамическую сетку с помощью последовательных приближений.
- 3) Определите распределение давления по полю скорости и установите, имеется ли риск возникновения кавитации.
- 4) Водослив заканчивается трамплином, радиус закругления которого равен 70 футам (см. рисунок). Рассчитайте распределение давления на трамплине (без построения гидродинамической сетки) и проинтегрируйте его, чтобы получить полную силу, действующую на поверхность трамплина.
- 5) Определите полную силу, действующую на поверхность трамплина, с помощью теоремы импульсов. Сравните результаты пунктов 4 и 5.
- 6) Рассчитайте расстояние D между подножием дамбы и местом падения струи.

ХIII-13. Подобрать ряд упрощающих условий и применяя теорему импульсов и уравнения Бернулли, найдите ряд уравнений, дающих распределение расходов через трубопровод с двумя отверстиями, тремя отверстиями, четырьмя отверстиями, ..., n отверстиями одинакового поперечного сечения и находящимися под одним и тем же давлением. Потери напора через нормальное сечение главной трубы пренебречь.

Глава XIV

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ. ПОТОК В ТРУБАХ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

XIV-1. Общее понятие о пограничном слое

XIV-1.1. Определение. XIV-1.1.1. Если вязкий поток протекает мимо твердой границы, такой, как плоская пластина или хорошо обтекаемое тело, то влияние вязкости на картину потока обычно сосредоточено в тонком слое вблизи границы. За пределами этого слоя эффект вязкости исчезающе мал, и жидкость ведет себя так, как если бы она была идеальной. Это физическое обстоятельство позволяет разделить все поле потока на две области, каждую из которых для упрощения математических выкладок можно рассматривать отдельно (рис. XIV-1).

Первую область называют пограничным слоем. Этот тонкий слой расположен в непосредственной близости от границы. В пределах этой области скорость потока быстро возрастает от нулевого значения на самой твердой стенке до величины, соответствующей скорости свободного потока. Изменение скорости с удалением от стенки происходит резко, и поэтому сила трения, связанная с поперечным градиентом скорости, играет здесь важную роль.

Во второй области влияние вязкости малое. Силами трения можно пренебречь по сравнению с силами инерции. Поэтому можно

пренебречь вязкими членами в уравнениях Навье—Стокса. Жидкость можно считать лишенной вязкости и безвихревой (см. II-4.4).

Давление в пределах пограничного слоя, как будет показано ниже, приближенно равно давлению на границе свободного потока.

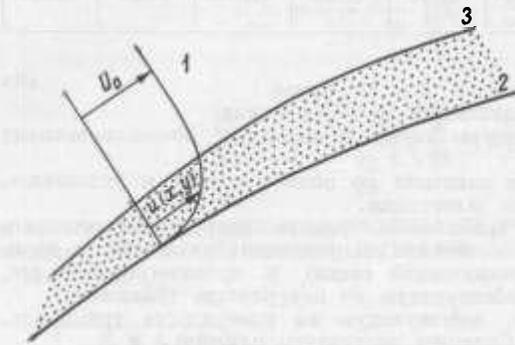


Рис. XIV-1. Пограничный слой и свободный поток.

1 — свободный поток; 2 — пограничный слой; 3 — верхняя граница пограничного слоя.

рой степени произвольным, так как изменение скорости от нулевого значения до величины, характеризующей внешний поток, происходит асимптотически. Поскольку с удалением от стенки скорость очень быстро приближается к величине скорости свободного потока, то

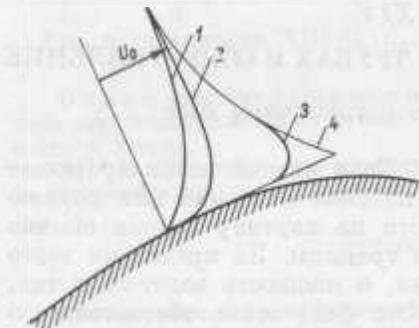


Рис. XIV-2. Влияние числа Рейнольдса на распределение скорости и толщину пограничного слоя.

1 — ламинарный поток; 2 — турбулентный подслой; 3 — турбулентный поток; 4 — идеальная жидкость.

можно определить толщину пограничного слоя δ как толщину, за пределами которой влияние пристеночного трения сравнительно мало. Величину δ определяют как такое расстояние от стенки, на котором скорость отличается от скорости свободного потока на 1%.

Мы рассмотрим также другие величины, используемые для характеристики толщины пограничного слоя, такие как толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса θ .

XIV-1.1.2. Чем больше величина числа Рейнольдса, тем меньше толщина пограничного слоя. Поэтому при очень больших числах Рейнольдса осредненное по времени движение потока очень близко к движению идеальной жидкости. Это обстоятельство уже отмечалось в VIII-1.2; оно иллюстрируется рис. XIV-2.

XIV-1.2. Толщина пограничного слоя.

XIV-1.2.1. Определение толщины пограничного слоя является до некото-

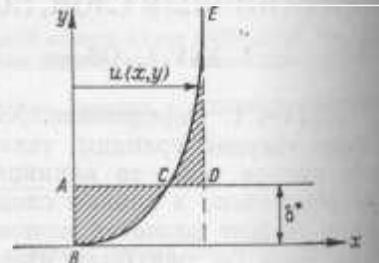


Рис. XIV-3. Толщина вытеснения (площадь ABC равна площади CDE).

можно определить толщину пограничного слоя δ как толщину, за пределами которой

можно определить толщину пограничного слоя δ как толщину, за пределами которой влияние пристеночного трения сравнительно мало. Величину δ определяют как такое расстояние от стенки, на котором скорость отличается от скорости свободного потока на 1%.

Мы рассмотрим также другие величины, используемые для характеристики толщины пограничного слоя, такие как толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса θ .

XIV-1.2.2. Толщина вытеснения в двумерном пограничном слое. Под действием сил трения прилегающая к границе часть потока замедляется. Степень замедления характеризуется величиной $\int_{y=0}^{\infty} (U_0 - u) dy$.

Толщина вытеснения δ^* представляет собой то расстояние, на которое надо передвинуть стенку, чтобы оставшийся поток давал прежний расход при условии отсутствия трения. Следовательно, величина δ^* определяется равенством (рис. XIV-3)

$$\delta^* U_0 = \int_{y=0}^{\infty} (U_0 - u) dy,$$

т. е.

$$\delta^* = \frac{1}{U_0} \int_{y=0}^{\infty} (U_0 - u) dy \cong \frac{1}{U_0} \int_0^{\delta^*} (U_0 - u) dy.$$

XIV-1.2.3. Толщина потери импульса. Вследствие трения поток импульса в пограничном слое уменьшается. Мерой уменьшения потока импульса является толщина потери импульса, определяемая как толщина слоя, имеющего скорость U_0 и обладающего таким же потоком импульса, как потеря потока импульса, обусловленная наличием пограничного слоя. Уменьшение потока импульса в пределах пограничного слоя равно

$$\int_{y=0}^{\infty} [\rho u (U_0 - u)] dy,$$

и тогда толщина потери импульса определяется выражением

$$\rho U_0^3 \theta = \rho \int_0^{\infty} u (U_0 - u) dy,$$

$$\theta = \frac{1}{U_0^2} \int_{y=0}^{\infty} u (U_0 - u) dy \cong \frac{1}{U_0^2} \int_{y=0}^{\delta} u (U_0 - u) dy.$$

XIV-2. Ламинарный пограничный слой

XIV-2.1. Стационарный однородный поток над плоской пластиной. XIV-2.1.1. Вывод уравнений. Уравнения Навье—Стокса в случае двумерного движения имеют вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

а уравнение неразрывности будет

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Как указывалось выше, скорость быстро изменяется вдоль оси OY от нулевого значения у стенки до величины скорости свободного потока на расстоянии порядка толщины пограничного слоя δ ; при этом изменение скорости вдоль плоской пластины происходит очень медленно (рис. XIV-4). Поэтому все производные по y будут гораздо больше, чем производные по x (см. IV-5.2.4 и V-4.3). Таким образом, в первом уравнении

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

и членом $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ можно пренебречь.

Далее, поперечная компонента скорости v имеет гораздо меньшую величину, чем продольная компонента u . Поэтому члены, содержащие

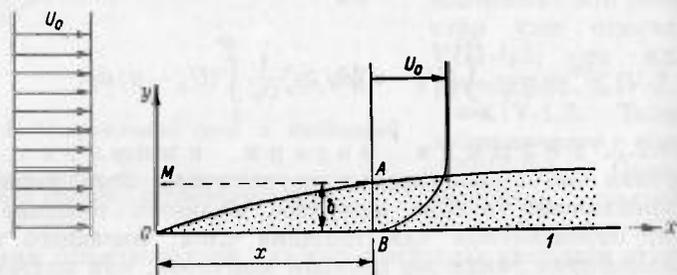


Рис. XIV-4. Схематическое изображение пограничного слоя.
1 — плоская пластина.

v во втором уравнении, гораздо меньше соответствующих членов в первом уравнении, и ими можно пренебречь. В результате второе уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0.$$

Это указывает на то, что давление является гидростатическим вдоль перпендикуляра к пластине и что величина p^* зависит только от x , причем эта зависимость определяется характером внешнего (свободного) потока. Поскольку величина p^* является функцией только от x , то мы имеем равенство

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{dp^*}{dx},$$

и уравнение движения приобретает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp^*}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Это уравнение часто называют уравнением пограничного слоя. Уравнение пограничного слоя вместе с граничными условиями

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$u = U_0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

и уравнением неразрывности определяют поле потока вблизи плоской пластины.

В частном случае, когда $U_0 = \text{const}$, т. е. в случае стационарного однородного потока над плоской пластиной при нулевых углах атаки, применение уравнения Бернулли к второй области дает для границы пограничного слоя

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0.$$

XIV-2.1.2. Определение безразмерных параметров. Как показано на рис. XIV-4, поток импульса через поперечное сечение OM (единичной ширины) равен $\rho U_0^2 \delta$. Поток импульса через сечение AB будет меньше, хотя он остается линейно связанным с величиной $\rho U_0^2 \delta$. Отсюда разность потоков импульса также линейно связана с $\rho U_0^2 \delta$. С другой стороны, полная сила трения на единицу ширины между сечениями OM и AB линейно связана с величиной $\mu (\partial u / \partial y) x$, а эта последняя линейно связана с $\mu U_0 x / \delta$. Поскольку разность потоков импульса между сечениями OM и AB обусловлена силой трения на участке OB , то указанные разность потоков импульса и силу трения можно приравнять друг другу. Тогда получаем

$$\int \mu \frac{U_0}{\delta} dx \cong \rho U_0^2 \delta,$$

или

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$$

(отметим, что полученное уравнение не будет справедливым в случае произвольного распределения давления вдоль пластины). Теперь допустим, что профили скорости на любом расстоянии x от переднего края подобны, т. е. что профиль скорости $u(y)$ при переменных значениях x будет оставаться одинаковым при надлежащем выборе масштабных множителей для $u(y)$ и y . Такими масштабными множителями являются скорость свободного потока U_0 и толщина пограничного слоя δ . Отсюда получаем соотношение подобия

$$\frac{u}{U_0} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Полагая

$$\delta \cong \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}},$$

получаем также

$$\frac{u}{U_0} = \Phi(\eta),$$

где

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu}}.$$

XIV-2.1.3. Уравнение Блазиуса. Рассмотрим теперь случай потока над плоской пластиной, когда $\partial p^*/\partial x = 0$, и введем функцию тока $\psi(x, y)$, определяемую соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тогда уравнение пограничного слоя будет

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Величина ψ равна $\int_0^y u dy$. Подставляя в подынтегральное выражение $U_0 \Phi(\eta)$ вместо u и $\eta \sqrt{\nu x/U_0}$ вместо y , получаем

$$\psi = \sqrt{U_0 \nu x} f(\eta).$$

Приведенное выше уравнение пограничного слоя можно теперь преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 f'(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} (\eta f' - f);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f''(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{U_0 \eta}{2x} f''(\eta);$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^3} = U_0 \left(\frac{U_0}{\nu x}\right) f'''(\eta).$$

Подставляя эти выражения в уравнение пограничного слоя, получаем уравнение Блазиуса

$$2f''' + ff'' = 0$$

и граничные условия:

$$f = f' = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad f' = 1 \text{ при } \eta = \infty.$$

Точное решение уравнения Блазиуса в общем виде получить нельзя. Однако можно найти решение в виде степенного ряда. Разложение в степенной ряд в окрестности значения $\eta = 0$ представим в форме

$$f(\eta) = A_0 + A_1 \eta + A_2 \frac{\eta^2}{2!} + A_3 \frac{\eta^3}{3!} + \dots,$$

где A_n — константы. Все коэффициенты этого ряда, кроме имеющих нулевые значения, можно представить в виде функций от A_2 , а величину A_2 можно найти из граничного условия: $u = U_0$ при $y \rightarrow \infty$, т. е. $f'(\eta) = 1$, когда $\eta \rightarrow \infty$. Зная величину A_2 , можно вы-

числить $f(\eta)$. На рис. XIV-5 показаны функции f, f' и f'' . Они дают решение Блазиуса для уравнений ламинарного пограничного слоя.

XIV-2.1.4. Решение уравнения Блазиуса. В приведенном выше выражении для $f(\eta)$ с помощью граничных условий $f = f' = 0$ при $\eta = 0$ находим, что $A_0 = A_1 = 0$. Учитывая это и подставляя оставшуюся часть ряда в уравнение Блазиуса, получаем

$$2A_3 + 2A_4 \eta + (A_2^2 + 2A_5) \frac{\eta^2}{2!} + (4A_2 A_3 + 2A_6) \frac{\eta^3}{3!} + \dots = 0.$$

Левая часть должна быть равна нулю при любых значениях η , что может быть только, если все коэффициенты при каждом члене равны нулю. Следовательно, имеем:

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = \dots = 0;$$

$$A_5 = -\frac{1}{2} A_2^2; \quad A_8 = -\frac{11}{2} A_2 A_5 = \frac{11}{4} A_2^3; \quad \dots$$

XIV-2.1.5. Толщина пограничного слоя. Толщина пограничного слоя для стационарного однородного потока над плоской пластиной, определенная в XIV-1.2.1 как расстояние от стенки, на котором $u = 0,99 U_0$, может быть определена из рис. XIV-5, если положить $\eta \approx 5,0$, т. е.

$$\eta = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}} \approx 5.$$

Отсюда

$$\delta \approx 5,0 \frac{x}{\sqrt{x U_0 / \nu}}.$$

XIV-2.1.6. Касательное напряжение и коэффициент сопротивления. Вычисления, изложенные в XIV-2.1.4, или график на рис. XIV-5 позволяют нам найти, что $f''(0) = 0,332$. Следовательно, касательное напряжение на стенке будет $\tau_0(x) = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0} = \mu U_0 \sqrt{U_0 / \nu x} f''(0) = (0,332 / \sqrt{R_x}) \rho U_0^2$, где $R_x = U_0 x / \nu$ — число Рейнольдса, определяемое через расстояние x от переднего края пластины.

Сопротивление трения на одной стороне пластины, имеющей длину l и единичную ширину, равно

$$D = \int_0^l \tau_0 dx = 0,664 \rho U_0^2 \frac{l}{\left(\frac{U_0 l}{\nu}\right)^{1/2}},$$

и коэффициент сопротивления C_f определяется выражением

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho l U_0^2} = \frac{1,328}{\sqrt{R_l}},$$

где $R_l = U_0 l / \nu$ — число Рейнольдса, определенное через длину пластины l .

XIV-2.2. Интегральное уравнение импульсов для пограничного слоя. XIV-2.2.1. Метод решения. XIV-2.2.1.1. Как было показано выше с помощью простейшего примера (для случая ламинарного пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине при нулевом угле атаки), вычисления очень громоздки и требуют много времени. Желательно найти приближенный метод оценки необходимых для практического использования величин. В частности,

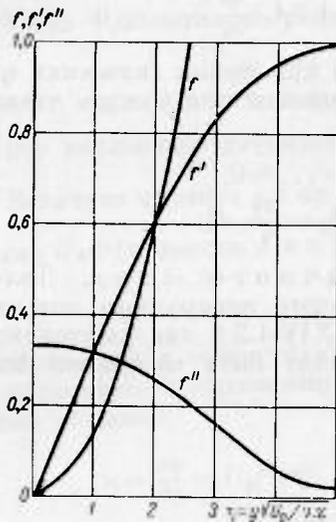


Рис. XIV-5. Решение уравнения Блазиуса.

случай, когда $\delta p^*/\delta x \neq 0$, например случай потока около клина, можно исследовать с помощью интегрального уравнения импульса. Такой метод, основанный на законе сохранения импульса, был разработан Карманом. Выведем так называемое интегральное соотношение импульсов Кармана.

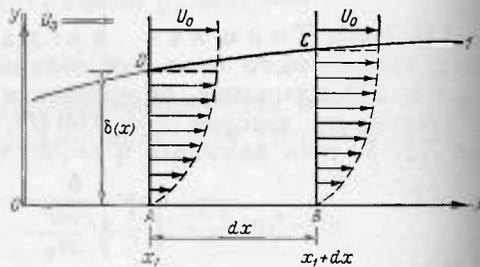


Рис. XIV-6. Применение метода импульсов к объему ABCD.
1 — граница пограничного слоя.

Рассмотрим двухмерный стационарный поток и элемент объема ABCD (рис. XIV-6). Применим к названному элементу жидкости теорему импульсов, т. е. приравняем изменение потоков импульса между границами AD, BC и CD приложенным силам. Приложенные силы состоят из силы давления, действующей на границах, и напряжения трения на стенке. Рассмотрим каждую из них отдельно. Полученное равенство будет представлять собой интегральное уравнение импульсов. Разумеется, в случае нестационарного потока требуется учитывать также добавочный член, обусловленный нестационарностью (см. XIII-2.6).

XIV-2.2.1.2. Расход через AD равен

$$\int_0^{\delta} u dy \Big|_{x=x_1},$$

а расход через BC равен

$$\int_0^{\delta} u dy \Big|_{x=x_1+dx} = \int_0^{\delta} u dy \Big|_{x=x_1} + \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx.$$

Их разность

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx$$

представляет собой то количество жидкости, которое должно перенестись через верхнюю поверхность, чтобы выполнялось условие неразрывности.

XIV-2.2.1.3. Аналогично, поток импульса в направлении оси OX, проходящий через AD, равен

$$\rho \int_0^{\delta} u^2 dy \Big|_{x=x_1},$$

а поток импульса через BC равен

$$\rho \int_0^{\delta} u^2 dy \Big|_{x=x_1+dx} = \rho \int_0^{\delta} u^2 dy \Big|_{x=x_1} + \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u^2 dy \right] dx.$$

Их разность равна

$$\rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u^2 dy \right] dx.$$

С другой стороны, поскольку скорость на верхней границе пограничного слоя равна U_0 , то поток x -импульса через верхнюю границу равен массе ρU_0 , умноженной на расход через верхнюю границу, определенный выше. Таким образом, приток x -импульса через верхнюю границу DC равен

$$\rho U_0 \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx.$$

Мы получаем, следовательно, полное изменение потока x -импульса через контур ABCD в виде

$$\rho U_0 \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u dy \right] dx - \rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u^2 dy \right] dx.$$

XIV-2.2.1.4. Рассмотрим теперь силу давления, действующую на границы объема ABCD в направлении оси OX. Сила давления на границу AD будет $\rho \delta$, а сила, действующая на границу CB, равна

$$\left(\rho - \frac{d\rho}{dx} dx \right) \left(\delta + \frac{d\delta}{dx} dx \right).$$

Поскольку изменение толщины пограничного слоя вдоль оси OX невелико, то величиной $d\delta/dx$ можно пренебречь. Однако величина $(d\rho/dx) dx$ не будет теперь считаться малой.

Сила давления, действующая в направлении OX на границу DC , также пренебрежимо мала по той же причине (так как величина $d\delta/dx$ мала).

Чистая результирующая сила давления, таким образом, будет $-\delta(dp/dx)dx$. Этот член можно выразить также через U_0 следующим образом. Из уравнения Бернулли, примененного к безвихревому потоку за пределами пограничного слоя, следует

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_0 \frac{dU_0}{dx}.$$

Отсюда чистая результирующая сила давления равна

$$-\delta \frac{dp}{dx} dx = \rho U_0 \delta \frac{dU_0}{dx} dx.$$

XIV-2.2.1.5. Теперь, установив все члены, мы можем записать интегральное уравнение импульсов для объема $ABCD$. Тогда получим равенство между найденным выше потоком x -импульса и результирующей силой давления, с одной стороны, и касательным напряжением на границе, с другой, т. е.

$$\tau_0 dx = U_0 \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho u dy \right] dx - \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho u^2 dy \right] dx + \rho U_0 \delta \frac{dU_0}{dx} dx.$$

Поделив все на dx и перегруппировав члены, получим

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho u (U_0 - u) dy \right] + \frac{dU_0}{dx} \int_0^\delta \rho (U_0 - u) dy.$$

Вводя толщину вытеснения δ^* и толщину потери импульса θ , мы можем записать интегральное уравнение импульса в виде

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_0^2 \theta) + \delta^* U_0 \frac{dU_0}{dx}.$$

Поскольку не делалось никаких допущений в отношении природы потока, то это уравнение применимо как к ламинарным, так и к турбулентным потокам. Однако в случае турбулентного потока скорость надо рассматривать как среднюю величину.

XIV-2.2.2. Примеры применения интегрального уравнения импульсов. Для того чтобы можно было сравнить результаты, возвратимся к задаче о стационарном однородном ламинарном потоке над плоской пластиной. В этом случае $U_0 = \text{const}$. Поэтому интегральное уравнение импульсов будет иметь вид

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{d\theta}{dx}.$$

Прежде всего допустим, что вертикальное распределение скорости описывается профилем вида

$$u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2,$$

где a_0, a_1, a_2 — константы, которые можно определить из граничных условий, а именно:

из условия $u = 0$ при $y = 0$ следует, что $a_0 = 0$;

из условия $u = U_0$ при $y = \delta$ следует, что $a_1 \delta + a_2 \delta^2 = U_0$;

из условия $du/dy \cong 0$ при $y = \delta$ следует, что $a_1 + 2a_2 \delta = 0$. Решая эти уравнения, находим

$$a_1 = 2 \frac{U_0}{\delta}, \quad a_2 = -\frac{U_0}{\delta^2}.$$

Таким образом, профиль скорости описывается уравнением

$$\frac{u}{U_0} = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$$

и мы можем найти толщину потери импульса θ :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy = \frac{2}{15} \delta.$$

В то же время

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{2\nu U_0}{\delta}.$$

Производя подстановку в интегральное уравнение импульсов, получаем

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U_0}.$$

Интегрируя и используя граничное условие $\delta = 0$ при $x = 0$, находим

$$\delta = 5,5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = \frac{5,5x}{\sqrt{R_x}},$$

а нормированное (безразмерное) касательное напряжение равно

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{\mu}{\rho U_0^2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = \frac{\mu}{\rho U_0^2} \frac{2U_0}{\delta} = \frac{0,366}{\sqrt{R_x}}.$$

И толщина пограничного слоя, и нормированное касательное напряжение очень близки к точным значениям, полученным в XIV-2.1.5 и XIV-2.1.6.

XIV-2.3. Однородный нестационарный поток над бесконечной плоской пластиной. XIV-2.3.1. Уравнения движения.

Так как длина пластины бесконечно велика, производные по x равны нулю, т. е. $\partial u / \partial x = 0$. Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

следует, что и $\partial v / \partial y$ также равно нулю. Отсюда величина v тоже должна быть равна нулю, так как она равна нулю на границе. Далее давление p^* всюду постоянно, так как жидкость бесконечна. В результате уравнение Навье — Стокса приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Очевидно, что это уравнение — линейное, и, следовательно, можно найти точные решения. Если жидкость движется со скоростью $U_0(t)$, а пластина закреплена, то граничные условия будут:

$$u = 0 \text{ при } y = 0; \quad u = U_0(t) \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Если жидкость на бесконечности неподвижна, а пластина движется со скоростью $U_0(t)$, то граничные условия будут:

$$u = U_0(t) \text{ при } y = 0; \quad u = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

XIV-2.3.2. Импульсивное движение бесконечной плоской пластины. Рассмотрим в качестве примера импульсивное движение бесконечной плоской пластины. В этом случае $u = 0$ при всех y , когда $t \leq 0$, и $u = U_0$, при $y = 0$ и $u = 0$ при $y \rightarrow \infty$, когда $t > 0$.

Дифференциальное уравнение в частных производных можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение, введя безразмерную переменную

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2\nu t}}$$

Произведя необходимое дифференцирование и подстановку, получим

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \eta \frac{du}{d\eta} = 0.$$

Интегрирование по η дает

$$u(y, t) = C_1 \int_0^{\frac{y}{\sqrt{2\nu t}}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta + C_2,$$

где C_2 можно определить из граничных условий: $u = U_0$ при $\eta = 0$. Отсюда $C_2 = U_0$. Константа C_1 находится из начального условия $u = 0$ при $t = 0$ ($\eta = y/\sqrt{2\nu t} = \infty$). Произведя подстановку в приведенное выше уравнение, получаем

$$C_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta + U_0 = 0.$$

Интеграл равен $\sqrt{\pi/2}$, откуда $C_1 = -\sqrt{2/\pi} U_0$. Подставляя значения C_1 и C_2 , находим распределение скорости:

$$u = U_0 \left[1 - \sqrt{2/\pi} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{2\nu t}}} e^{-\eta^2} d\eta \right],$$

или

$$u = U_0 \operatorname{erfc} \frac{y}{\sqrt{2\nu t}}.$$

Распределение скорости показано на рис. XIV-7. Ясно, что профили скорости в различные моменты подобны; они приводятся к одной кривой благодаря использованию безразмерных переменных u/U_0 и $\eta = y/\sqrt{2\nu t}$.

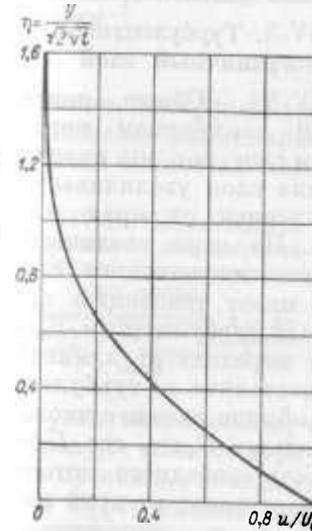


Рис. XIV-7. Распределение скорости вблизи бесконечной пластины при внезапно начинающемся (импульсивном) течении.

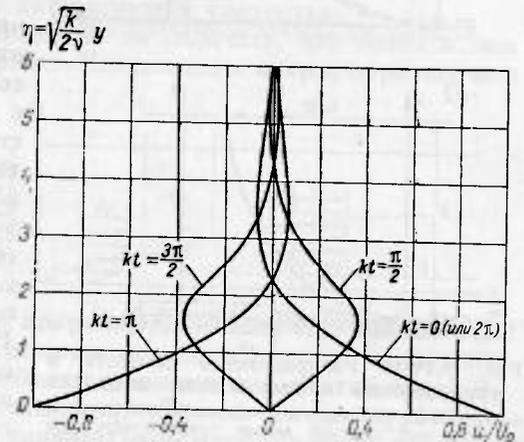


Рис. XIV-8. Распределение скорости вблизи колеблющейся бесконечной плоской пластины.

XIV-2.4. Пограничные слои при колебательном движении плоской пластины. Если бесконечная плоская пластина совершает колебательные движения параллельно самой себе, то уравнение движения будет тем же, что и при импульсивном движении бесконечной плоской пластины, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в то время как граничные условия, допустим, могут быть:

$$u(0, t) = U_0 \cos kt, \quad u(\infty, t) = 0,$$

если колебания гармонические. Решение в этом случае имеет вид

$$u(y, t) = U_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{2\nu}} y\right) \cos\left(kt - \sqrt{\frac{k}{2\nu}} y\right).$$

Профиль скорости $u(y, t)$ имеет форму затухающего с высотой гармонического колебания с амплитудой $U_0 \exp(-\sqrt{k/2\nu} y)$. Амплитуда экспоненциально убывает с удалением от пластины. Профиль скорости для некоторых моментов времени показан на рис. XIV-8.

Аналогичное решение имеет место и в том случае, когда жидкость совершает движение со скоростью $u = U_0 \cos kt$, а пластина закреплена. Это решение имеет особенное значение для изучения движений

в пограничном слое в случае периодических гравитационных волн и при исследовании затухания волн под действием донного трения.

XIV-3. Турбулентный пограничный слой

XIV-3.1. Общее описание. В ламинарном пограничном слое, как мы видели, толщина слоя увеличивается с удалением от края пластины. По мере увеличения толщины пограничного слоя поток имеет тенденцию становиться турбулентным. Критерий перехода от ламинарного состояния к турбулентному обычно связан с числом Рейнольдса $U_0 x / \nu$, где U_0 — скорость свободного потока, x — расстояние от края пластины и ν — коэффициент кинематической вязкости.

Положение точки x или величина числа Рейнольдса,

соответствующие переходу в турбулентное состояние, зависят в известной степени от уровня турбулентности свободного потока. Порядок величины числа Рейнольдса составляет при этом $10^5 - 10^6$. В турбулентном пограничном слое касательное напряжение, действующее на границу, гораздо больше, чем в ламинарном, поэтому определение точки указанного перехода представляет не только теоретический, но и большой практический интерес.

После перехода основная часть потока в пограничном слое становится турбулентной. Однако в непосредственной близости от стенки турбулентные флуктуации подавляются наличием твердой границы. Поле потока можно разделить тогда на три области: ламинарный подслой, турбулентный пограничный слой и свободный поток (рис. XIV-9). Если граница шероховатая, то ламинарный подслой может разрушаться элементами шероховатости. Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в XIV-4.3.

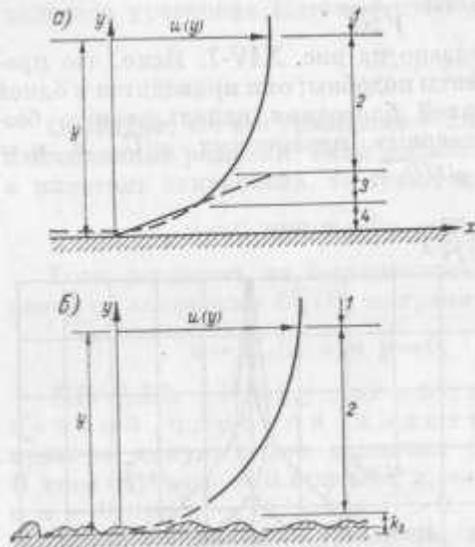


Рис. XIV-9. Распределение скорости в турбулентном потоке вблизи стенки.

a — гладкая стенка; b — шероховатая стенка (ламинарный подслой может существовать при условии $(h_s u_* / \nu) < 5$). 1 — свободный поток; 2 — турбулентный пограничный слой; 3 — переходная зона; 4 — ламинарный подслой.

а) Ламинарный подслой: распределение скорости определяется силой вязкости

$$\tau = \rho \nu \frac{du}{dy}.$$

Так как слой очень тонкий, то в его пределах разумно считать величину τ постоянной и равной касательному напряжению на стенке τ_0 . После интегрирования получаем

$$u = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{y}{\nu}$$

и, вводя обозначение

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

находим

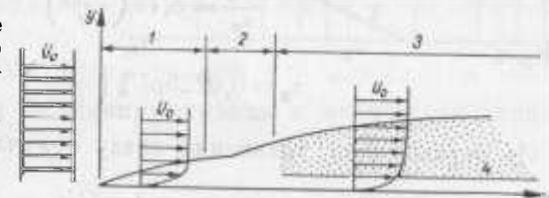
$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}.$$

Величина u_* называется динамической скоростью.

Название «ламинарный подслой» не означает, что поток в нем является полностью ламинарным. Интенсивные вихри, порождаемые

Рис. XIV-10. Схематическое изображение ламинарного и турбулентного пограничных слоев.

1 — ламинарный слой; 2 — переходная зона; 3 — турбулентный слой; 4 — ламинарный подслой.



турбулентным потоком, часто прорываются сквозь этот тонкий слой и образуют «пятна» турбулентности в подслое. Поэтому, чтобы избежать путаницы, иногда употребляют наименование «вязкий подслой».

б) Турбулентный пограничный слой. В этой области турбулентные флуктуации приводят к значительным турбулентным касательным напряжениям, в то время как влияние вязких касательных напряжений очень мало. Поэтому распределение скорости определяется влиянием турбулентных напряжений сдвига, что приводит к логарифмическому распределению, рассмотренному в VIII-3.5.

в) Свободный поток. Влияние пограничных касательных напряжений в этой области мало. Поэтому поле потока можно определить, рассматривая жидкость как идеальную.

Резких границ между названными тремя областями не существует, и поэтому определение каждой из областей носит в известной степени качественный характер. Схематическое изображение этих областей и соответствующие профили скорости приведены на рис. XIV-10.

XIV-3.2. Сопротивление и рост пограничного слоя на плоской пластине. Из-за сложности движений в турбулентном пограничном слое точное решение уравнения движения невозможно. Применяемый в настоящее время математический метод решения состоит в определении характеристик турбулентного пограничного слоя с помощью интегрального уравнения импульсов, описанного в XIV-2.2.

Применение интегрального уравнения импульсов к турбулентному пограничному слою имеет целью оценить пространственные изменения толщины слоя и граничных касательных напряжений. Применение метода требует задания профиля скорости в одном месте, а также подобия этих профилей в других местах вдоль границы. Задать профиль скорости в турбулентном пограничном слое с достаточной точностью довольно трудно из-за сложной картины потока. Поэтому приходится пользоваться некоторыми экспериментальными данными, чтобы надежнее предсказывать пространственные изменения толщины пограничного слоя и сопротивления. На основе экспериментальных результатов профиль скорости можно представить в виде

$$\frac{u}{u_*} = 8,74 \left(\frac{u_* y}{\nu} \right)^{1/4},$$

где $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ — динамическая скорость.

Поскольку при $y = \delta$ скорость равна U_0 , то

$$\frac{U_0}{u_*} = 8,74 \left(\frac{\delta u_*}{\nu} \right)^{1/4}$$

или

$$\tau_0 = 0,0225 \rho U_0^2 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{1/4}$$

Из первых двух уравнений сразу получаем

$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/4}.$$

Используя определение толщины потери импульса, можем получить

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy = \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/4} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/4} \right] d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \frac{7}{72} \delta.$$

Подставляя выражения для θ и τ_0 в интегральное уравнение импульсов

$$\frac{\tau_0}{\rho U_0^2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (U_0 = \text{const}),$$

имеем

$$0,0225 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{1/4} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

Это дифференциальное уравнение для δ . Интегрируя его от начального значения $\delta = \delta_0$ в точке $x = x_0$, где пограничный слой начинает становиться турбулентным, до данной точки x (расстояние x измеряется от переднего края пластины), получим

$$\delta^{5/4} - \delta_0^{5/4} = 0,29 \frac{\nu}{U_0} (x - x_0).$$

Если предположить, что пограничный слой становится турбулентным на самом краю пластины, что соответствует начальному значению $\delta = 0$ при $x = 0$, то из последнего уравнения следует

$$\delta = 0,37 \left(\frac{U_0}{\nu} \right)^{-1/5} x^{4/5}.$$

Это уравнение показывает, что толщина пограничного слоя увеличивается пропорционально величине $x^{4/5}$, в то время как в ламинарном пограничном слое его толщина увеличивалась пропорционально $x^{1/2}$.

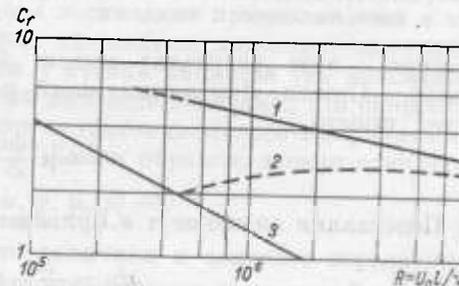


Рис. XIV-11. Сопротивление на гладкой плоской пластине. 1 — турбулентный слой; 2 — переходная зона; 3 — ламинарный слой.

Сила сопротивления на единицу ширины и на участке длиной будет равна

$$R = \int_0^l \tau_0 dx = \rho U_0^2 \theta (l) = \frac{7}{72} \rho U_0^2 \delta = 0,036 \rho U_0^2 \left(\frac{U_0}{\nu} \right)^{-1/5} l^{4/5},$$

и коэффициент сопротивления C_f будет

$$C_f = \frac{R}{\frac{\rho}{2} U_0^2} = 0,072 \left(\frac{U_0 l}{\nu} \right)^{-1/5}.$$

В диапазоне значений числа Рейнольдса $5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$ полученное уравнение дает очень хорошее согласие с экспериментальными результатами.

На рис. XIV-11 показана величина коэффициента сопротивления для турбулентного и ламинарного пограничных слоев.

XIV-4. Поток в трубах

XIV-4.1. Стационарный ламинарный поток в трубах. Ламинарный поток в трубах на практике едва ли существует. Здесь, однако, дается довольно обстоятельное рассмотрение такого движения, так как оно поддается простому и эффективному анализу, а это позволяет лучше понять особенности турбулентного потока, характеристики которого так сложны, что их полное теоретическое рассмотрение пока еще невозможно.

Характеристики потока можно определить непосредственно, применяя уравнение Навье—Стокса. Однако значительно проще найти уравнение движения прямо из соотношения между касательным напряжением и перепадом давления. Как видно из рис. XIV-12, мы без труда можем получить следующее уравнение из рассмотрения баланса сил, действующих на цилиндрический элемент:

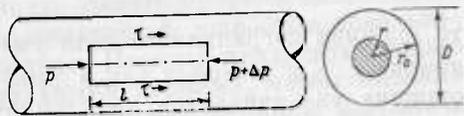


Рис. XIV-12. Равновесие сил, действующих на элемент жидкости.

При этом подразумевается, что величина p^* постоянна в пределах поперечного сечения — этот результат можно было получить из уравнения Навье — Стокса. Для ламинарного потока касательное напряжение будет просто

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}.$$

Подставляя значение τ в приведенное выше уравнение, находим

$$du = \frac{\Delta p}{2l\mu} r dr.$$

Интегрируя, получаем профиль скорости

$$u = \frac{\Delta p}{2l\mu} \frac{r^2}{2} + c.$$

Константу c можно определить из граничного условия: $u = 0$ при $r = r_0$. Тогда профиль скорости будет

$$u = \frac{\Delta p}{4l\mu} (r_0^2 - r^2),$$

т. е. профиль скорости в трубе имеет форму симметричного парабола. Интегрируя, можно найти среднюю скорость

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u \cdot 2\pi r dr = \frac{\Delta p r_0^2}{8l\mu}$$

Перегруппировав члены, получим

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = 64 \frac{\mu l}{\nu \rho D^2} \frac{V^2}{2g},$$

где $D = 2r_0$. Сопоставляя последнее уравнение с уравнением Дарси — Вейсбаха, полученным с помощью анализа размерностей, а именно

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g},$$

где ΔH — потери напора, а f — коэффициент трения, сразу находим, что для случая ламинарного потока в трубе кругового сечения коэффициент трения f равен

$$f = \frac{64\mu}{\nu D \rho} = \frac{64}{\text{Re}}.$$

XIV-4.2. Распределение скорости и закон сопротивления в турбулентном потоке в гладких трубах. XIV-4.2.1. Распределение скорости.

Когда поток в трубе становится турбулентным, аналитическое определение профиля скорости невозможно. Как и в случае турбулентного пограничного слоя, профиль скорости приходится определять на основе логических предположений и экспериментальной проверки. Одним из наиболее известных допущений относительно профиля скорости у стенки является так называемый пристеночный закон, основанный на предположении, что скорость u на расстоянии y от стенки зависит от тангенциального напряжения τ_0 , от вязкости μ и от плотности ρ . Таким образом, можно записать

$$F(\tau_0, u, y, \mu, \rho) = 0$$

[при этом имеется в виду, что величина u означает осредненную во времени скорость и, собственно говоря, здесь следовало бы писать \bar{u} (см. VII-1.5). В дальнейшем, однако, мы будем ради простоты писать u вместо \bar{u}]. С помощью анализа размерностей получаем следующее безразмерное соотношение:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = f\left(\frac{y \sqrt{\tau_0/\rho}}{\nu}\right),$$

аналогичное полученному в случае потока над плоской пластиной (см. XIV-3.2).

Функциональное соотношение в ламинарном подслое, полученное в XIV-3.1, имеет вид

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu},$$

где $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, в то время как за пределами ламинарного подслоя и переходного слоя преобладают турбулентные напряжения, и профиль скорости следует логарифмическому закону, найденному в VIII-3.5:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y + C_1.$$

Распределение скорости в безразмерной форме описывается выражением

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u_*}{\nu} + C_2,$$

где

$$C_2 = -\frac{1}{k} \ln \frac{u_*}{\nu} + C_1.$$

Величину C_2 и диапазон применимости этих двух уравнений, описывающих распределение скорости в ламинарном подслое и турбулентном потоке, приходится определять экспериментально.

Было выполнено большое количество экспериментальных работ по измерению распределения скорости в круглых трубах. Типичные профили скорости показаны на рис. XIV-13 а. Те же результаты выражены на рис. XIV-14 через безразмерные переменные u/u_* и u_*y/ν . Рисунок показывает, что при малых значениях u_*y/ν , т. е. при $(u_*y/\nu) < 5$, распределение скорости следует линейному соотношению

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_*y}{\nu}$$

При $(u_*y/\nu) > 30$ экспериментальная кривая следует логарифмическому закону, который приближенно можно описать уравнением

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_*y}{\nu} + 5,5.$$

Однако в диапазоне значений величины u_*y/ν между 5 и 30,

Рис. XIV-13. Типичное распределение скоростей в трубах.

а — гладкие стенки: 1 — ламинарный поток, 2 — малые значения числа Рейнольдса, 3 — большие значения числа Рейнольдса; б — шероховатые стенки: 1 — ламинарный поток, 2 — значительная шероховатость; 3 — незначительная шероховатость.

где влияние вязкости и турбулентности приблизительно одинаково, профиль скорости не соответствует ни одному из указанных двух

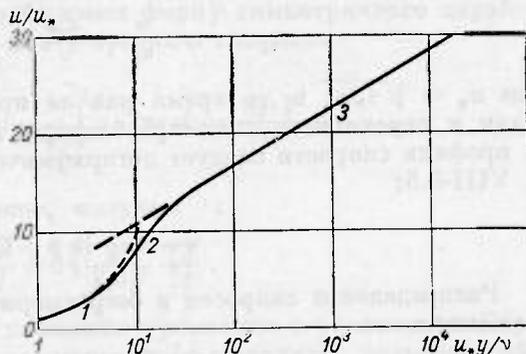


Рис. XIV-14. Универсальный закон распределения скорости для гладких труб. 1 — ламинарный поток; 2 — переходная зона; 3 — турбулентный поток.

законов. С помощью математических методов не удается получить правильного описания действительности. Эту зону обычно называют буферной, или переходной зоной.

XIV-4.2.2. Закон сопротивления для гладких труб. Обычно толщина ламинарного подслоя и переходного слоя очень мала по сравнению с размерами трубы. Следовательно, при расчете средней скорости вполне можно использовать логарифмический закон распределения скорости без существенных погрешностей. Тогда среднюю скорость можно получить подстановкой выражения

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_*y}{\nu} + 5,5$$

в уравнение

$$U = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{r_0} 2\pi r u dr = \frac{2u_*}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{r_0} r \left(5,75 \lg \frac{u_*(r_0-r)}{\nu} + 5,5 \right) dr.$$

После интегрирования получаем

$$\frac{U}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_*r_0}{\nu} + 1,75.$$

С другой стороны, как мы видели, уравнение Дарси — Вейсбаха дает величину потерь напора ΔH как функцию коэффициента трения f и средней скорости U в виде

$$\Delta H = f \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g},$$

где l и D — длина и диаметр трубы. Таким образом, величина $\rho g \Delta H \times \pi D^2/4$ есть разность сил давления, действующих на поперечные сечения, разделенные расстоянием l . Эта разностная сила уравновешивается силой касательного трения $\tau_0 \pi D l$. Приравниваем эти две силы и получаем

$$\Delta H = \frac{4}{g} \frac{\tau_0}{\rho} \frac{l}{D}.$$

Подставляя сюда величину $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ и исключая из приведенного выше уравнения совместно с уравнением Дарси — Вейсбаха величину ΔH , получим

$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} = 5,75 \lg \frac{u_*r_0}{\nu} + 1,75.$$

Так как

$$\frac{u_*r_0}{\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{UD}{\nu},$$

то полученное выше уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,04 \lg R \sqrt{f} - 0,91,$$

где $R = UD/\nu$. Слегка изменяя константы в этом уравнении (2,04 на 2,00 и 0,91 на 0,80), чтобы согласовать формулу с эксперименталь-

ными данными, получим универсальный закон трения Прандтля для гладких труб:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \lg R \sqrt{f} - 0,8.$$

XIV-4.3. Влияние шероховатости. XIV-4.3.1. Распределение скорости вблизи гидродинамически шероховатой стенки. Влияние элементов шероховатости на поток зависит от толщины ламинарного подслоя. Если ламинарный подслой настолько толст, что покрывает все элементы шероховатости, то влияние последних не сказывается.

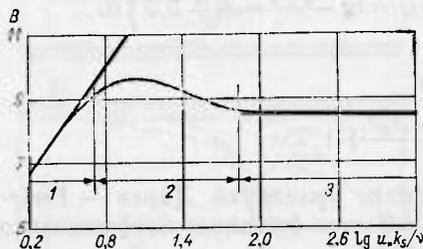


Рис. XIV-15. Функция шероховатости B в зависимости от числа Рейнольдса шероховатости $k_s u_* / \nu$.

1 — гладкая граница; 2 — переходная зона; 3 — полностью шероховатая граница.

XIV-13 б показаны некоторые типичные профили в шероховатых трубах. Тем же путем, что и в случае гладких труб, можно получить безразмерное функциональное соотношение для однородных и близко расположенных друг к другу песочных элементов шероховатости в полностью шероховатом режиме:

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{y}{k_s}\right),$$

где k_s — размер зерен песка. (Если зерна песка не расположены вплотную друг к другу или не являются однородными, то необходимо еще учитывать их концентрацию и распределение, а также форму отдельных элементов.) В том случае, когда стенка не является полностью шероховатой, требуется ввести дополнительный безразмерный параметр $k_s u_* / \nu$. Тогда общее безразмерное соотношение будет иметь вид

$$\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{y}{k_s}, \frac{k_s u_*}{\nu}\right).$$

Явный вид этого соотношения требуется найти экспериментально. Приближенно его можно выразить уравнением

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k_s} + B,$$

где B зависит от числа Рейнольдса шероховатости $k_s u_* / \nu$. Величина B , полученная из экспериментов, показана на рис. XIV-15. Из рисунка видно, что существует три режима для величины B :

а) гидравлически гладкий режим, рассмотренный выше в XIV-4.2, где

$$0 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 5.$$

При этом режиме размеры элементов шероховатости настолько малы, что ламинарный подслой покрывает их полностью;

б) переходный режим:

$$5 \leq \frac{k_s u_*}{\nu} \leq 70.$$

При этом некоторые элементы шероховатости выступают за пределы ламинарного подслоя и создают дополнительное сопротивление за счет сопротивления формы этих выступающих элементов;

в) полностью шероховатый режим, при котором

$$\frac{k_s u_*}{\nu} > 70.$$

В этом случае все элементы шероховатости выступают за пределы ламинарного подслоя, и можно сказать, что ламинарный подслой полностью разрушен этими элементами. Действие турбулентности охватывает все пространство до шероховатой стенки. Дальнейшее увеличение градиента скорости и числа Рейнольдса не вносит изменений в картину потока. Поэтому величина B остается независимой от числа Рейнольдса шероховатости.

XIV-4.3.2. Формула сопротивления для шероховатой стенки. Коэффициент сопротивления при полностью шероховатом режиме можно оценить тем же способом, что и в случае гладкой трубы. Окончательный вид закона сопротивления будет

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \lg \frac{r_0}{k_s} + 1,74.$$

Экспериментальные исследования были впервые выполнены Никурадзе. Он использовал трубы с расположенными вплотную друг к другу элементами шероховатости в виде зерен песка и получил закон сопротивления, показанный на рис. XIV-16. В случае, когда распределение скоростей и закон сопротивления относятся к шероховатости того типа, которую использовал Никурадзе, величина k_s

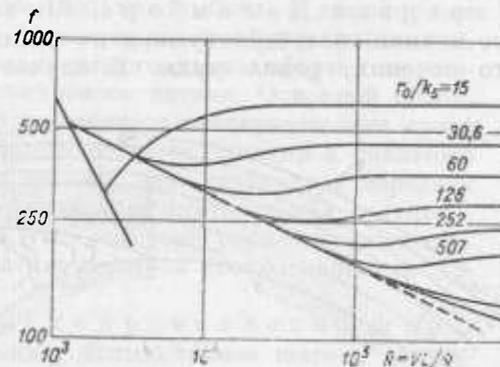


Рис. XIV-16. Характеристика сопротивления для труб с песочной шероховатостью по Никурадзе.

означает фактические размеры песчаных зерен. Однако, если используются различные типы песка или частицы песка отделены друг от друга, то сопротивление, оказываемое потоку, будет другим. Таким образом, знание размеров зерен песка само по себе недостаточно для описания распределения скорости и сопротивления.

XIV-5. Сопротивление погруженного тела

XIV-5.1. Сопротивление тела, погруженного в стационарный поток. XIV-5.1.1. Случай идеальной жидкости. Парадокс Даламбера. Мы видели выше (см. XI-4.3.1.2), что полная сила, действующая на цилиндр со стороны обтекающего его течения, равна нулю. В случае идеальной жидкости этот

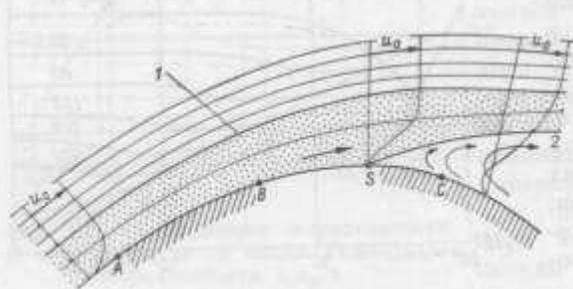


Рис. XIV-17. Отрыв пограничного слоя.
1 — верхняя граница пограничного слоя; 2 — линия отрыва потока; S — точка отрыва.

результат является общим, т. е. полная сила, действующая на тело со стороны потока идеальной жидкости без циркуляции скорости, всегда равна нулю. В этом состоит парадокс Даламбера.

Если существует циркуляция скорости (см. XI-4.2 и особенно XI-4.2.6), то на тело действует сила, перпендикулярная к скорости потока. Можно показать, что эта сила пропорциональна скорости потока V и величине циркуляции. Именно эта сила вызывает подъем самолета.

Теперь мы будем рассматривать реальную жидкость, при которой вдоль поверхности тела развивается пограничный слой, создающий сопротивление. Это сопротивление обусловлено касательными напряжениями, действующими на тело, и влиянием образующихся вихрей. Все это приводит нас к рассмотрению вопроса об отрыве пограничного слоя.

XIV-5.1.2. Отрыв пограничного слоя. Поле потока вблизи плоской пластины при параллельных линиях тока и нулевых углах атаки является весьма простым, так как давление во всей области остается постоянным. В случае потока вокруг тупого тела, такого как цилиндр, давление, оказываемое на тело со стороны внешнего потока, не остается постоянным вдоль поверхности тела. Как показано на рис. XIV-17, на участке от A до B частицы жидкости ускоряются, а на участке от B до C — замедляются. Поэтому давление уменьшается на участке от A до B и затем увеличивается на участке от B до C — это следует из уравнения Бернулли.

Поскольку жидкость обладает вязкостью, определенное количество кинетической энергии теряется за счет трения внутри тонкого пограничного слоя по мере того, как частицы жидкости движутся вдоль границы. Остающейся энергии может не хватить на преодоление встречного градиента давления, образующегося из-за увеличения давления от B к C . В результате частицы жидкости под действием внешнего давления могут начать двигаться в обратном направлении и привести тем самым к отрыву потока от тела в точке S . Поле потока за точкой отрыва весьма нерегулярно и характеризуется наличием крупных турбулентных вихрей. Эту зону обычно называют турбулентным следом, хотя след может быть и ламинарным при малых числах Рейнольдса (меньших 40 в случае цилиндра).

Из-за наличия следа поле потока кардинальным образом изменяется по сравнению с полем безвихревого потока. Основной поток, отрывающийся от границы, не соединяется непосредственно сразу за телом. Давление в пределах следа остается близким к давлению в точке отрыва, которое всегда меньше, чем давление в передней застойной точке. Следовательно, возникает значительная результирующая сила, действующая на тело за счет разности давлений. Эта сила называется сопротивлением формы (сопротивлением давления).

XIV-5.1.3. Коэффициент сопротивления шара. В принципе полное сопротивление, испытываемое шаром, движущимся с постоянной скоростью в бесконечном поле жидкости, представляет собой сумму сопротивления трения и сопротивления формы (сопротивления давления). Если скорость достаточно мала ($R < 1$), то инерционными членами в уравнениях Навье — Стокса можно пренебречь. Сопротивление можно получить аналитически и оно выражается с помощью закона Стокса:

$$F = 3\pi\mu V D,$$

где V — скорость тела относительно воды, а D — диаметр шара. Коэффициент сопротивления C_D , определяемый из уравнения

$$F = C_D A \rho V^2 / 2,$$

равен тогда $24/R$, где A — площадь поперечного сечения шара, а $R = VD/\nu$ — число Рейнольдса.

Если число Рейнольдса R увеличивается, то поток отрывается от поверхности шара, начиная с тыловой застойной точки, где встречный градиент давления имеет наибольшую величину. Когда поток отрывается от границы, сопротивление формы, являющееся функцией от площади зоны отрыва и от квадрата скорости, становится значительным. Коэффициент сопротивления C_D будет отклоняться от линии, определяемой уравнением $C_D = 24/R$, и кривая, описывающая зависимость C_D от R , начнет становиться все более пологой. Зависимость C_D от R показана на рис. XIV-18.

Когда число Рейнольдса достигает величины $2 \cdot 10^3$, коэффициент сопротивления становится почти постоянным. Однако при значе-

ниях R от $2 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления резко падает. Причина этого заключается в переходе пограничного слоя

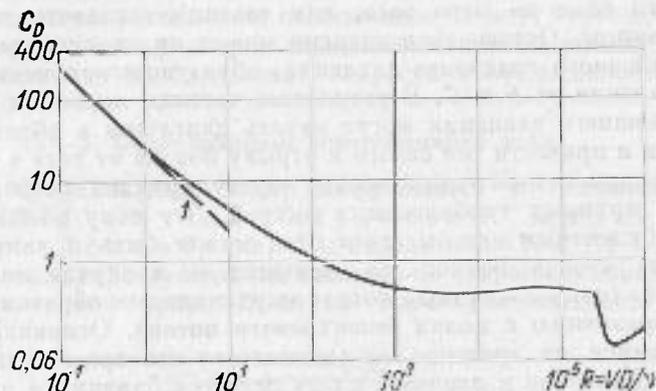


Рис. XIV-18. Коэффициент сопротивления для шара.
1 — результат теории Стокса.

от ламинарного состояния к турбулентному, при котором пограничный слой охватывается интенсивным перемешиванием. В результате находящиеся вблизи границы частицы жидкости приобретают дополнительную кинетическую энергию, которая помогает им противостоять встречному градиенту давления и несколько сдвигает точку отрыва по ходу потока, как показано на рис. XIV-19.

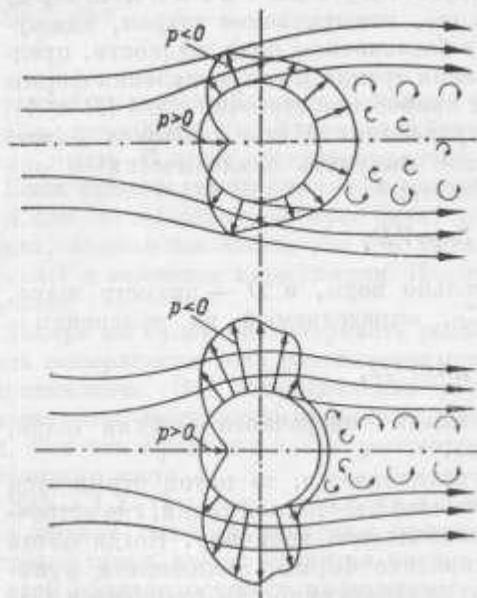


Рис. XIV-19. Изменение положения точки отрыва и распределения давления в результате перехода турбулентного слоя от ламинарного состояния к турбулентному.

Это приводит к резкому падению величины коэффициента сопротивления вблизи значения $R = 3 \cdot 10^5$ (см. рис. XIV-18). Поскольку происходящий переход зависит от шероховатости поверхности шара, а также — слегка — от уровня турбулентности в свободном потоке, то коэффициент сопротивления вблизи этой критической зоны не является однозначной функцией от числа Рейнольдса.

XIV-5.1.4. Сопротивление цилиндра и вихревая дорожка Кармана. Как показано на рис. XIV-20, соотношение между коэффициентом сопротивления и числом Рей-

нольдса для кругового цилиндра с осью, нормальной к направлению движения, в общем подобно тому, которое имеет место для шара. Однако в потоке вокруг цилиндра наблюдаются и некоторые специфические явления, обычно не встречающиеся в потоке вокруг шара. В диапазоне значений числа Рейнольдса от 40 до 5000 можно наблюдать правильную последовательность вихрей, вращающихся

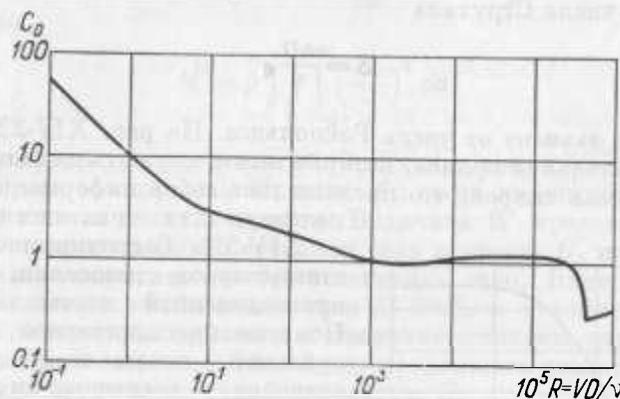


Рис. XIV-20. Коэффициент сопротивления для кругового цилиндра.

попеременно вправо и влево и перемещающихся вниз по течению, как показано на рис. XIV-21. Это явление известно под названием вихревой дорожки Кармана. Вихревая дорожка перемещается со скоростью V_e , которая несколько меньше скорости свободного потока U_0 . Карман нашел, что вихревая дорожка в общем неустойчива,

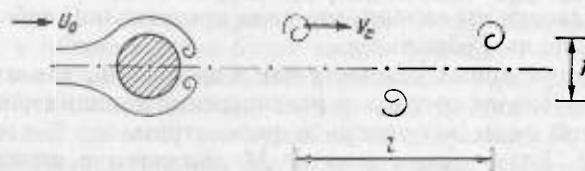


Рис. XIV-21. Вихревая дорожка Кармана.

за исключением случая с таким расположением вихрей, при котором $h/l = 0,281$ (см. рис. XIV-21), и что сопротивление, испытываемое цилиндром, зависит от ширины вихревой дорожки h и отношения скоростей V_e/U_0 :

$$F = \rho U_0^2 h \left[2,83 \frac{V_e}{U_0} - 1,12 \left(\frac{V_e}{U_0} \right)^2 \right].$$

Поскольку вихрь, развивающийся за цилиндром, несимметричен, то вокруг цилиндра возникает переменная во времени циркуляция скорости. Цилиндр будет испытывать постоянно сменяющее свое направление усилие, стремящееся сдвинуть его вбок. Таким

образом, цилиндр начнет колебаться из стороны в сторону, особенно если его собственная частота колебаний оказывается в резонансе с частотой срыва вихрей.

Частота срыва вихрей k в вихревой дорожке Кармана позади кругового цилиндра может быть измерена экспериментально. Такие измерения показывают, что безразмерная частота, известная под названием числа Струхала

$$S = \frac{kD}{v}$$

однозначно зависит от числа Рейнольдса. На рис. XIV-22 показана экспериментальная кривая, которая может служить для определения частоты срыва вихрей, что представляет собой информацию, весьма полезную для практических целей.

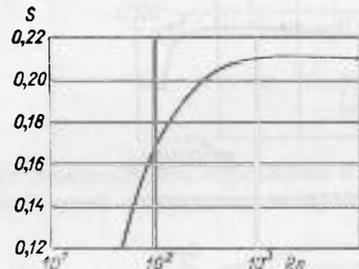


Рис. XIV-22. Соотношение между числами Струхала (S) и Рейнольдса (Re).

XIV-5.2. Сопротивление при нестационарном движении. Понятие присоединенной массы. XIV-5.2.1. Понятие присоединенной, или виртуальной, массы имеет особенно значимое значение в исследовании сил, действующих на тело, ускоряющее или замедляющее свое движение в спокойной воде, или на неподвижное тело в нестационарном течении.

Напомним, что при стационарных условиях полная сила, действующая на неподвижное тело в потоке без циркуляции, равна нулю, если жидкость идеальная. Это парадокс Даламбера. В случае реальной жидкости мы видели, что сила представляет собой сложную функцию от числа Рейнольдса.

При нестационарных условиях как в идеальной, так и в реальной жидкости приходится вводить в рассмотрение дополнительную силу. Величину этой силы мы теперь и рассмотрим.

XIV-5.2.2. Если тело с массой M движется в спокойной воде со скоростью U , то оно обладает кинетической энергией $MU^2/2$. Это тело неизбежно вызывает движение жидкости вокруг себя; по мере удаления от тела движение стремится к нулю. Точный закон затухания движения с удалением от тела зависит от формы тела. Однако на достаточном удалении можно считать, что скорость частицы жидкости $V(x, y, z, t)$ убывает как $1/R^3$ в случае трехмерного потока и как $1/R^2$ в случае двухмерного потока, где R — удаление рассматриваемой частицы жидкости от центра тела.

Полная кинетическая энергия жидкости, окружающей тело таким образом, будет

$$\int \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \frac{1}{2} \rho V^2(x, y, z, t) d\sigma,$$

где lim означает граничную поверхность тела, а $d\sigma$ — элементарный объем (или площадь в случае двухмерного движения).

Полная кинетическая энергия всей системы будет

$$W = \frac{1}{2} U^2 \left[M + \rho \int \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \left(\frac{V}{U} \right)^2 d\sigma \right].$$

Величина

$$M' = \rho \int \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \left(\frac{V}{U} \right)^2 d\sigma$$

называется присоединенной массой. Это такая масса жидкости, которая, двигаясь со скоростью U , имела бы ту же кинетическую энергию, что и полная масса жидкости. Величина W представляет собой работу, затрата которой сообщает телу скорость U , или работу, которую надо затратить, чтобы остановить тело. Видно, что эта величина включает в себя также член $M'U^2/2$, т. е. работу, необходимую для того, чтобы привести в движение жидкость вокруг тела. Если эта работа совершена, тело будет продолжать двигаться в идеальной жидкости с постоянной скоростью U .

XIV-5.2.3. Отметим, что, поскольку скорость V уменьшается как R^{-3} (или R^{-2} в случае двухмерного движения), то величина $(V/U)^2$ изменяется с расстоянием как R^{-6} (или R^{-4}), в то время как интеграл по σ изменяется как R^3 (или R^2). Следовательно, интеграл, определяющий величину M' , имеет конечное значение.

Мы видим также, что в общем случае величина M' является функцией от абсолютной величины U и, следовательно, от числа Рейнольдса UD/v и от других эмпирических параметров, характеризующих поток (таких, например, как UT/D при периодическом движении, где D — характерный размер тела). Следовательно, величина M' в общем случае будет также функцией от времени. Однако в случае идеальной жидкости величина $V(x, y, z, t)/U$ независима от U , а зависит только от картины потока. Если отнести V к координатной системе, движущейся со скоростью U , то это отношение будет также независимым от времени. Поэтому интеграл от этого отношения не зависит ни от величины U , ни от времени. Другими словами, величина M' является постоянной, определяемой только характеристиками тела и плотностью жидкости.

XIV-5.2.4. Рассмотрим теперь полную силу, определяющую движение тела. Она равна сумме инерции самого тела и инерции окружающей его жидкости, т. е.

$$F = M \frac{dU}{dt} + \rho \int \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \frac{dV}{dt} d\sigma,$$

что можно переписать в виде

$$F = (M + M') \frac{dU}{dt},$$

где

$$M' = \frac{\rho \frac{d}{dt} \iiint_{\text{lim}} V d\sigma}{\frac{dU}{dt}}$$

Заранее не очевидно, что данное определение M' идентично тому, которое было приведено выше. Действительно, интеграл $\iiint_{\text{lim}} V d\sigma$ может расходиться при увеличении расстояния от тела до бесконечности. Поэтому в случае движущегося тела силу $F' = M' dU/dt$ следует находить как силу, с которой жидкость действует на тело или наоборот, т. е.

$$F' = \int_s p \cos \theta ds,$$

где p — давление вокруг тела, θ — угол между перпендикуляром к ds и направлением основного движения, а s — площадь поверхности тела. При заданной V (или φ) величину p можно найти с помощью уравнения Бернулли. Поскольку в общем интеграл от $\rho V^2/2$ равен нулю (парадокс Даламбера), то имеет значение только интеграл от $\rho \partial\varphi/\partial t$, так что окончательно имеем

$$M' = \frac{- \int \int \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos \theta ds}{\frac{dU}{dt}}$$

Разумеется, дифференцируя равенство между работой и энергией, мы можем получить равенство между силой и импульсом, т. е. из

$$\frac{d}{dt}(W) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (M + M') U^2 \right]$$

получаем

$$F \frac{dL}{dt} = U (M + M') \frac{dU}{dt}$$

Поскольку $dL/dt = U$, то имеем равенство между силой и импульсом. Отметим, что здесь предполагается, что $M' = \text{const}$ и $dF'/dt = 0$. Фактически, более строгий вывод позволил бы обойтись без этого ограничения.

Для всех практических целей присоединенная масса определяется путем вычисления интеграла

$$M' = \rho \iiint \left(\frac{V}{U} \right)^2 d\sigma$$

или в случае безвихревого потока

$$M' = - \frac{\int \int \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos \theta ds}{\frac{dU}{dt}}$$

Затем полученная величина M' используется для определения силы $M' dU/dt$. Изложенный простой вывод имеет свои недостатки, которые мы не будем обсуждать здесь.

XIV-5.2.5. В качестве примера рассмотрим случай движущегося кругового цилиндра. Потенциал скорости для цилиндра, движущегося в неподвижной жидкости, дается в виде наложения однородной скорости U на стационарную картину потока вокруг цилиндра (см. XI-4.3.1.2):

$$\varphi = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + Ur \cos \theta.$$

Мы видим, что эта операция уничтожает компоненту однородного потока и потенциальная функция представляется в виде потенциальной функции дублета:

$$\varphi = -U \frac{R^2}{r} \cos \theta.$$

Скорость жидкости в любой точке имеет величину, определяемую выражением

$$V^2 = \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 \right],$$

откуда

$$V(r, \theta, t) = \frac{R^2}{r^2} U(t),$$

где $U(t)$ — скорость тела. Полная кинетическая энергия жидкости на единицу длины цилиндра будет тогда

$$T = \int_0^{2\pi} \int_{r=R}^{\infty} \rho \cdot \frac{1}{2} \frac{R^4 U^2}{r^4} r dr d\theta = \rho \pi R^4 U^2 \int_{r=R}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 U^2.$$

Мы видим, что присоединенная масса равна $M' = \rho \pi R^2$, т. е. равна массе цилиндра с радиусом R , имеющего ту же плотность, что и жидкость. Тогда полная сила, определяющая движение тела, будет

$$F = (M + M') \frac{dU}{dt},$$

т. е.

$$F = (\rho_b + \rho) \pi R^2 \frac{dU}{dt},$$

где ρ_b — плотность тела.

Можно показать, что величина $F' = M' dU/dt$ представляет собой полную силу, с которой жидкость действует на тело, т. е. сумму всех сил давления:

$$F' = \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta.$$

Распределение давления вокруг движущегося цилиндра в случае нестационарного движения дается выражением

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + f(t),$$

т. е.

$$\frac{p}{\rho} = R \frac{dU}{dt} \cos \theta + \frac{1}{2} U^2 [1 - 4 \sin^2 \theta].$$

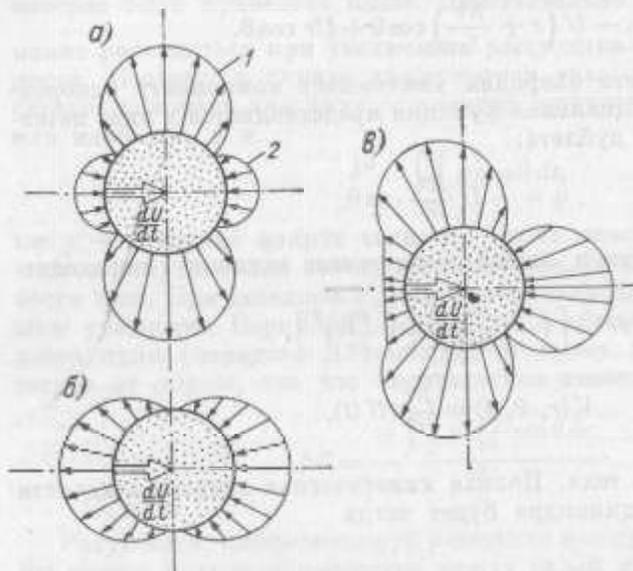


Рис. XIV-23. Пример распределения силы давления на тело, движущееся в спокойной воде.

а — давление за счет скорости; 1 — отрицательное давление, 2 — положительное давление; б — давление за счет ускорения; в — полное давление.

Поскольку интеграл от квадратичного члена равен нулю, то полная сила, действующая на цилиндр, равна

$$F'' = \int_0^{2\pi} \rho R^2 \frac{dU}{dt} \cos^2 \theta d\theta,$$

т. е.

$$M'' = \rho \pi R^2.$$

XIV-5.2.6. Рассмотрим теперь случай неподвижного тела в нестационарном течении. Полная сила, с которой жидкость действует на тело, будет также равна

$$F = \iint p \cos \theta ds,$$

а в случае безвихревого движения без циркуляции скорости это выражение будет идентично выражению

$$- \iint \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta ds.$$

Этот интеграл равен удвоенной величине аналогичного интеграла в случае тела, движущегося в неподвижной воде, и, следовательно,

$$F = 2M'' \frac{dU}{dt}$$

Интересно отметить, что в первом случае движущегося тела в спокойной воде такая же сила имела место при условии, что $M = M''$, т. е. при условии, что тело имеет ту же плотность, что и жидкость.

XIV-5.2.7. Рассмотрим теперь в качестве примера случай неподвижного кругового цилиндра в нестационарном потоке жидкости. Потенциальная функция будет иметь вид

$$\varphi = -U(t) \left[r + \frac{R^2}{r} \right] \cos \theta$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R} = -\rho \cdot 2R \frac{dU}{dt} \cos \theta.$$

Мы видим, что компонента давления, обусловленная локальной инерцией, будет в этом случае равна удвоенной величине соответствующей компоненты в случае движущегося цилиндра. Подставляя эту величину в приведенный выше интеграл, получим

$$F = 2\rho \pi R^2 \frac{dU}{dt} = 2M'' \frac{dU}{dt}.$$

XIV-5.2.8. В случае реальной жидкости сила инерции по-прежнему существует, но за счет вязкости, отрыва пограничного слоя и образования вихрей возникает дополнительная квадратичная сила. Часто предлагается следующая эмпирическая формула:

$$F = \rho C_D A U^2 + \rho C_M \text{Vol.} \frac{dU}{dt},$$

где A — поперечное сечение тела, перпендикулярное к потоку; Vol. — объем тела; C_D — коэффициент сопротивления, а C_M — инерционный коэффициент.

В случае цилиндра $A = 2R$. Мы видим, сравнивая это выражение с предыдущим, что в случае цилиндра $C_M = 2$. В действительности обе величины C_D и C_M не являются постоянными, а представляют собой сложные неизвестные функции от приведенной частоты $D/(\nu T)$, числа Рейнольдса UD/ν , а также от времени.

УПРАЖНЕНИЯ

XIV-1. Найдите поперечную компоненту скорости v для ламинарного пограничного слоя вдоль пластины.

О т в е т: поскольку $\psi = \sqrt{\nu x U_0} f(\eta)$, $\eta = y \sqrt{U_0/\nu x}$, то

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \left(\eta \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} - f \right).$$

XIV-2. Определите коэффициенты A_n в законе Блазиуса вплоть до A_{11} как функцию от A_2 . Покажите, что только коэффициенты A_{3n+2} отличны от

нуля и найдите общее выражение для коэффициента A_{3n+2} через коэффициент A_2 . Дайте выражение для $f(\eta)$ в виде степенного ряда как функцию от A_2 и определите величину A_2 (известно, что $A_2 = 0,332$). Определите значения $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ при $y = 0$.

О т в е т:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = -\frac{1}{2} A_2^2,$$

$$A_6 = 0, \quad A_7 = 0, \quad A_8 = -\frac{11}{4} A_2^3, \quad A_9 = 0, \quad A_{10} = 0,$$

$$A_{11} = -\frac{1}{3} \frac{375}{11!} A_2^4, \quad A_{3n+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{A_2^{n+1} C_n}{(3n+2)!}.$$

XIV-3. Толщина ламинарного пограничного слоя на полуплоской пластине может быть найдена с помощью интегральной формулы импульсов Кармана, если профиль скорости задан. При условии, что профиль скорости задан полиномом

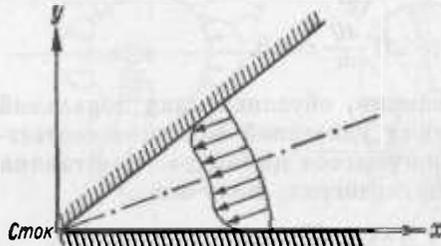


Рис. к упражнению XIV-4.

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4;$$

- 1) задайте собственно граничные условия и используйте их для определения пяти констант;
- 2) рассчитайте касательные напряжения вдоль пластины;
- 3) найдите толщину пограничного слоя с помощью интегральной формулы импульсов Кармана.

О т в е т:

$$y = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$y = \delta, \quad u = U_0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = 2 \frac{U_0}{\delta},$$

$$a_3 = -\frac{2U_0}{\delta^3}, \quad a_4 = \frac{U_0}{\delta^4};$$

$$\tau_0 = \rho \nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2\rho \nu U_0}{\delta}.$$

XIV-4. Рассмотрите стационарный пограничный слой в сужающемся канале с плоскими стенками. Уравнения пограничного слоя вдоль стенки, параллельной оси OX , будут:

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Скорость свободного потока задана в виде

$$u(x) = -\frac{u_0}{x}.$$

Вводя преобразование подобия

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{u_0}{\nu}}$$

и функцию тока

$$\psi(x, y) = -\sqrt{\nu u_0} f(\eta);$$

- 1) найдите обыкновенное дифференциальное уравнение для функции тока и граничные условия;
- 2) получите распределение скорости.

О т в е т:

$$f''' - f'f'' + 1 = 0.$$

Умножая это уравнение на f'' и интегрируя, получаем

$$\frac{df'}{d\eta} = (f' - 1) \sqrt{\frac{2}{3}} (f' + 2),$$

т. е.

$$\eta = \sqrt{2} \left[\text{th}^{-1} \frac{\sqrt{2+f'}}{\sqrt{3}} - \text{th}^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \right],$$

и окончательно

$$f' = \frac{u}{U} = 3 \text{th}^2 \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1,146 \right) - 2.$$

XIV-5. Получите интегральное уравнение импульсов для нестационарного пограничного слоя.

О т в е т: из уравнений неразрывности и импульсов имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

С удалением от границы $u \rightarrow U$ и $\partial^2 U / \partial y^2 \rightarrow 0$, так что

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy.$$

Подставляя величину $v = -\int_0^y (\partial u / \partial x) dy$ и перегруппировывая члены, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (U - u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta [u(U - u) dy] + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho},$$

и окончательно

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} (U\delta^*) + \frac{\partial}{\partial x} (U^2\theta) + \delta^* U \frac{\partial U}{\partial x}.$$

XIV-6. Определите силу трения при колебании пластины, покрытой слоем жидкости, имеющим толщину h . Частота колебаний равна k , и жидкость обладает кинематической вязкостью ν .

О т в е т:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = U_0 \frac{\cos k(h-y)}{\cos kh} \cos kt,$$

$$F = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=0} = \mu k U_0 \text{th} kh \cos kt.$$

XIV-7. Вдоль вертикальной полубесконечной пластины, начинающейся при $X = 0$, движется поток жидкости, как показано на прилагаемом рисунке.

Величина расхода Q фиксирована и неизменна вдоль пластины. Жидкость обладает вязкостью μ и плотностью ρ и ускоряется под действием силы тяжести ρg . Свободная поверхность считается поверхностью постоянного давления. В зоне, прилегающей к пластине, формируется пограничный слой, толщина которого увеличивается до тех пор, пока он не достигает свободной поверхности, как показано на рисунке. Поток будет продолжать ускоряться, и слой жидкости

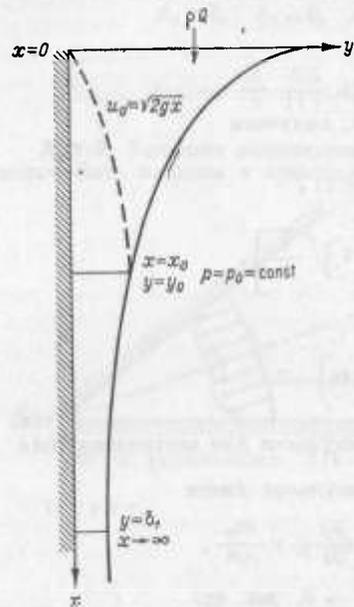


Рис. к упражнению XIV-7.

будет становиться все тоньше, пока он не достигнет асимптотически предельной величины.

1) Найдите интегральное уравнение импульсов на участке, где пограничный слой не доходит до свободной поверхности.

2) При условии, что профиль скорости имеет вид параболы

$$\frac{u}{u_0} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2,$$

определите константы a_0, a_1, a_2 с помощью надлежащих граничных условий. Подставьте найденное выражение для профиля скорости в интегральное уравнение импульсов и получите дифференциальное уравнение для $\delta(x)$.

3) Испытайте решение в виде $\delta = \beta x^n$. Найдите величины β и n из интегрального уравнения.

4) Определите расстояние x_0 , на котором пограничный слой достигает свободной поверхности.

5) Определите толщину пограничного слоя δ_0 в месте, где пограничный слой достигает свободной поверхности.

6) Выведите интегральное уравнение импульсов для области $x > x_0$.

7) С помощью профиля скорости, полученного в пункте 2, выведите дифференциальное уравнение для $\delta(x)$ в области $x > x_0$.

8) Получите соотношение между расстоянием x и толщиной пограничного слоя.

9) Получите выражение для толщины пограничного слоя δ_3 при бесконечном значении x .

О т в е т:

$$1) \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - U_0 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy = -\nu \frac{\partial u(0)}{\partial y} + g\delta;$$

$$2) a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad \frac{8}{15} \frac{d}{dx} (2gx\delta) -$$

$$-\frac{2}{3} \cdot 2g \sqrt{x} \frac{d}{dx} (\sqrt{x} \delta) = -\frac{2\nu}{\delta} \sqrt{2gx} + g\delta$$

$$(U_0 = \sqrt{2gx});$$

$$3) \beta = 3 \sqrt{2} \left(\frac{\nu}{g}\right)^{1/3};$$

$$4) x_0 = \left(\frac{3Q}{2\sqrt{2g}\beta}\right)^{4/3};$$

$$5) y_0 = \beta \left(\frac{3Q}{2\sqrt{2g}\beta}\right)^{1/3};$$

$$6) \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -\nu \frac{\partial u(0)}{\partial y} + g\delta;$$

$$7) \frac{d\delta}{dx} = \frac{5g}{6Q^2} \left(\frac{3\nu Q}{g} - \delta^3\right);$$

$$8) \frac{5g}{6Q^2} (x - x_0) = \frac{1}{6\delta^*} \ln \left[\left(\frac{\delta^* - \delta_0}{\delta^* - \delta}\right)^2 \left(\frac{\delta^{*2} + \delta^*\delta + \delta^2}{\delta^{*2} + \delta^*\delta_0 + \delta_0^2}\right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}\delta^*} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\delta + \delta^*}{\delta^* \sqrt{3}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\delta_0 + \delta^*}{\delta^* \sqrt{3}} \right], \quad \text{где } \delta^* = \left(\frac{3\nu Q}{g}\right)^{1/3};$$

$$9) \delta_3 = \left(\frac{3\nu Q}{g}\right)^{1/3}.$$

XIV-8. Получите уравнение сопротивления для турбулентного потока в шероховатых трубах

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \lg \frac{r_0}{k_s} + 1,74.$$

XIV-9. Потенциал скорости для двумерного потока вокруг цилиндра радиуса R дается выражением

$$\varphi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta,$$

где U — скорость на бесконечности.

Найдите распределение давления вокруг цилиндра в случае, когда:

1) $U = \text{const} = U_0$;

2) $U = U_0 \sin kt$.

Определите полную силу, действующую на цилиндр, интегрируя выражение для давления.

XIV-10. Вычислите присоединенную массу для шара, учитывая тот факт, что потенциал скорости для шара радиуса R , движущегося со скоростью U в сферической системе координат (r, θ, ψ) в спокойной жидкости, дается выражением

$$\varphi = \frac{UR^3}{2r^2} \cos \theta.$$

О т в е т:

$$M' = \rho \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_R^{\infty} \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{U^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi = \frac{2}{3} \rho \pi R^3.$$

XIV-11. Горизонтальная компонента скорости, обусловленная линейной периодической гравитационной волной на глубокой воде, равна

$$u = H \frac{\pi}{T} e^{\frac{2\pi}{L} z} \cos(kt - mx).$$

Рассчитайте максимальную полную силу, действующую на вертикальный цилиндр диаметром 5 футов, за счет волны высотой $H = 20$ футов и периодом $T = 10$ с. Коэффициент сопротивления $C_D = 1$, а инерционный коэффициент $C_M = 2$. Кроме того, $k = 2\pi/L$, $m = 2\pi/L$, $L = gT^2/2\pi$.

О т в е т: сила сопротивления максимальна под гребнем. Сила инерции максимальна в момент, когда свободная поверхность проходит положение невозмущенного уровня. Максимальная полная сила на данном горизонте имеет место до того, как гребень проходит над данной точкой, и этот момент слегка изменяется с глубиной. Максимальная полная сила рассчитывается с помощью численного интегрирования.

Том II

ТЕОРИИ ВОЛН НА ВОДЕ

Часть третья

ПОТОК СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И ВОЛНЫ НА ВОДЕ

Глава XV

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВОЛН НА ВОДЕ

XV-1. Физическая классификация различных видов волн на воде. Обозначения

XV-1.1. Сложность и разнообразие различных видов волн на воде.

XV-1.1.1. Целью настоящей главы является обзор теорий нестационарного потока со свободной поверхностью, подверженного действию гравитационных сил. Такие движения называются водяными волнами (волнами на воде), хотя волны давления (например, акустические) в водной среде также являются «водяными». Их называют еще гравитационными волнами, хотя многие атмосферные движения также являются волнами, подверженными силе тяжести.

С физической точки зрения разнообразие волн на воде чрезвычайно велико. К движениям этого типа относятся как штормовые волны в океане, вызванные ветром, так и волны паводка на реках; как сейши и длиннопериодные колебания в гаванях, так и приливной бор или движущийся гидравлический прыжок в эстуариях; как корабельные волны, образованные идущим по каналу судном, так и волны цунами, вызванные землетрясениями, или волны от подводных ядерных взрывов.

С математической точки зрения очевидно, что общего решения, охватывающего все возможные случаи, не существует. Даже в простых случаях аппроксимации оказываются необходимыми. Одним из самых важных вопросов теории волн на воде является вопрос о границах пригодности различных решений, полученных при тех или иных упрощающих допущениях. Математические аспекты изучения волн на воде столь же разнообразны, как и физические. Действительно, математическое исследование волн на воде охватывает все методы математической физики, касающиеся как линейных, так и нелинейных задач. Главная трудность изучения таких волн заключается в том, что одна из границ, а именно — свободная поверхность — является одной из неизвестных величин.

Волны на воде настолько разнообразны и сложны, что всякая попытка их классификации может ввести в заблуждение. Любое

определение относится к идеализированным ситуациям, которые, строго говоря, никогда не встречаются в действительности, а осуществляются лишь в каком-то приближении. Например, двухмерного движения в чистом виде не существует. Такое движение является удобной математической идеализацией, которой физически ближе всего соответствует движение в бассейне с параллельными стенками. Однако и здесь существуют поперечные составляющие движения и эффекты, связанные с пограничным слоем, хотя их и довольно трудно выявить.

XV-1.1.2. Поскольку проблема волн на воде является чрезвычайно сложной по своей сущности, неудивительно, что попытка дать простое введение в эту проблему является трудной, если не невыполнимой задачей. Предмет рассмотрения не прост, а значит, и простое введение могло бы лишь дезориентировать. Поэтому

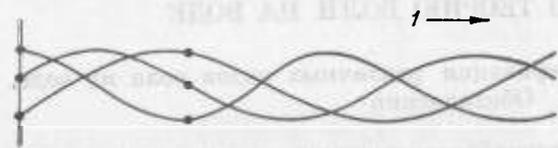


Рис. XV-1. Колебательная волна.
1 — направление распространения волны.

настоящую главу следует рассматривать скорее как указатель содержания последующих глав и тех вопросов, которые, хотя и выходят за рамки данной книги, могут представить интерес для читателя, посвятившего себя дальнейшему изучению волн на воде.

Целью настоящей главы является охватить как можно больше различных теорий и постараться связать их друг с другом. Как следует уяснить себе эти взаимосвязи, пожалуй, легче уже после того, как проработаны последующие главы. Количество теорий волн на воде настолько велико, что может ошеломить новичка.

Будем надеяться, что даже предлагаемое поверхностное изложение сущности различных подходов к проблеме существенно поможет их пониманию. Полное усвоение материала данной главы, ведущее к ясному и четкому пониманию всех моментов, может произойти только после глубокого изучения каждой из перечисленных теорий, либо с помощью настоящей книги, либо другим путем.

Имея в виду все вышесказанное, мы переходим к рассмотрению следующей ниже классификации. Сначала дается физическая классификация, затем — различные математические подходы и границы их применимости. Наконец, в завершение рассматриваются два традиционных больших семейства волн на воде.

XV-1.2. Колебательные волны. С физической точки зрения существуют два существенно различных типа волн на воде. Это колебательные волны и волны перемещения. В колебательной волне средний перенос, или расход массы жидкости, равен нулю. Волновое движение, следовательно, аналогично поперечным колебаниям шнура (рис. XV-1). В волне перемещения, как видно из названия, происходит перенос жидкости в направлении движения волны. Волной перемещения является, например, движущийся гидравлический прыжок, так называемый приливный бор или просто бор.

XV-1.2.1. Прогрессивные волны. Колебательные волны могут быть прогрессивными или стоячими. Рассмотрим возмущение $\eta(x, t)$, представляющее собой возвышение свободной поверхности, перемещающееся вдоль оси Ox со скоростью C . Характеристики прогрессивной волны остаются неизменными для наблюдателя, перемещающегося с той же скоростью и в том же направлении, что и волна (рис. XV-2). Если мы можем выразить η в виде функции от $(x - Ct)$, то это значит, что мы имеем «стационарное состояние» профиля волны. Выражение $\eta(x - Ct)$ является общим выражением для прогрессивной волны, перемещающейся без изменения профиля в положительном направлении Ox с постоянной скоростью C . Математическое выражение для прогрессивной волны, движущейся в противоположном направлении, будет представлять собой функцию от $(x + Ct)$. Укажем, что определение

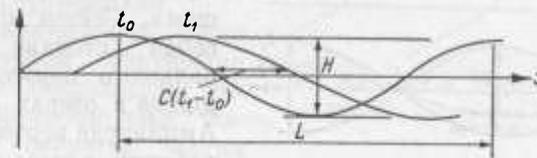


Рис. XV-2. Прогрессивная волна.

скорости волны C для случая нестационарного профиля не имеет смысла, поскольку каждый «волновой элемент» движется со своей собственной скоростью, что и приводит к деформации волны.

XV-1.2.2. Гармонические волны. Простейшим случаем прогрессивной волны является волна, профиль которой определяется синусоидой или косинусоидой:

$$\eta = \frac{H}{2} \sin m(x - Ct).$$

Такая волна называется гармонической волной с амплитудой $H/2$ и высотой H . Расстояние между гребнями называется длиной волны L , и мы имеем соотношение $L = CT$, где T — период волны. Волновое число $m = 2\pi/L$ показывает число волн, укладывающихся в определенном горизонтальном отрезке, причем это число выражено в «циклических» единицах, т. е. одной волне соответствует 2π . Величина $k = 2\pi/T$ будет частотой. Таким образом, предыдущее уравнение можно записать

$$\eta = \frac{H}{2} \sin 2\pi \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right).$$

XV-1.2.3. Стоячие волны, толчая и сейши. Стоячие, или стационарные, волны математически могут быть выражены в виде произведения двух независимых функций от времени и расстояния, например:

$$\varphi = H \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

или в более общей форме

$$\varphi = \varphi_1(x) \varphi_2(t).$$

Стоячую волну можно рассматривать как суперпозицию двух прогрессивных волн с одинаковой амплитудой и одинаковым периодом, движущихся в противоположных направлениях. В случае, когда членами конвективной инерции можно пренебречь, движение в стоячей волне определяется просто линейным суммированием решений для двух прогрессивных волн. Можно без труда показать, что

$$\frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{L} (x - Ct) + \frac{H}{2} \sin \frac{2\pi}{L} (x + Ct) = H \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Стоячие волны, возникающие при интерференции ветровых волн, называются толчеей. В условиях относительного мелководья ($d/L < 0,05$) они называются сейшами. Сейши представляют собой стоячие колебания большого периода, происходящие в озерах и гаванях*.

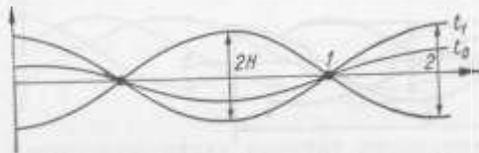


Рис. XV-3. Стоячая волна.
1 — узел; 2 — пучность.

Амплитуда вертикальных колебаний в узле равна нулю; в пучности амплитуда равна H .

XV-1.2.4. Частичная толчея (прогрессивно-

стоячие волны). Две встречные прогрессивные волны одинакового периода, но разной амплитуды образуют «частичную толчею» («прогрессивно-стоячую волну») и могут быть линейно представлены в виде суммы $A \sin(x - Ct) + B \sin(x + Ct)$. Частичную толчею можно рассматривать также как суперпозицию прогрессивной волны и стоячей волны. Прогрессивно-стоячие волны имеют место перед препятствием, которое приводит к частичному отражению волн. В пучности амплитуда равна $N = A + B$, а в узле $D = A - B$. Непосредственное измерение N и D позволяет найти $A = (N + D)/2$, $B = (N - D)/2$ и коэффициент отражения $R = (N - D)/(N + D)$.

XV-1.2.5. Рефракция, дифракция и разрушение волн. Далее мы увидим, что скорость волны в общем является функцией от глубины воды (см. XVI-3.3). Явление рефракции возникает, когда волна движется с одной глубины на другую (рис. XV-4). Явление дифракции происходит у конца какого-либо препятствия (рис. XV-5). Его можно рассматривать как процесс передачи энергии в направлении, параллельном гребню волны, хотя такое определение чрезмерно упрощает гораздо более сложное явление.

* Название «сейши» употребляют обычно для обозначения свободных колебаний полностью или частично изолированных водных масс озер, заливов, каналов, бухт, гаваней и др., в отличие от вынужденных стоячих колебаний (действие ветра, перемещающегося перепада давления и т. д.). — Прим. перев.

Разрушение волны может происходить в открытом море под действием ветра («барашки»), на побережье с наклонным дном типа пляжа (прибой) и в приливных эстуариях (приливный бор). Эти виды разрушения показаны на рис. XV-6. Это явление аналогично явлению ударной волны, встречающемуся в газовой динамике. Разрушение волн характеризуется высокой интенсивностью турбулентности, связанной с интенсивной диссипацией энергии. Боры, образованные опрокидывающимися на пляже ветровыми волнами или приливом большой амплитуды в эстуарии, следует рассматривать как волны перемещения.

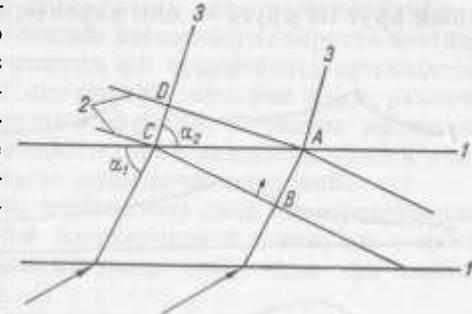


Рис. XV-4. Рефракция волн.
1 — изобаты; 2 — гребни волн; 3 — волновые ортогоналы.

С гидродинамической точки зрения критерий обрушения определяется следующими условиями: обрушение имеет место, когда скорость частиц в гребне становится больше, чем скорость распространения волны, или когда условие постоянства давления на свободной поверхности более не может удовлетворяться, или когда ускорение частиц в гребне становится больше, чем ускорение силы тяжести, или, наконец, когда свободная поверхность стремится

принять вертикальное положение, образовав стенку. Для безвихревых прогрессивных гравитационных волн найдено, что критерий обрушения связан с максимальной крутизной волны. Обычно приводятся следующие формулы:

$H/L < 0,142$ — на глубокой воде (предел Мичелла);
 $H/L < 0,14 \text{ th}(2\pi d/L)$ — при промежуточной глубине (формула Миша);

$H/d < 0,78$ — для уединенных волн на мелкой воде.

XV-1.3. Волны перемещения.

В волнах перемещения происходит перенос воды в направлении движения волны. При-
мерами таких волн являются:

- приливный бор или движущийся гидравлический прыжок;
- волны, возникающие при разрушении плотины;
- нагон или накат на сухой берег;
- движущийся гидравлический прыжок-волна;

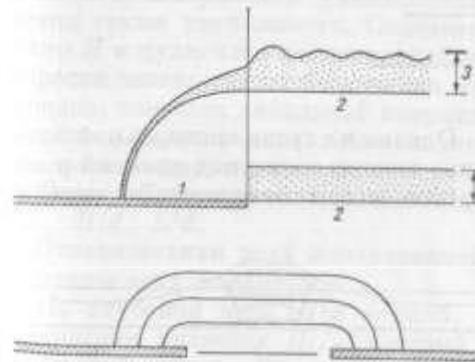


Рис. XV-5. Дифракция волн.
1 — мол; 2 — гребень волны; 3 — высота волны

полностью пренебрегается конвективной инерцией. Эти теории применимы, когда параметры H/L , H/d и L/d малы, т. е. для волн малой амплитуды и малой длины на глубокой воде. Первое из этих условий дает название «теории волн малой амплитуды». Это — приближение волн бесконечно малой высоты.

Линеаризация основных уравнений настолько облегчает математические операции, что линейные теории волн используются для описания самых разнообразных волновых движений. Например, в рамках линейной математической теории могут рассматриваться такие явления, как дифракция волн, образование волн при движении корабля, образование волн взрывами и т. д.

XV-2.2.2. Степенные ряды и стационарный профиль. Решение можно искать в виде степенного ряда с малым по отношению к другим величинам параметром. При малых значениях L/d таким параметром будет величина H/L , поскольку на глубокой воде H/L является наиболее важным параметром. При больших значениях L/d таким параметром будет величина H/d , являющаяся наиболее важным параметром на мелкой воде. В первом случае (при разложении в ряд по параметру H/L) первый член разложения дается линейной теорией. Во втором случае (при разложении по H/d) первый член уже является решением нелинейных уравнений.

Вычисление последовательных членов ряда является настолько трудоемким, что эти методы используются лишь в немногих случаях. Наиболее типичным является случай прогрессивной периодической волны. При этом заранее предполагается, что решение соответствует стационарному профилю, т. е. выражается функцией $F = f(x - Ct)$, где C — постоянная скорость распространения волны или фазовая скорость. Упрощение, вносимое таким допущением, заключается в том, что поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial (x - Ct)}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -C \frac{\partial F}{\partial (x - Ct)},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -C \frac{\partial F}{\partial x}$$

Таким образом, временная производная с легкостью может быть исключена и заменена пространственной производной.

Типичными примерами применения этой теории являются:

1) разложение в степенной ряд по параметру H/L , дающее волну Стокса на глубокой воде. Первый член этого ряда получается из линейных уравнений и соответствует приближению волн бесконечно малой амплитуды;

2) разложение в степенной ряд по параметру H/d , дающее неидеальные волны или уединенную волну на мелкой воде. Первые члены ряда получаются в виде стационарного решения уже нели-

нейных уравнений, но соответствуют приближению мелкой воды, которое будет получено в XV-4.1.

XV-2.2.3. Численные методы. Однако может случиться, что решение не может быть представлено с помощью стационарного профиля, и тогда для исследования часто применяют численные методы, в которых дифференциалы заменены конечными разностями. Это бывает при больших значениях параметров H/d и L/d , т. е. тогда, когда нелинейные члены типа $\rho u \partial u / \partial x$ велики по сравнению с членами локальной инерции типа $\rho \partial u / \partial t$. Это — случай длинных волн на очень мелкой воде.

XV-2.2.4. Разумеется, численный метод можно использовать и для решения линеаризованной системы уравнений. Например, метод релаксации используется для изучения малых волновых возмущений в бассейнах. С другой стороны, в некоторых частных случаях можно найти аналитическое решение и для нелинейной системы уравнений. Поэтому надо иметь в виду, что указанные области применения трех перечисленных методов не являются очень строгими.

XV-2.2.5. Случайные функции. Наряду с указанными выше методами, которые ведут к полностью детерминированным решениям, для описания состояния морского волнения в общем могут использоваться случайные функции. Математические операции при таком подходе к проблеме (например, гармонический анализ) обычно подразумевают, что волны описываются линейными законами, что является обязательным требованием для возможности применения принципа суперпозиции. Следовательно, этот метод становится непригодным для описания состояния поверхности моря при очень малых глубинах, т. е. при больших значениях параметров H/d и L/d .

XV-2.3. Понятие о параметре Урселла. XV-2.3.1. Поясним изложенные выше соображения примером. Потенциальная функция для волны Стокса или безвихревой периодической гравитационной волны, движущейся на постоянной конечной глубине, во втором приближении будет

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{H}{2} \frac{k}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} \cos(mx - kt) + \\ & + \frac{3}{8} \left(\frac{H}{2}\right)^2 k \frac{\operatorname{ch} 2m(d+z)}{\operatorname{sh}^4 md} \cos 2(mx - kt). \end{aligned}$$

Поскольку ряд является сходящимся и поскольку первое слагаемое в правой части получается при учете только локальной инерции, а второе слагаемое представляет собой первую, т. е. наиболее существенную поправку за счет конвективной инерции, то относительную важность члена конвективной инерции можно оценить с помощью отношения амплитуд указанных двух слагаемых. В частности, при очень малых глубинах, поскольку при этом $\operatorname{ch} A \rightarrow 1$, а $\operatorname{sh} A \rightarrow A$, мы получаем после простых преобразований, что отно-

шение амплитуды члена второго порядка к амплитуде члена первого порядка равно

$$\frac{3}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{H}{L} \left(\frac{L}{d}\right)^3.$$

Если величина $(H/L)(L/d)^3$ очень мала, то применима теория волн малой амплитуды.

Если вместо высоты H использовать максимальное возвышение над невозмущенной поверхностью η_0 (в линейной теории $\eta_0 = H/2$), то получим так называемый параметр Урселла, ранее введенный еще Кортевегом и де Фризом:

$$U_R = \frac{\eta_0}{L} \left(\frac{L}{d}\right)^3$$

Когда $U_R \ll 1$, то можно применять линейную теорию волн малой амплитуды. По мере увеличения параметра Урселла сохранение прежней относительной точности требует учета все новых и новых членов степенного ряда.

В случае очень длинных волн на мелкой воде (волны паводка, бор, волны цунами вблизи берега) величина параметра Урселла, которая в этом случае гораздо больше единицы, зависит от интерпретации, которую мы даем величине L . Более показательным параметром, характеризующим важность нелинейных членов, будет теперь относительная высота H/d . При этом вертикальная компонента силы инерции пренебрежимо мала, и в выражении для конвективной инерции остается только один член $\rho u \, du/dx$. Рассчитать отношение амплитуды конвективной инерции к амплитуде локальной инерции $(\rho u \, du/dx)/(\rho \, du/dt)$ можно теперь непосредственно. Поскольку на очень мелкой воде величина d/L очень мала, а $\text{sh } A \rightarrow 1$ и $\text{sh } A \rightarrow A$, то очень быстро получаем простое выражение

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{2} \frac{k}{md} \sin(mx - kt)$$

и отсюда находим

$$\frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\max}}{\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\max}} = \frac{H}{2d}$$

что указывает на относительную важность отношения H/d . Несмотря на указанную трудность интерпретации, параметр Урселла является полезным и простым вспомогательным средством, хотя и не всегда достаточным для суждения об относительном значении нелинейных эффектов.

XV-2.3.2. Изображенный на рис. XV-8 чертеж приблизительно указывает границы применимости различных теорий. Этот график построен для двумерных периодических волн (рис. XV-9), но он в известной степени может служить и для волн любого типа. Пока-

заны кривые, соответствующие трем значениям параметра Урселла. Рисунок ограничен кривой, соответствующей критерию разрушения,

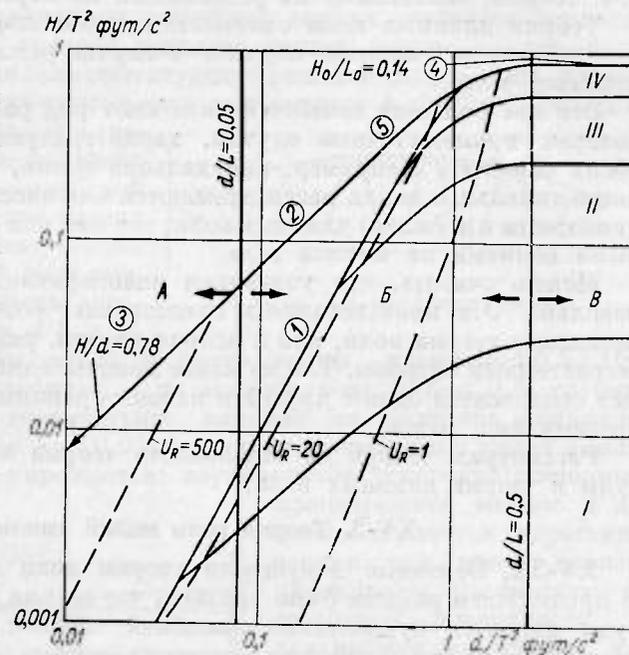


Рис. XV-8. Области применимости различных волновых теорий.

A — волны на мелкой воде; B — волны на промежуточной глубине; B — волны на глубокой воде; I — волны Эри (линейная теория); II — волны Стокса (2-е приближение); III — волны Стокса (3-е приближение); IV — волны Стокса (4-е приближение); 1 — теория кноидальных волн; 2 — кривая, соответствующая критерию разрушения; 3 — предельная уединенная волна; 4 — предельная волна на глубокой воде; 5 — формула Миша. Прерывистые линии соответствуют постоянным значениям параметра Урселла.

который показывает, что существует некоторая максимальная величина крутизны волны, являющаяся функцией относительной глубины (см. XV-1.2.5).

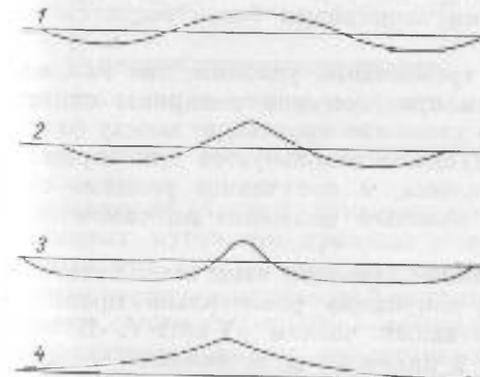


Рис. XV-9. Профили волн различных типов.

1 — волна Эри (глубокая вода, незначительная крутизна волны); 2 — волна Стокса (глубокая вода, значительная крутизна волны); 3 — кноидальная волна (мелкая вода); 4 — уединенная волна (предельная форма кноидальной волны, когда период волны стремится к бесконечности).

До настоящего времени не сделано тщательного количественного исследования ошибок, связанных с использованием различных теорий в различных областях применения, а также границ, разделяющих эти области. Поэтому предлагаемый график имеет несколько произвольный и, в известной мере, качественный характер

XV-2.4. Два крупных семейства волн на воде. Теории волн на воде в гидродинамике обычно разделяют на два крупных семейства. Это теории волн малой амплитуды и теории длинных волн.

Теории волн малой амплитуды охватывают линеаризованные теории и первую категорию теорий, основанных на степенных рядах, т. е. теории, основанные на разложении по параметру H/L .

Теории длинных волн охватывают численные методы решения, употребляемые главным образом в случае нелинейных уравнений длинных волн.

Эти два больших семейства включают ряд разновидностей и некоторые промежуточные случаи, характеризующиеся признаками обоих семейств. Например, кноидальная волна, уединенная волна, моноклиальная волна рассматриваются как частные случаи (со стационарным профилем) длинных волн, так как они являются нелинейными волнами на мелкой воде.

Можно считать, что указанная классификация несколько произвольна. Эта произвольность представляет собой дань традиции, поскольку теории волн, как и всякая теория, развивались довольно бессистемным образом. Тем не менее понять, каким образом эти теории соотносятся одна с другой и каковы границы их применимости, чрезвычайно важно.

Рассмотрим теперь по отдельности теории волн малой амплитуды и теории длинных волн.

XV-3. Теория волн малой амплитуды

XV-3.1. Основные допущения теории волн малой амплитуды.

В предыдущем разделе было указано, что теория волн малой амплитуды является существенно линейной теорией, т. е. нелинейные члены конвективной инерции считаются малыми. Ее название объясняется тем, что эта теория теоретически является точной даже при сохранении конвективных членов, если размеры движений стремятся к нулю. Действительно, в этом случае нелинейные члены оказываются бесконечно малыми величинами более высокого порядка, чем линейные члены.

Такое допущение является чрезвычайно удобным, так как возвышение свободной поверхности при этом можно заранее считать равным нулю, т. е. считать, что движение происходит между фиксированными границами. Это допущение используется для определения «нулевого» волнового движения, и полученное решение считается пригодным, даже если волновое движение на самом деле отлично от нуля.

Наряду с указанным допущением движение чаще всего считается также безвихревым. Это второе допущение равносильно пренебрежению квадратическим конвективным членом $\rho \mathbf{V} \text{curl } \mathbf{V}$. В этом случае решение задачи состоит в нахождении потенциала скорости $\phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющего граничным условиям на свободной поверхности и на краях бассейна.

Исключительная плодотворность изложенного подхода была подтверждена даже для случая волн значительной величины. Помимо всего прочего, допущение о линейности позволяет исследовать сложные движения путем суперпозиции элементарных волновых движений.

XV-3.2. Различные виды линейных волн малой амплитуды.

XV-3.2.1. Теория периодических волн малой амплитуды. Движение, имеющее место при прогрессивных периодических двумерных линейных волнах, является основным видом движения, которое помогает понять многие другие, более сложные движения. Соответствующее решение мы находим, предполагая, что движение описывается выражением $A \sin(2\pi/L)(x - Ct)$, где C — константа. Это решение может быть получено как для очень глубокой воды, так и для небольших глубин. На практике теория волн на глубокой воде применяется тогда, когда относительная глубина d/L , т. е.

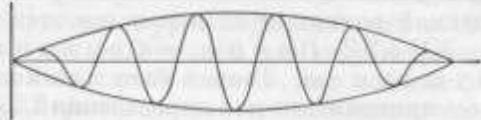


Рис. XV-10. Биение волн.

отношение глубины места к длине волны, превышает 0,5. При промежуточных глубинах и на мелкой воде ($d/L < 0,5$) глубина места оказывает значительное влияние на волновое движение. На мелкой воде ($d/L < 0,05$) линейная теория волн малой амплитуды существенно упрощается: вертикальное ускорение становится пренебрежимо малым, и давление считается гидростатическим, т. е. просто пропорциональным расстоянию от свободной поверхности. В дальнейшем мы увидим, что теория волн малой амплитуды в этом случае оказывается частным (предельным) случаем теории длинных волн, когда пренебрегается конвективной инерцией.

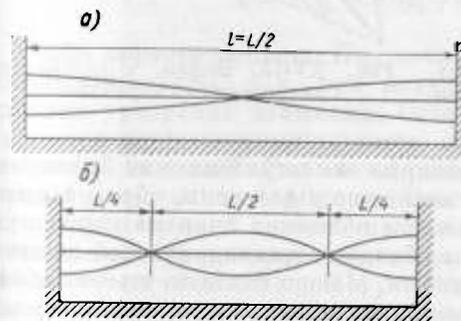


Рис. XV-11. Сейши в двухмерном бассейне.

а — основная; б — высшая гармоника.

Две периодические прогрессивные волны со слегка различающимися периодами, движущиеся в одном и том же направлении, образуют показанную на рис. XV-10 последовательность волновых дуг, что приводит к возникновению биений. Ранее мы видели, что две встречные прогрессивные периодические волны одинакового периода и одинаковой амплитуды образуют стоячие волны или толчею, а при $d/L < 0,05$ — сейши (рис. XV-11). «Косое» отражение периодической волны от вертикальной стенки образует систему волн, обладающих короткими гребнями и представляющих собой систему расположенных в шахматном порядке пиков, которые перемещаются параллельно стенке.

С помощью теории волн малой амплитуды можно исследовать многие трехмерные периодические движения в области, ограниченной сложными границами. Это — трехмерные волновые движения в резервуарах и баках различной формы (прямоугольных, круглых

и т. д.) с постоянной или переменной глубиной. Процесс дифракции волны на вертикальной стенке также доступен тщательному исследованию с помощью теории волн малой амплитуды. Наконец, эта теория в случае прогрессивных волн вполне пригодна для того, чтобы служить основой для изучения ветровых волн, хотя это явление и является неперiodическим и случайным по своей природе. По этой последней причине изучение ветровых волн требует дополнительных исследований методами, которые рассмотрены в главе XVIII, посвященной волновым спектрам (см. также XV-5).

XV-3.2.2. Волны, образованные местным возмущением. Теория волн малой амплитуды может также с успехом применяться для определения волнового движения, возбужденного локальным возмущением или импульсом на свободной поверхности или на дне (рис. XV-12).

Например, методами этой теории можно исследовать в зоне боль-

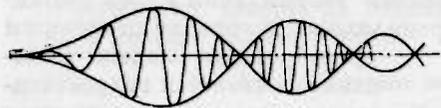


Рис. XV-12. Волна, образованная местным возмущением свободной поверхности.

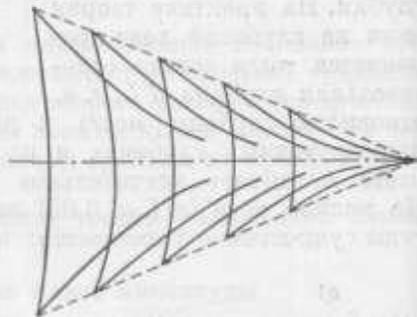


Рис. XV-13. Волны, образованные движущимся кораблем.

ших глубин волны цунами, вызванные землетрясениями. Аналогичное теоретическое рассмотрение возможно и для волн, образованных подводным взрывом или обрушением обломков скал на свободную поверхность. В общем эти волны обладают цилиндрической симметрией, но не являются периодическими. Можно считать, что они обладают псевдопериодом, определяемым интервалом времени, который разделяет моменты прохождения фиксированной точки двумя последовательными гребнями. Этот «период» убывает с течением времени в данной точке, т. е. он имеет тенденцию к увеличению с удалением от места возмущения. Часто волны, образованные возмущением, имеют вид последовательных волновых цугов, или «пакетов», причем число отдельных волн в каждом «пакете» увеличивается с удалением от очага возмущения.

Средняя высота волн имеет тенденцию к уменьшению с удалением от очага за счет двух причин: увеличения длины волны и радиальной волновой дивергенции (расхождения волновых лучей).

XV-3.2.3. Корабельные волны. Наконец, теория волн малой амплитуды может быть применена для исследования волновых движений, порождаемых движущимся возмущением (кораблем или атмосферным возмущением). Теоретическая волновая картина, созданная движущимся кораблем, схематически показана на рис. XV-13

XV-3.3. Нелинейные теории волн малой амплитуды. XV-3.3.1. Физические аспекты прогрессивных перио-

дических волн. Линейное решение для прогрессивной гармонической волны над горизонтальным дном дается в виде $A \sin(x - Ct)$; таким образом, свободная поверхность в точности определяется синусоидальной кривой. На мелкой воде гребень имеет тенденцию становиться более крутым, а ложбина — более пологой, как показано на рис. XV-9. При этих условиях линейная теория волн малой амплитуды уже непригодна.

XV-3.3.2. Волны, определяемые с помощью степенных рядов. В простом случае периодических волн, прогрессивных или стоячих, теория волн малой амплитуды может быть уточнена путем учета, в той или иной степени, сил конвективной инерции. В разделе XV-2.2.2 указывалось, что это можно сделать, представляя решение в виде степенного ряда, полученного разложением по параметру, малому сравнительно с другими величинами. Например, в простом случае периодической прогрессивной или стоячей двумерной волны предполагается, что решение, описывающее волновое движение, дается в виде степенного ряда, полученного разложением по степеням высоты волны H (или крутизны волны H/L). Тогда, скажем, потенциал скоростей $\phi(x, y, t)$ будет записан в виде

$$\phi = H\phi_1 + H^2\phi_2 + H^3\phi_3 + H^4\phi_4$$

Член первого порядка $H\phi_1$ точно дается линейной теорией волн малой амплитуды, т. е. при полном пренебрежении нелинейными членами уравнений движения. Остальные члены выражения для ϕ являются поправочными членами, обусловленными нелинейной конвективной инерцией. Эти члены ряда находят последовательно с помощью рекуррентных формул. Волновая теория третьего порядка, или теория третьей степени приближения — это теория, в которой вычисления производятся до члена соответствующей степени, т. е. она включает члены $H\phi_1$, $H^2\phi_2$ и $H^3\phi_3$. В случае гармонической волны ϕ_2 и ϕ_3 являются синусоидальными функциями от $n(x - Ct)$, где n — целое число, равное порядку рассматриваемого члена, а ϕ_n — функции от относительной глубины d/L . На практике сложность членов ϕ_2 , ϕ_3 , ... возрастает с порядком приближения настолько сильно, что вычисления редко удается производить с более высоким порядком приближения, чем пятый. Формулы для пятого порядка приближения так сложны, что для их применения требуется специальный набор таблиц, рассчитываемых с помощью ЭВМ.

В инженерной практике чаще всего достаточно первого приближения. Однако теории более высоких порядков обнаруживают некоторые любопытные особенности волн большой крутизны на глубокой воде. На очень мелкой воде члены конвективной инерции сравнительно велики, и ряд сходится очень медленно. Ряд даже не является обязательно равномерно сходящимся, и функция от d/L теряет свой смысл.

Уже было указано, что на мелкой воде наиболее важным становится параметр H/d вместо параметра H/L на глубокой воде. Степенной ряд, полученный разложением по параметру H/d , удобнее

для использования и требует учета меньшего числа членов при одинаковой точности. Такие степенные ряды используются в теориях кноидальных и уединенных волн, которые рассмотрены в XV-4.4.1.

XV-3.3.3. После того, как все уравнения, определяющие движение, установлены и все граничные условия заданы, число возможных решений все еще остается бесконечным. Другими словами, всех этих уравнений еще недостаточно для определения волнового движения.

Необходимы еще два дополнительных условия. Одно из них касается вопроса о завихренности движения и рассматривается в следующем разделе. Кроме того, надо также установить, должно ли движение иметь вид прогрессивной волны, стоячей волны или

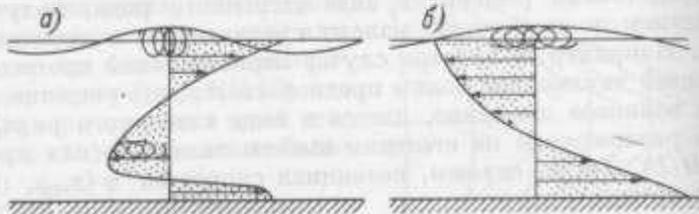


Рис. XV-14. Периодическая прогрессивная волна, сопровождаемая переносом массы.

a — величина d/L велика; *b* — величина d/L мала.

группы волн. Например, в первом случае решение для стационарного профиля должно быть найдено в виде функции от $(x - Ct)$, где C — постоянная скорость волны. Надо отметить, что решение для стоячей волны получается путем простого суммирования двух встречных периодических гравитационных волн только в линейном случае. Это суммирование справедливо также для первого (линейного) члена степенного ряда. Однако члены более высоких порядков должны находиться независимо по рекуррентным формулам, полученным отдельно для каждого типа движения — прогрессивного или стоячего.

XV-3.4. О влиянии завихренности на волны. XV-3.4.1. Другое допущение, необходимое для нахождения единственного решения, касается распределения завихренности по вертикали. Разумеется, наиболее простым является допущение об отсутствии вихревого движения вообще — такое допущение приводит и к более простому решению. Именно на этом последнем условии основано большинство теорий волн малой амплитуды. В этом случае решение задачи состоит в нахождении потенциальной функции для волнового движения. В случае волн Стокса, т. е. при периодическом безвихревом двухмерном волновом движении, вычисления для более высокого порядка аппроксимации, чем линейная, показывают, что в направлении движения волны происходит перенос массы, т. е. движение частиц по орбитам является незамкнутым (рис. XV-14). Интенсивность переноса массы является функцией относительной глубины и крутизны.

XV-3.4.2. Может возникнуть вопрос, не является ли сказанное выше чисто математическим результатом, не имеющим физического значения. Для ответа на этот вопрос мы должны рассмотреть границы применимости допущения об отсутствии вихревого движения в волнах на воде. Зыбь на глубокой воде, т. е. волны, порожденные ветром, но покинувшие область зарождения, представляет собой движение, к которому, по-видимому, ближе всего подходит определение безвихревого движения. Но при наличии ветра обусловленные его действием касательные напряжения на свободной поверхности порождают завихренность (и турбулентность) и увеличивают приповерхностный перенос массы в направлении движения волны. На мелкой воде завихренность создается придонным трением. Перенос массы не всегда совместим с принципом неразрывности вблизи берега. Нагон воды к берегу должен приводить к возвратному потоку, либо распределенному равномерно, либо за счет неустойчивости сконцентрированному в некоторых определенных местах (так называемые разрывные течения). При этом картина наложенных друг на друга течений должна быть такой, чтобы проинтегрированный по вертикали перенос массы был равен нулю (рис. XV-15). В этом случае можно получить вихревую теорию волн, причем распределение завихренности по вертикали является неоднородным.

Если предположить, что нулю равен не только проинтегрированный по вертикали перенос массы, но и перенос массы на любом горизонте, то мы получим теорию «замкнутых орбит». Теории такого рода также являются вихревыми. К сожалению, при этом получается завихренность обратного знака по отношению к завихренности, вызванной касательными напряжениями, обусловленными влиянием ветра на свободную поверхность.

Наиболее известной теорией замкнутых орбит является теория Герстнера, справедливая только для глубокой воды и являющаяся при этом точной теорией, т. е. теорией, в которой строго учтены все члены конвективной инерции. На мелкой воде теория замкнутых орбит может быть дана только в приближенном виде с помощью разложения в степенной ряд по параметру H .

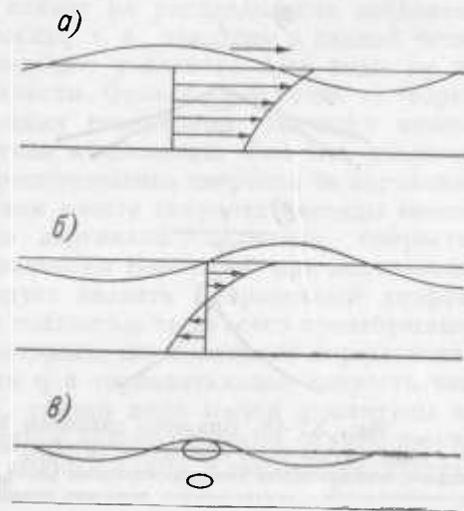


Рис. XV-15. Различные модели переноса массы в периодических гравитационных волнах. Стрелкой указано направление перемещения волн.

a — результирующий перенос массы имеет место; *b* — результирующий перенос массы отсутствует; *c* — замкнутые орбиты.

XV-3.4.3. Хотя глубокий анализ явления обрушения волн и не является целью этой книги, тем не менее стоит остановиться на соотношении между интенсивностью завихренности и предельной крутизной волны.

Выше отмечалось (в XV-1.2.5), что обрушение волны начинается, когда профиль волны достигает предельного значения крутизны $(H/L)_{\max}$. Теоретическое значение предельной крутизны для безвихревой периодической волны на глубокой воде равно 0,142. Завихренность в районе гребня, направление которой соответствует ветровому

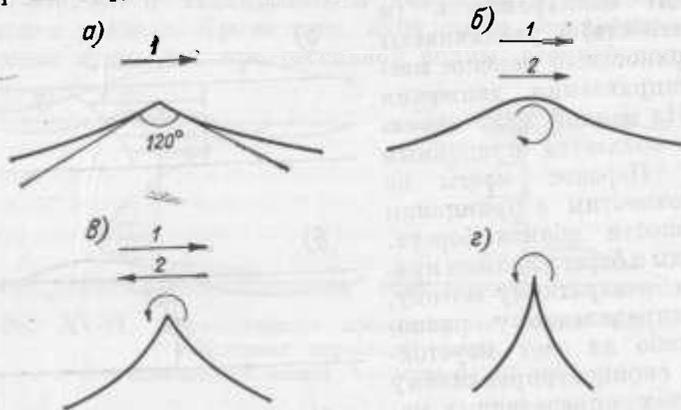


Рис. XV-16. Вихревое движение и предельная крутизна волн.

а — ветра нет; движение безвихревое; $|H/L|_{\max} = 0,14$; б — направления волны и ветра совпадают; завихренность показана стрелкой; $|H/L|_{\max} < 0,14$; в — направления волны и ветра противоположны; завихренность показана стрелкой; $|H/L|_{\max} > 0,14$; г — волна Герстнера. Величина вихря в гребне бесконечна. $|H/L|_{\max} = 0,31$.
1 — направление волны; 2 — направление ветра.

воздействию (рис. XV-16), снижает предельное значение крутизны. В глубоком море редко можно встретить волну с крутизной большей 0,10.

Противоположно направленная завихренность теоретически должна увеличить предельное значение крутизны волны. Такой случай может наблюдаться вблизи побережья, когда волна движется навстречу ветру, дующему с берега в море. Согласно теории замкнутых орбит Герстнера, предельное максимальное значение крутизны волны может достигать 0,31, но при этом завихренность в гребне, направленная навстречу движению волны, равна бесконечной величине по своей интенсивности. Очевидно, что этот результат теории Герстнера не имеет физического смысла.

Мы видим теперь, насколько важно было бы создать общую вихревую теорию волн и связать завихренность и перенос массы с ветровым воздействием и донным трением. Влияние вязкого трения у дна исследовалось рядом авторов. Однако до сих пор не создана общая теория периодических волн с произвольной завихренностью или переносом массы (поскольку оба эти явления связаны между собой), справедливая для волн любой высоты, любого периода и

на любой глубине. Остается довольствоваться существующей теорией, справедливой только для ограниченного диапазона значений чисел Урселла.

XV-4. Теория длинных волн

XV-4.1. Основные допущения теории длинных волн. Теория длинных волн применяется, когда относительная глубина очень мала. В этом случае вертикальными ускорениями можно пренебречь, и кривизна траекторий невелика. Следовательно, вертикальная компонента движения не влияет на распределение давления, которое считается гидростатическим, т. е. давление в данной точке предполагается равным произведению удельного веса воды ρg на расстояние от свободной поверхности. Однако, в отличие от теории волн малой амплитуды, свободная поверхность является теперь неизвестной даже на первом этапе вычислений. Так как давление будет однородным. Таким образом вместо скорости частицы можно рассматривать осредненную по вертикали величину скорости. Как и в случае обобщенного уравнения Бернулли, при использовании квадратичных членов следует вводить поправочный коэффициент, близкий к единице. Этой тонкостью чаще всего пренебрегают.

Итак, единственными неизвестными, подлежащими определению, остаются свободная поверхность η и горизонтальная скорость частицы $V(u, v)$. Таким образом, теория волн малой амплитуды на мелкой воде может рассматриваться как предельный случай теории длинных волн, так как обе они ведут к одним и тем же результатам (см. XVIII-4).

Однако в нелинейной теории длинных волн учитываются конвективные члены типа $\rho u \frac{du}{dx}$, обусловленные горизонтальными компонентами движения. Поскольку уравнения становятся нелинейными, число аналитических решений ограничивается очень немногими частными случаями.

XV-4.2. Основные положения численных методов вычислений. В то время как теория волн малой амплитуды дает аналитические методы отыскания потенциальной функции, в теории длинных волн чаще всего применяются численные и графические методы, причем для расчетов используются электронно-вычислительные машины. В связи с этим первая задача обычно состоит в преобразовании системы дифференциальных уравнений (неразрывности и движения) в конечно-разностные соотношения. Затем вычисление выполняется шаг за шагом, т. е. значения $\eta(x, t)$ и $u(x, t)$ в данный момент t_1 и в данном месте x_1 рассчитываются по известным значениям этих величин в момент, отстоящий на небольшой интервал Δt от момента t_1 , и в точке, лежащей на небольшом расстоянии Δx от точки x_1 .

Например, рассмотрим простое линеаризованное уравнение длинных волн, которое будет выведено в XVIII-4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Рассмотрим точки 1—4 в плоскости x, t , разделенной интервалами Δx и Δt (рис. XV-17). Зная величины η_0 в точках 1—3, можно получить величину u в точке 4 из уравнения

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -g \frac{\Delta \eta}{\Delta x},$$

если записать его в виде

$$\frac{u_4 - u_1}{\Delta t} = -g \frac{\eta_3 - \eta_1}{2 \Delta x}.$$

Затем последовательно, шаг за шагом, производим вычисления u и η для всей диаграммы. Таким образом, получаем историю профиля волны как функцию времени и расстояния.

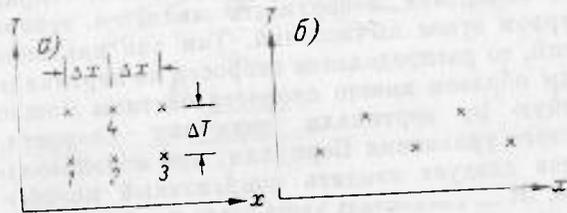


Рис. XV-17. Два типа конечно-разностных вычислительных схем. а — прямоугольная сетка; б — шахматная сетка.

XV-4.3. Возможности и границы применимости численных методов. XV-4.3.1. Сразу же бросается в глаза, что большим преимуществом теории длинных волн (при использовании численных методов) является ее разносторонность. Численные методы удобны для применения при наличии сложных граничных условий, в то время как поиски аналитических решений ограничены рамками допущений теории. Например, численные методы теории длинных волн могут быть применены к рекам с донным трением, касательное напряжение ветра на свободной поверхности и градиенты, обусловленные сложным распределением волн паводка и приливных волн. Касательные напряжения ветра и обусловленные наклоном свободной поверхности градиенты давления необходимо учитывать при исследовании штормовых нагонов (так называют подъем уровня у линии берега, обусловленный атмосферными воздействиями). Это явление также описывается теорией длинных волн, хотя силами инерции при этом часто можно пренебречь. В этом последнем случае рассматриваемую задачу называют квазистатической).

XV-4.3.2. Погрешности и пределы применимости численных методов. Преобразование дифференциальных уравнений в конечно-разностные соотношения сопровождается систематическими погрешностями. Действительно, известно, что путем разложения выражения для производной в ряд Тейлора получается

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\Delta F}{\Delta x} - \frac{1}{2} f''(x) \Delta x + \frac{1}{6} f'''(x) \Delta x^2 - \dots$$

При любом численном расчете прежде всего надо убедиться в том, что от замены производной $\partial F/\partial x$ на величину $\Delta F/\Delta x$ ошибка, накапливающаяся за счет пренебрежения членами высших порядков, не превзойдет требуемую точность вычислений. Предварительное исследование задачи включает в себя также нахождение «критерия устойчивости», который выражается обычно в виде соотношения между пространственным интервалом Δx и временным интервалом Δt . При наличии производных высших порядков критерий устойчивости может не существовать. Тогда производные высших порядков надо заменить производными первого порядка от других переменных; при этом число неизвестных увеличивается. Например, производную $\partial^2 \eta/\partial t^2$ можно заменить производной $\partial a/\partial t$, где $a = \partial \eta/\partial t$. Таким образом, выбор интервала обусловлен накапливающейся погрешностью, стоимостью машинного времени и «ошибкой округления». Ошибка округления возникает из-за того, что любой численный расчет выполняется с числами, имеющими ограниченное число знаков или «разрядов». Большая часть вычислений на электронно-счетных устройствах выполняется с восемью разрядами; иногда, если требуется «удвоенная точность», используется 16 разрядов или даже более. Но возрастающая стоимость машинного времени ограничивает получаемые при этом выгоды.

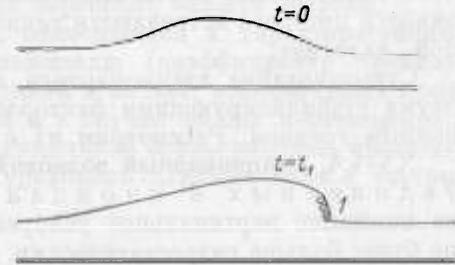


Рис. XV-18. Физическая иллюстрация парадокса длинных волн. 1 — бор.

Короче говоря, применение теории длинных волн всегда связано с неизбежными погрешностями, которые увеличиваются по мере роста времени и/или расстояния.

Изучение распространения на большое расстояние бора или прыжка-волны, или волны, образовавшейся при разрушении плотины, не удается выполнить из-за накапливающихся ошибок, даже если критерий устойчивости удовлетворяется. Однако исследование приливной волны в эстуарии или даже волны паводка в случае постепенного изменения глубины вполне возможно. Точно так же исследование распространения обрушающейся волны (бора) на крутом пляже, т. е. на небольшом (за счет крутизны уклона дна) расстоянии, может дать приемлемые результаты.

XV-4.3.3. Парадокс длинных волн. Упрощающие допущения порождают еще одну погрешность, систематически встречающуюся при пользовании теорией длинных волн. Поскольку скорость «элемента волны» равна \sqrt{gh} , т. е. пропорциональна квадратному корню из глубины, то волновые элементы, несущие большую энергию, стремятся догнать элементы, расположенные впереди (рис. XV-18). Вскоре образуется вертикальная стена воды, формирующая приливной бор. В природе это явление физически возможно,

но даже если оно происходит, то начало его образования наступает гораздо позднее, чем это следует из теории длинных волн. В частности, теория длинных волн может оказаться непригодной при рассмотрении волны, выражение которой содержит высокие степени пространственных производных от η и u . Подобным же образом из расчета следует, что обрушение длинной волны, набегающей на пляж, наступает раньше, чем если бы это обрушение было обусловлено только изменением глубины дна.

Наконец, надо ясно представлять себе, что теория длинных волн и стационарный волновой профиль — это два теоретически несовместимых понятия, хотя стационарный волновой профиль и наблюдается в природе. Это внутреннее противоречие теории длинных волн представляет собой так называемый парадокс длинных волн, аналоги которого встречаются также в газовой динамике и нелинейной акустике.

Существование стационарного волнового профиля объясняется двумя стабилизирующими факторами: вертикальным ускорением и донным трением. Рассмотрим их один за другим.

XV-4.4. Стационарный волновой профиль. XV-4.4.1. Теория уединенных и кноидальных волн. Если принять во внимание вертикальное ускорение, то распределение давления не будет больше гидростатическим. В частности, за счет центробежной силы, возникающей при орбитальном движении частиц, придонное давление под гребнем волны уменьшится на некоторую величину.

Учитывая вертикальное ускорение, мы можем, однако, его линеаризовать, положив $dw/dt \cong \partial w/\partial t$, так как, поскольку вертикальная компонента скорости w мала, то конвективные члены $w \partial w/\partial x$ и $w \partial w/\partial x$ остаются пренебрежимо малыми. Если учесть вертикальное ускорение в таком виде, то рассматриваемое движение будет нелинейным в горизонтальном направлении и линейным — в вертикальном. Даже если учесть нелинейные вертикальные компоненты в решении, полученном в виде разложения по степеням H/d , то эти компоненты войдут только в члены высших порядков. Если предположить, что решение уравнения длинных волн, полученное с учетом поправочного члена, обусловленного кривизной траекторий, представляет собой волну со стационарным профилем, то такое решение должно иметь вид функции от $(x - Ct)$. Решения такого вида действительно существуют. Это решения для уединенных и кноидальных волн (хотя в последнем случае давление оказывается гидростатическим в приближении первого порядка).

Мы видели, что в случае очень длинных волн параметр Урселла до некоторой степени теряет свой четкий смысл. Заметим, что понятие длины волны утрачивает смысл, поскольку «длина» уединенной волны равна бесконечности. Но кривизна потока под гребнем имеет место и в кноидальной волне, для которой может быть определена конечная длина волны.

Теперь нам понятно, почему следует рассматривать характерную длину волны, когда кривизна потока под гребнем заметна. Мы отмечали, что в этом случае величина параметра Урселла, харак-

теризующего кноидальные и уединенные волны, близка к единице (см. XV-2.3.1). В случае очень длинных волн, когда вертикальные ускорения и кривизна траекторий пренебрежимо малы, выбор характерной длины становится очень неопределенным и произвольным. Достаточно будет сказать, что такой тип движения соответствует величине параметра Урселла, намного большей, чем единица.

XV-4.4.2. Моноклиная волна паводка. Квадратичный, или вообще нелинейный, член, характеризующий донное трение, также оказывает стабилизирующий эффект и может уравновешивать горизонтальные компоненты силы конвективной инерции. Действительно, квадратичное касательное напряжение сильнее тормозит те элементы волны, в которых частицы обладают большей скоростью, т. е. которые переносят больше энергии.

При определенных условиях, относящихся к характеристикам уклона дна, фрикционному множителю (коэффициенту трения) и распределению глубин перед волной и за ней, стационарный профиль может оказаться возможным и в случае волны перемещения. Это случай так называемой моноклиальной волны паводка, представляющий собой точное решение уравнения длинных волн с учетом донного трения.

XV-5. Волновое движение как случайный процесс

XV-5.1. Новый подход к исследованию волн на воде. Мы рассмотрели краткое введение в гидродинамику периодических и других (определяемых аналитически) волн в тяжелой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Исследования в этом направлении продолжаются уже более ста лет.

Наблюдения показывают, что реальная взволнованная морская поверхность представляет собой непрерывно изменяющуюся картину горбов и ложбин, элементы которых имеют случайный характер. Волны разной длины движутся с различными скоростями, комбинируясь и рекомбинируясь в постоянно изменяющиеся образования, даже если все они имеют одно направление распространения. При наличии разнонаправленных волн результирующая картина еще сложнее. Долгое время многие исследователи, даже такие выдающиеся, как Рэлей и Стокс, считали, что этот кажущийся хаотическим процесс невозможно описать математически. Самое лучшее, что можно было сделать, это выбрать среднюю высоту волны и ее среднюю длину, а затем применить к ним классические волновые теории. Для математиков же интерес представляли классические теории сами по себе, а трудности, с которыми сталкивались, когда приходилось иметь дело с реальными морскими волнами, их не касались.

Сравнительно недавно подход к пониманию и исследованию реальных морских волн получил новое развитие. Этот новый подход базируется на сочетании статистики, рядов Фурье и гидродинамики. Статистические теории приходится использовать для того, чтобы

получить устойчивые параметры, позволяющие описать случайную по своему характеру взволнованную морскую поверхность; затем привлекаются ряды Фурье, дающие возможность разложить случайный процесс на гармонические компоненты, поведение каждой из которых можно проанализировать уже с помощью обычных классических гидродинамических теорий.

Недавний прогресс в значительной степени связан с развитием статистического анализа случайных шумов, с которым сталкиваются инженеры, работающие в области связи и коммуникаций. Изучение морских волн развивалось в виде сочетания анализа временных рядов и статистической геометрии, подчиняющейся законам гидродинамики. Настоящий раздел является введением в этот недетерминистический метод исследования волн, который подробнее будет изложен в главе XVIII. Будут рассмотрены вероятностные понятия и теория спектров.

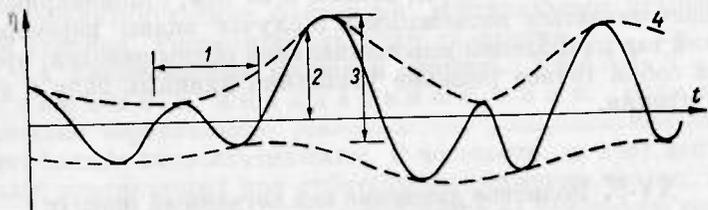


Рис. XV-19. Типичная запись морского волнения.
1 — волновой период; 2 — ордината поверхности; 3 — высота волны; 4 — огибающая.

XV-5.2. Некоторые определения и параметры стабильности. На рис. XV-19 приведена часть типичной записи волновых движений поверхности.

С помощью рисунка иллюстрируются такие понятия, как ордината поверхности, высота волны, период волны, максимум, минимум и огибающая. Рассмотрим некоторые статистические характеристики различных параметров, которые могут быть получены из такой волновой записи. Ясно, что если такая запись очень длинна, то сохранять ее в первоначальном виде было бы непрактичным. Неизбежно требуется метод, позволяющий «конденсировать» крупные особенности исследуемой кривой, хотя многие детали после такого процесса оказываются утраченными.

Такая обработка рельефа реальной морской поверхности должна давать результаты, обладающие свойством стабильности. Термин «стабильность» используется для описания характеристик, которые не слишком сильно изменяются, если обработке подвергнуть повторный ряд наблюдений. Например, предположим, что два регистратора волн расположены в открытом море на расстоянии, скажем, 200 футов друг от друга. Кривые колебаний уровня, зарегистрированные в этих двух точках за один и тот же интервал времени, будут совершенно различными. Сами записи колебаний морской поверх-

ности нестабильны. С другой стороны, такие величины, как средняя высота волны, среднее квадратическое отклонение поверхности от невозмущенного уровня и т. д., будут очень близки для обеих точек (если только продолжительность записи достаточно велика). Про такие статистические характеристики говорят, что они стабильны.

Было обнаружено, что плотность и распределение вероятности параметров морской поверхности, так же как спектральное (дисперсно-частотное) распределение этих параметров, являются компактными и полезными характеристиками реального процесса. Спектр представляет собой форму вероятностного распределения и обладает очень важными свойствами стабильности. Спектр сохраняет в себе очень значительную долю информации об амплитудах и «периодах» волн, но не удерживает никакой информации об их фазах. Распределение вероятности, с другой стороны, не сохраняет никакой информации о периодах, если определяется вероятность «высот» волн, и наоборот.

Описание состояния поверхности моря с помощью терминологии теории спектров уже нашло широкое применение среди кораблестроителей, помогая им учитывать воздействие волн на корпус судна с тем, чтобы предотвратить его деформацию. Спектральные и вероятностные понятия используются механиками, а также авиационными и морскими инженерами, связанными с проблемами вибрации. Во многих областях геофизики — в турбулентности, сейсмологии, анализе приливных явлений и т. д. — используются понятия теории связи для описания процессов и анализа данных наблюдений.

Сводка наиболее важных вероятностных распределений и описание спектрального способа представления морских волн, рассматриваемых как случайный процесс, будут приведены в главе XVIII.

XV-6. Замечания о теориях волн на воде

XV-6.1. Принципы классификации существующих теорий волн на воде. Суммируя все, что было изложено до сих пор, можно сказать, что с теоретической точки зрения волновые движения прежде всего распадаются на две большие категории — линейные и нелинейные — в зависимости от того, учитывается или нет конвективная инерция. Каждая из этих категорий может быть в свою очередь разделена на движения, где давление считается гидростатическим, и движения, где нельзя пренебрегать искривленностью потока. Наконец, движение может быть вихревым или безвихревым, а донное трение также может либо учитываться, либо не учитываться. Из-за ограниченности математических методов наиболее сложные случаи не могут быть проанализированы. Например, теории обладающих завихренностью нелинейных волн на мелкой воде, с учетом вертикального ускорения и донного трения, не существует.

XV-6.2. План дальнейшего рассмотрения волн на воде. Изложенные материалы о волнах на воде в настоящей книге является традиционным, т. е. из всего многообразия волн выделяются два больших семейства под названием волны малой амплитуды и длинные волны.

Следующая глава XVI полностью посвящена теории волн малой амплитуды. Рассматривается только безвихревое гармоническое движение без трения. Исследуются двумерное и трехмерное движения.

Глава XVII посвящена теории длинных волн и речному потоку. Сюда включен расчет кривых подпора как частный случай потока со свободной поверхностью. Даны также теории уединенных и моноклинальных волн. Таким образом, эта глава в существующей степени посвящена проблемам, связанным с реками и каналами.

Глава XVIII посвящена понятию волнового спектра, являющегося примером применения линейной теории к явлениям со случайными характеристиками.

УПРАЖНЕНИЯ

Рассмотрите прямолинейный берег с параллельными изобатами и периодический дуг волн, подходящий к самой глубокой изобате под углом α_0 . Покажите, что на любой изобате на основании закона рефракции волн мы имеем

$$\frac{\sin \alpha}{C} = \frac{\sin \alpha_0}{C_0} = \text{const.}$$

где C — скорость волн на данной изобате, α — угол между линией гребня и данной изобатой, а индексы «0» относятся к значениям этих величин на бесконечной глубине.

Глава XVI

ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

XVI-1. Основные уравнения и положения задачи о поверхностных волнах

XVI-1.1. Обозначения и условие неразрывности. Движение определяется относительно системы трех прямоугольных координат OX , OY , OZ . Ось OZ направлена вертикально вверх. Глубина считается постоянной и определяется выражением $z = -d$ (рис. XVI-1). Любая точка определяется тремя координатами x , y , z .

Силами вязкости пренебрегаем, и движение считается безвихревым, а жидкость — несжимаемой:

$$\text{curl } \mathbf{V} = 0, \text{ или } \zeta = \eta = \xi = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Эти допущения позволяют сделать некоторые упрощения.

Поскольку $\text{curl } \mathbf{V} = 0$, то существует однозначно определенный потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, от которого можно перейти к полю скорости. В II-5.3 говорилось, что потенциал скорости можно определять по желанию либо из соотношения $\mathbf{V} = \text{grad } \varphi$, либо из соотношения $\mathbf{V} = -\text{grad } \varphi$. Здесь мы используем второе соотношение, т. е. $u = -\partial\varphi/\partial x$, $v = -\partial\varphi/\partial y$, $w = -\partial\varphi/\partial z$ (см. XI-3). Потенциал скорости требуется найти из уравнения неразрывности, уравнения движения и граничных условий.

Уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{V} = 0$, выраженное через φ , имеет вид $\nabla^2 \varphi = 0$, или в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

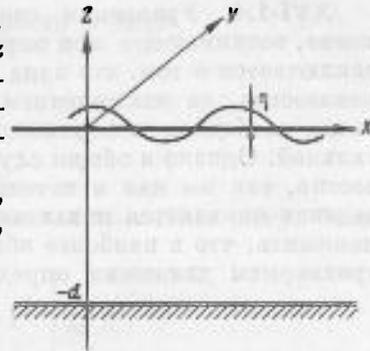


Рис. XVI-1. Обозначения.

XVI-1.2. Уравнение движения. Уравнение движения (уравнение импульсов) для безвихревого потока дается в форме уравнения Бернулли (см. X-2.4), которое при новом определении φ имеет вид

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

Локальная инерция
↑ Конвективная инерция
Давление
↑ Тяжесть

где $f(t)$ может зависеть только от t , но не от пространственных переменных. Так как поток безвихревой, то уравнение Бернулли справедливо для любой точки жидкости, а не только вдоль линий тока.

Это уравнение нелинейно из-за члена конвективной инерции, который, будучи выражен через потенциальную функцию, приобретает вид

$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Таким образом, волновое движение должно описываться нелинейным законом. Однако в случае очень медленного движения нелинейным членом можно пренебречь, и уравнение Бернулли запишется тогда в виде

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t).$$

Теории периодических гравитационных волн часто удовлетворяют условию медленного движения с довольно хорошей степенью точности. Соответствующие решения являются математически точными, если движение стремится к бесконечно малой величине.

XVI-1.3. Условия на твердых границах. На твердой границе скорость жидкости касательна к границе, т. е. нормальная компо-

нента V_n равна нулю. Другими словами, $\partial\varphi/\partial n = 0$. В частности, на горизонтальном дне имеем

$$w|_{z=d} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=d} = 0.$$

XVI-1.4. Уравнения свободной поверхности. Однако затруднение, возникающее при определении природы волнового движения, заключается в том, что одна из границ — свободная поверхность — неизвестна, за исключением случая бесконечно малых движений, когда свободная поверхность на первом этапе считается горизонтальной. Однако в общем случае форма свободной поверхности неизвестна, так же как и потенциал скорости φ . Поэтому в волновых задачах появляется новая неизвестная величина $z = \eta$. Если предположить, что в наиболее общем случае свободная поверхность при трехмерном движении определяется уравнением

$$z = \eta(x, y, t),$$

то полная производная от z по t будет

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Подставляя сюда значения

$$\frac{dx}{dt} = u = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{dy}{dt} = v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt} = w|_{z=\eta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=\eta},$$

получаем уравнение свободной поверхности в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=\eta} = -\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{z=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}|_{z=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Это уравнение является нелинейным и называется кинематическим уравнением. Другое уравнение — динамическое уравнение — получается из уравнения Бернулли, в котором давление p считается постоянным (и равным атмосферному давлению). Таким образом, динамическое условие для свободной поверхности имеет вид

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = f(t).$$

Мы видим, что, вообще говоря, величины φ и η должны представлять собой решение уравнения $\nabla^2\varphi = 0$ при двух одновременных нелинейных граничных условиях на свободной поверхности и линейном граничном условии на дне:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=d} = 0.$$

XVI-1.5. Условие на свободной поверхности в случае очень медленного движения. В случае медленного движения уравнение Бернулли

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

можно записать для свободной поверхности в виде

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{z=\eta} + g\eta = 0,$$

т. е.

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{z=\eta}.$$

при условии, что функция $f(t)$ и аддитивная константа могут быть включены в величину $\partial\varphi/\partial t$.

Поскольку движения предполагаются бесконечно малыми, то можно записать

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t}|_{z=0},$$

где $\eta \cong 0$. Это приближение ведет к погрешности того же порядка, что у погрешности для члена коактивной инерции, которой мы пренебрегли еще раньше.

Теперь рассмотрим кинематическое условие. Величины $\partial\eta/\partial x$ и $\partial\eta/\partial y$ представляют собой компоненты уклона свободной поверхности, и в случае медленного движения они малы (рис. XVI-2). Поэтому нелинейными членами $(\partial\varphi/\partial x)(\partial\eta/\partial x)$ и $(\partial\varphi/\partial y)(\partial\eta/\partial y)$ можно пренебречь. Тогда, приравнявая нормальную компоненту скорости на свободной поверхности к нормальной скорости самой поверхности, получим с достаточной степенью приближения

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=0}.$$

Теперь величину η можно без труда исключить из динамического и кинематического условий. Производная от η по t в кинематическом условии дает

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}|_{z=0}$$

и путем комбинации этого соотношения с предыдущим величина $\partial\eta/\partial t$ исключается, в результате чего получаем

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0.$$

Это так называемое условие Коши — Пуассона для свободной поверхности.

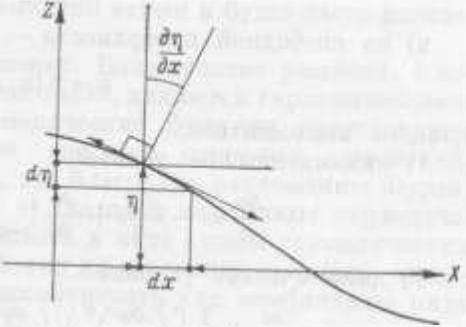


Рис. XVI-2. Обозначения.

XVI-1.6. Формулирование задачи поверхностных волн. XVI-1.6.1.
Итак, величины φ и η являются решениями системы следующих уравнений:

а) уравнения неразрывности —

$$\nabla^2 \varphi = 0 \begin{cases} -d \leq z \leq \eta(x, y, t), \\ -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty; \end{cases}$$

б) условия на твердой границе —

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

или на дне —

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0;$$

в) на свободной поверхности —

$$z = \eta(x, y, t),$$

должны выполняться:

1) кинематическое условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y};$$

2) динамическое условие

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0,$$

причем функция $f(t)$ теперь включена в $\partial \varphi / \partial t$. Однако даже в этом случае последнее выражение может быть отличным от нуля и равно некоторой заданной функции $f(x, y, t)$, если на свободной поверхности создается возмущение.

XVI-1.6.2. В случае медленного движения величину η можно исключить из обоих условий для свободной поверхности, в результате чего получаем простое условие Коши — Пуассона

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

Остается только одна подлежащая определению величина которую надо найти из уравнений:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \begin{cases} -d \leq z \leq \eta = 0, \\ -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0 \text{ и } \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

XVI-1.6.3. При определении решения системы уравнений, приведенной в XVI-1.6.1, мы по-прежнему сталкиваемся с затруднениями. Во-первых, уравнения нелинейны, и, во-вторых, свободная

поверхность неизвестна и изменяется во времени. Поэтому необходимо упростить теорию с помощью допущений, основанных на физических фактах. Мы уже видели, что первое допущение состоит в пренебрежении квадратичными членами, что позволяет получить систему линейных уравнений. Второе допущение для нелинейной теории заключается в предположении, что решение может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда.

XVI-1.7. Принцип суперпозиции. Если все уравнения однородны и линейны, т. е. если функция φ и все ее производные нигде не встречаются в каких-либо степенях, кроме первой, то принцип суперпозиции гласит, что суммирование любого числа частных решений дает новые функции, также являющиеся решениями (см. II-5). Например, если φ_1 и φ_2 — два отдельных решения, то сумма $a\varphi_1 + b\varphi_2$ также является решением, причем a и b — произвольные константы.

Этот основной принцип чрезвычайно важен и будет часто использоваться в дальнейшем.

XVI-1.8. Гармоническое движение. Большинство решений, с которыми мы будем иметь дело в этой главе, являются гармоническими. Это объясняется тем, что гармонические функции представляют собой совершенно естественные решения основных уравнений. Кроме того, это связано и с тем, что благодаря разложению Фурье очень многие функции, особенно те, которые описывают периодические движения, можно рассматривать в виде суммы гармонических компонент (см. главу XVIII). Поэтому на основании принципа суперпозиции любую волну можно рассматривать как комбинацию ряда гармонических волн.

Решение для $\varphi(x, y, z, t)$ обычно имеет вид $\varphi = f(x, y, z) \cos(kt + \epsilon)$, где $k = 2\pi/T$, а T — период волны. Поскольку

$$e^{i(kl + \epsilon)} = \cos(kt + \epsilon) + i \sin(kt + \epsilon),$$

то можно записать выражение для φ в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} f(x, y, z) e^{i(kl + \epsilon)},$$

где Re означает вещественную часть комплексной величины, а ϵ — фаза величины φ в начальный момент (при $t = 0$). В дальнейшем мы будем опускать обозначение Re , имея в виду, что рассматривается только вещественная часть математических выражений.

Подставляя это выражение для φ в условие на свободной поверхности

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

получим

$$\left(\frac{k^2}{g} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = 0.$$

XVI-1.9. Метод разделения переменных. Основное уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ можно решить с помощью метода разделения переменных, который основан на предположении, что решение для φ можно представить в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Исходя из физических соображений, можно ожидать, что решение для φ будет представлять собой произведение функций от горизонтальных координат $U(x, y)$, от вертикальной координаты $P(z)$ и от времени $f(t)$

$$\varphi = U(x, y) P(z) f(t).$$

Подставляя это выражение для потенциала скорости в уравнение неразрывности $\nabla^2 \varphi = 0$ и затем деля все на φ , получаем

$$-\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}{U(x, y)} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \frac{1}{P(z)},$$

или

$$-\frac{\nabla^2 U}{U} = \frac{P''}{P}$$

Надо сказать, что с самого начала нельзя было с уверенностью утверждать, что такое разделение переменных, какое сейчас было проделано, вообще окажется возможным. В дальнейшем, однако, будет показано, что эта операция может быть осуществлена. Только тогда, строго говоря, мы можем быть уверены в том, что решения данного дифференциального уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$ будут существовать в указанной выше форме.

Правая часть полученного уравнения является функцией от z . Левая часть является функцией от x и y . Поскольку x и y изменяются независимо от z и наоборот, то обе части будут всегда равны друг другу (это требование следует из самого смысла уравнения) только в том случае, если каждая из них равна одной и той же постоянной величине m^2 , где m может быть либо вещественной, либо мнимой величиной.

Легко можно показать, что если величина m будет мнимой, то решение не имеет смысла в случае волнового движения. Поэтому величина m должна быть вещественной, а величина m^2 , следовательно, всегда положительна.

Тогда уравнение

$$\frac{P''}{P} = -\frac{\nabla^2 U}{U} = m^2$$

сводится к

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - m^2 P(z) = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + m^2 U(x, y) = 0.$$

Эти уравнения можно записать в более компактной форме:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right) P = 0,$$

$$(\nabla^2 + m^2) U = 0.$$

Последнее уравнение является хорошо известным в математической физике уравнением Гельмгольца.

XVI-2. Вертикальная составляющая волнового движения

XVI-2.1. Интегрирование вдоль вертикали. Уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\right) P = 0$$

можно без труда проинтегрировать. Характеристическое уравнение будет $r^2 - m^2 = 0$, т. е. $r = \pm m$, откуда получаем общее решение

$$P = Ae^{mz} + Be^{-mz},$$

где A и B — два постоянных множителя. Граничное условие на дне

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=d} = 0$$

дает для любого фиксированного значения x, y и t

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=d} = 0,$$

поскольку P пропорциональна φ . Подставляя сюда полученное выше значение величины P , получаем

$$mAe^{-md} - mBe^{+md} = 0.$$

Отсюда

$$Ae^{-md} = Be^{+md}.$$

Положим, что

$$Ae^{-md} = Be^{+md} = \frac{1}{2} D.$$

Тогда

$$P = \frac{D}{2} (e^{m(z+d)} + e^{-m(z+d)}) = D \operatorname{ch} m(z+d).$$

Подставляя это значение P в выражение для φ , получаем

$$\varphi = D \operatorname{ch} m(d+z) U(x, y) f(t).$$

XVI-2.2. Введение граничного условия для свободной поверхности. Решение для $f(t)$ получаем из условия Коши — Пуассона для свободной поверхности

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=0} = 0.$$

Подставляя сюда полученное выше выражение для φ при $z = 0$ и деля все на φ , получаем

$$\frac{f''}{f} = -g \left(\frac{P'}{P}\right)_{z=0} = -gm \operatorname{th} md.$$

Если мы обозначим $gm \operatorname{th} md$ через k^2 , то можно записать

$$f'' + k^2 f = 0.$$

Из характеристического уравнения $r^2 + k^2 = 0$ находим, что $r = \pm ik$. Отсюда

$$f = \alpha e^{ikt} + \beta e^{-ikt},$$

где α и β — постоянные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Оказывается, что величина k имеет физический смысл частоты, т. е. $k = 2\pi/T$, где T — период волны. При $\beta = 0$, если коэффициент α объединить с D , получаем

$$\varphi = D \operatorname{ch} m(d+z) U(x, y) e^{i(k t + \varepsilon)}.$$

Поскольку существует бесконечное (хотя и дискретное) число комбинаций значений k_n и m_n , для которых удовлетворяется уравнение

$$k_n^2 = m_n g \operatorname{th} m_n d,$$

то общее решение для φ можно теперь записать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{ch} m_n(d+z) U_n(x, y) e^{i(k_n t + \varepsilon_n)}.$$

При рассмотрении только одной монохроматической волны удобно выразить множитель D как функцию от высоты волны $2a$. Из динамического условия для свободной поверхности

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

получаем

$$\eta = \frac{ikD}{g} \operatorname{ch} md U(x, y) e^{i(k t + \varepsilon)}$$

или

$$\eta = -\frac{kD}{g} \operatorname{ch} md U(x, y) \sin(k t + \varepsilon).$$

Выражения для φ и η станут более удобными для использования, если обозначить амплитуду величины η через aU . Тогда

$$a = -\frac{kD}{g} \operatorname{ch} md.$$

Отсюда

$$D = -\frac{ia g}{k} \frac{1}{\operatorname{ch} md}$$

и

$$\varphi = -\frac{ia g}{k} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{ch} md} U(x, y) e^{i(k t + \varepsilon)}.$$

Используя соотношение $k^2 = mg \operatorname{th} md$, получаем

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} U(x, y) e^{i(k t + \varepsilon)}.$$

Функция $P(z)$, которая независима от x , y и t , определится выражением

$$P(z) = -\frac{ak}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} = -\frac{ag}{k} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{ch} md}.$$

При этих условиях высота волны в любой точке равна $2aU(x, y)$. Функция $U(x, y)$ представляет собой отношение высоты волны в произвольной точке к высоте волны в точке, где эта высота равна просто $2a$.

XVI-3. Двухмерное волновое движение. Линейное решение

XVI-3.1. Волновое уравнение. Теперь исследуем дифференциальное волновое уравнение

$$(\nabla^2 + m^2) U = 0.$$

Общего решения этого уравнения не существует, но можно найти целый ряд решений, удовлетворяющих некоторым частным граничным условиям. Мы рассмотрим некоторые фундаментальные решения, представляющие особый интерес и соответствующие простым частным случаям.

Интересно отметить, что такое же уравнение описывает и звуковые волны:

$$(\nabla^2 + m^2) p = 0,$$

где p — давление, а также электромагнитные волны:

$$(\nabla^2 + m^2) \mathbf{E} = 0,$$

где \mathbf{E} — вектор электрического поля. Последнее уравнение является векторным и идентично следующим трем уравнениям:

$$(\nabla^2 + m^2) E_x = 0, \quad (\nabla^2 + m^2) E_y = 0, \quad (\nabla^2 + m^2) E_z = 0,$$

где E_x , E_y и E_z — три компоненты вектора \mathbf{E} . Отсюда понятно, что многие математические решения могут быть найдены в других областях физики и лишь затем приложены к вопросам гидродинамики.

XVI-3.2. Интегрирование волнового уравнения. В случае двухмерной (плоской) волны, наблюдаемой, например, в волновом лотке, мы будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

и волновое уравнение сводится к

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) U = 0.$$

Характеристическое уравнение будет

$$r^2 + m^2 = 0, \text{ откуда } r = \mp im.$$

Тогда решение для U дается линейной комбинацией величин e^{-imx} и e^{imx} :

$$U = A' e^{imx} + B' e^{-imx}.$$

В частности, если $U = e^{-imx}$, то

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} e^{i(kt-mx+\varepsilon)},$$

или

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} \cos(kt - mx + \varepsilon).$$

Это потенциал скорости для прогрессивной волны, перемещающейся в направлении оси OX .

Если $U = e^{imx}$, то мы получим потенциал скорости для прогрессивной волны, перемещающейся в противоположном направлении.

Если решение для U имеет вид

$$U = \frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx}) = \cos mx,$$

или

$$U = \frac{1}{2i}(e^{imx} - e^{-imx}) = \sin mx,$$

то

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} mx \cos(kt + \varepsilon).$$

Мы получили потенциал скорости для стоячей волны, или толчеи. Если $A' \neq B'$, то получим прогрессивно-стоячую волну. На практике величины A' и B' определяются из граничных условий (условия отражения волны и др.).

В наиболее общем случае двумерного нерегулярного волнения, наблюдаемого в природных условиях на море, потенциал скорости φ можно записать в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \frac{k_n}{m_n} \frac{\operatorname{ch} m_n(d+z)}{\operatorname{sh} m_n d} e^{-im_n x} e^{i(k_n t + \varepsilon_n)}.$$

Если имеются только две волны, движущиеся в одинаковом направлении, то легко можно получить выражение для потенциала скорости, описывающее явление «биений».

XVI-3.3. Физический смысл. Длина волны. Теперь легко представить себе физический смысл коэффициента m : поскольку φ , а следовательно, и η являются периодическими в пространстве, то $m = 2\pi/L$, где L — длина волны.

Таким образом, длина волны определяется соотношением

$$k^2 = mg \operatorname{th} md,$$

или

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{2\pi}{L} g \operatorname{th} \frac{2\pi}{L} d.$$

Следовательно,

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L},$$

и тогда скорость волны

$$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L}.$$

В частности, когда отношение d/L мало (мелкая вода), получим:

$$\operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} \cong \frac{2\pi d}{L} \text{ и } L = T \sqrt{gd}; \quad C = \sqrt{gd}.$$

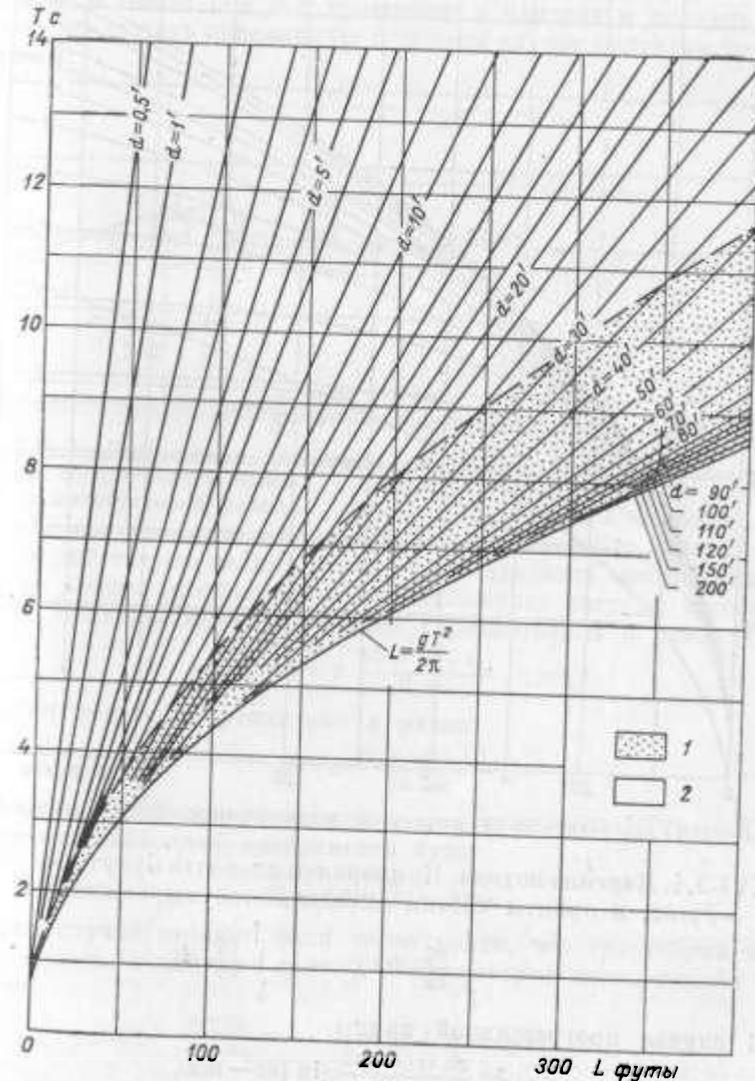


Рис. XVI-3. Зависимость между длиной волны и периодом. 1 — область, где справедливо соотношение $L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L}$; 2 — область, где справедливо соотношение $L \cong T \sqrt{gd}$.

Если отношение d/L велико (глубокая вода), то

$$\operatorname{th} \frac{2\pi d}{L} \cong 1 \text{ и } L = \frac{gT^2}{2\pi}; \quad C = \frac{gT}{2\pi}.$$

Зависимость величин L и C от глубины d и периода волны T изображена на двух номограммах (рис. XVI-3 и XVI-4).

C фут/с

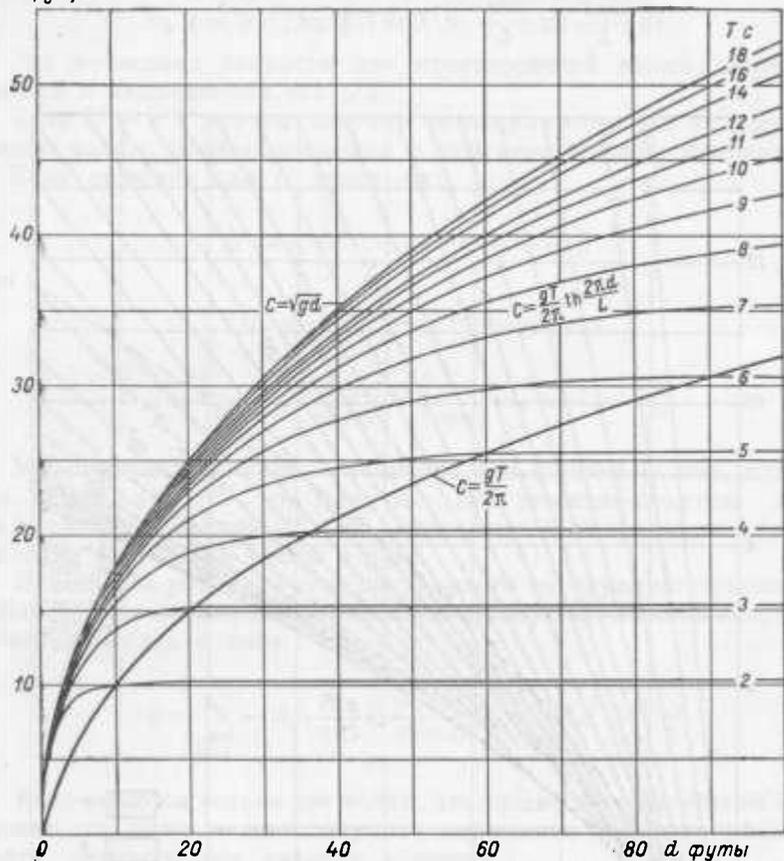


Рис. XVI-4. Зависимость между скоростью волны и глубиной воды.

XVI-3.4. Картина потока. Компоненты скорости будут $u = -\partial\phi/\partial x$, $w = -\partial\phi/\partial z$, и орбиты частиц определяются выражениями

$$x = - \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x} dt, \quad z = - \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial z} dt.$$

В случае прогрессивной волны

$$u = ka \frac{\operatorname{ch} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} \sin(kt - mx),$$

$$w = ka \frac{\operatorname{sh} m(d+z)}{\operatorname{sh} md} \cos(kt - mx).$$

Форму орбит можно найти, предполагая, что отклонения от фиксированной точки x_0, z_0 невелики, так что при интегрировании можно считать x и z постоянными. Тогда

$$x = x_0 - a \frac{\operatorname{ch} m(d+z_0)}{\operatorname{sh} md} \cos(kt - mx_0)$$

$$z = z_0 + a \frac{\operatorname{sh} m(d+z_0)}{\operatorname{sh} md} \sin(kt - mx_0).$$

Если возвести оба эти уравнения в квадрат и сложить их, то можно исключить переменную t . В этом случае получаем уравнение эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2} + \frac{(z-z_0)^2}{B^2} = 1.$$

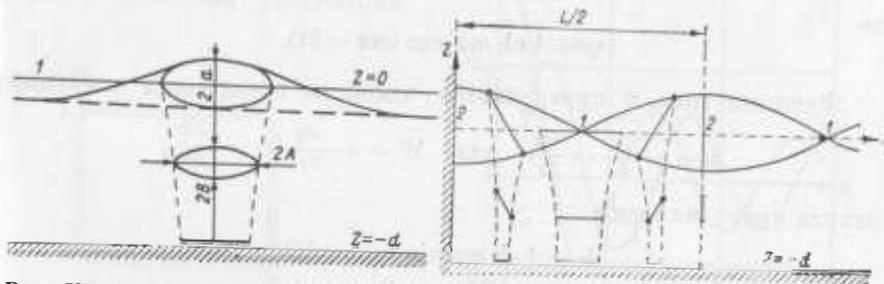


Рис. XVI-5. Движение в двухмерной прогрессивной волне.

Рис. XVI-6. Движение в стоячей волне (толще).

1 — невозмущенный уровень.

1 — узел; 2 — пучность.

Как мы теперь видим, точка x_0, z_0 является центром эллипса, т. е. ее можно рассматривать как положение частицы в состоянии покоя. Большая полуось эллипса горизонтальна и равна

$$A = a \frac{\operatorname{ch} m(d+z_0)}{\operatorname{sh} md},$$

а малая полуось вертикальна и равна

$$B = a \frac{\operatorname{sh} m(d+z_0)}{\operatorname{sh} md}.$$

На свободной поверхности $B = a$, а у дна $B = 0$ (рис. XVI-5). Уравнение свободной поверхности будет

$$\eta = a \sin(kt - mx).$$

Для случая стоячих волн легко найти, что траектории частиц будут прямыми линиями (рис. XVI-6), которые определяются выражением

$$\frac{z-z_0}{x-x_0} = - \operatorname{th} m(d+z_0) \operatorname{ctg} mx_0,$$

или

$$\frac{z-z_0}{x-x_0} = + \operatorname{th} m(d+z_0) \operatorname{tg} mx_0.$$

XVI-3.5. Употребление выражений с комплексными числами. Чтобы показать, насколько упрощаются все преобразования при использовании комплексного выражения $W = \varphi + i\psi$, мы проведем вычисление величины W для случая двумерной монохроматической прогрессивной волны с первым порядком приближения.

Прежде всего будет удобно изменить начало отсчета вдоль вертикальной оси и поместить горизонтальную ось на дне, так что вертикальной координатой будет $z' = d + z$. При этом новом условии потенциал скорости будет иметь вид

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } mz'}{\text{sh } md} \cos(mx - kt),$$

или, если положить

$$A = -a \frac{k}{m} \frac{1}{\text{sh } md},$$

то

$$\varphi = A \text{ch } mz' \cos(mx - kt).$$

Функция тока ψ определяется одной из следующих операций:

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z'} \quad \text{или} \quad W = -\frac{\partial \varphi}{\partial z'} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

откуда сразу находим

$$\psi = A \text{sh } mz' \sin(mx - kt).$$

Тогда

$$W = \varphi + i\psi = A [\text{ch } mz' \cos(mx - kt) + i \text{sh } mz' \sin(mx - kt)].$$

Используя соотношения

$$\text{ch } mz' = \cos imz', \quad \text{sh } mz' = -i \sin imz'$$

и подставляя их в выражение для W , получаем

$$W = A [\cos imz' \cos(mx - kt) + \sin imz' \sin(mx - kt)],$$

т. е.

$$W = A \cos(mx - imz' - kt).$$

Вводя сюда комплексное число $Z = x - iz'$, получаем очень простое соотношение

$$W = \varphi + i\psi = A \cos(mZ - kt).$$

Потенциальная функция скорости φ дается вещественной частью выражения для W , а функция тока ψ — его мнимой частью.

Аналогично, для стоячей волны выражение для W будет иметь вид

$$W = 2A \sin mZ \cos kt,$$

или

$$W = 2A \cos mZ \cos kt.$$

XVI-4. Трехмерное волновое движение

XVI-4.1. Трехмерное волновое движение в прямоугольном бассейне. Используя тот же метод разделения переменных для решения уравнения, описывающего трехмерное движение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2 \right) U = 0,$$

находим, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + p^2 U = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + q^2 U = 0,$$

где p и q — вещественные или комплексные константы, так что $m^2 = p^2 + q^2$.

В качестве примера трехмерного движения рассмотрим

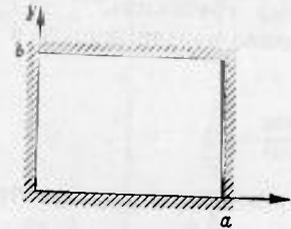


Рис. XVI-7. Прямоугольный бассейн.

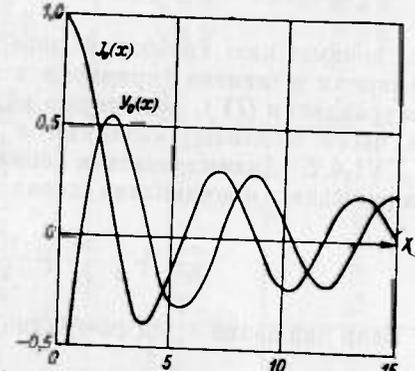


Рис. XVI-8. Функции Бесселя первого порядка.

случай стоячей волны в прямоугольном бассейне (рис. XVI-7). Граничные условия будут:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{для} \quad \begin{cases} x=0, a, \\ y=0, b. \end{cases}$$

Легко можно показать, что решение уравнения

$$(\nabla^2 + m^2) U = 0$$

будет иметь вид

$$U = \cos \frac{r\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b},$$

где $p = r\pi/a$, $q = s\pi/b$, а r и s являются целыми числами. Также нетрудно показать, что решение уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$ будет

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{sh } md} \cos \frac{r\pi x}{a} \cos \frac{s\pi y}{b}.$$

Общее решение можно записать в виде

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} -a_n \frac{k_n}{m_n} \frac{\text{ch } m_n(d+z)}{\text{sh } m_n d} \cos \frac{r_i \pi x}{a} \cos \frac{s_j \pi y}{b},$$

где

$$k_n^2 = m_n g \text{th } m_n d \quad \text{и} \quad p_i^2 + q_j^2 = m_n^2.$$

В этом месте надо сделать одно замечание относительно кривизны свободной поверхности. Уравнение двухмерного движения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right)U = 0$$

показывает, что кривизна свободной поверхности пропорциональна возвышению свободной поверхности η , поскольку $\eta = aU$. Таким образом, форма свободной поверхности описывается синусоидальной кривой. В случае же трехмерного движения мы имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + m^2\right)U = 0,$$

т. е. возвышению свободной поверхности теперь пропорциональна суммарная кривизна (кривизна в направлении OX плюс кривизна в направлении OY). Некоторые виды трехмерного волнового движения часто называют «волнами с короткими гребнями».

XVI-4.2. **Цилиндрическая волна.** Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Если движение осесимметрично, то $\partial^2 \varphi / \partial \theta^2 = 0$, и решение будет

$$\varphi = U(r)P(z)e^{i(ht+\epsilon)}.$$

Волновое уравнение $(\nabla^2 + m^2)U = 0$ для цилиндрических волн приобретает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m^2\right)U = 0,$$

т. е. представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка. Решения для U даются в виде любых линейных комбинаций функций $H_0^{(1)}(mr)$ и $H_0^{(2)}(mr)$ или в виде любых линейных комбинаций функций $J_0(mr)$ и $Y_0(mr)$. На рис. XVI-8 и в приводимой ниже таблице приведены величины для функций J_0 и Y_0 и соотношения между всеми четырьмя функциями. Их физический смысл помогает понять аналогия с синусоидальными функциями. Если величина mr становится очень большой, то можно показать, что $H_0^{(1)}(mr) \approx Ae^{iB}$, $H_0^{(2)}(mr) \approx Ae^{-iB}$, $J_0(mr) \approx A \cos B$, $Y_0(mr) \approx A \sin B$, причем $A = \sqrt{2/(\pi mr)}$, $B = (mr - \pi/4)$.

В двухмерном движении A заменяется через a , а B — через $(mx + \epsilon)$.

Мы видим, что высота волны, которая определяется амплитудой величины U , пропорциональна величине A . Она убывает с расстоянием от центра как $r^{-1/2}$. Эта закономерность следует также из условия сохранения количества переносимой энергии (см. XVI-6).

Двухмерные волны	Круговые волны
$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right)U = 0$	$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + m^2\right)U = 0$
$e^{i(mx + \epsilon)} = \cos mx - i \sin mx$	$H_0^{(1)}(mr) = J_0 + iY_0$
$e^{-i(mx + \epsilon)} = \cos mx + i \sin mx$	$H_0^{(2)}(mr) = J_0 - iY_0$
$\cos mx = \frac{e^{i(mx + \epsilon)} + e^{-i(mx + \epsilon)}}{2}$	$J_0(mr) = \frac{H_0^{(1)} + H_0^{(2)}}{2}$
$\sin mx = \frac{e^{i(mx + \epsilon)} - e^{-i(mx + \epsilon)}}{2i}$	$Y_0(mr) = \frac{H_0^{(1)} - H_0^{(2)}}{2i}$
Прогрессивная волна в положительном направлении оси Ox (высота волны постоянна)	Волна, сходящаяся к центру («сток энергии») (высота волны увеличивается с уменьшением r)
Прогрессивная волна в отрицательном направлении оси Ox (высота волны постоянна)	Волна, расходящаяся от центра («источник энергии») (высота волны уменьшается с увеличением r)
Стоячая волна (толчен) (горизонтальная скорость частиц равна нулю при $x=0$)	Стоячая круговая волна (горизонтальная скорость частиц равна нулю при $r=0$)
Стоячая волна (толчен) (горизонтальная скорость частиц максимальна при $x=0$)	Стоячая круговая волна (горизонтальная скорость частиц бесконечна при $r=0$)

XVI-4.3. Возбуждение волны в круглом бассейне. Граничное условие для круглого бассейна будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \text{ или } \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0.$$

где R — радиус бассейна. Можно показать, что решение для U имеет вид

$$U = J_n(mr) \cos n\theta,$$

где J_n — функция Бесселя n -го порядка. Если $n = 0$, то $U = J_0(mr)$, и движение представляет собой стоячую круговую волну.

XVI-5. Нелинейная теория волн

XVI-5.1. Общий порядок вычислений. Предполагается, что две неизвестные функции, потенциал скорости φ и возвышение свободной поверхности η могут быть представлены в виде степенных рядов, полученных разложением по произвольному параметру a , имеющему размерность длины. Обычно в качестве параметра a берут половину высоты волны.

Итак, предполагается, что имеют силу следующие соотношения:

$$\varphi = a\varphi_1 + a^2\varphi_2 + a^3\varphi_3 + \dots + a^n\varphi_n + \dots,$$

$$\eta = a\eta_1 + a^2\eta_2 + a^3\eta_3 + \dots + a^n\eta_n + \dots$$

Подставляя указанное выражение для φ в уравнение неразрывности $\nabla^2 \varphi = 0$, мы видим, что каждый из членов φ_n является независимым решением уравнения Лапласа $\nabla^2 \varphi_n = 0$. Каждая функция φ_n также удовлетворяет граничному условию на твердой границе $\partial \varphi_n / \partial n = 0$ и условию на свободной поверхности.

XVI-5.2. Условия на свободной поверхности. Условия на свободной поверхности выражаются через величины, относящиеся к невозмущенному уровню ($z = 0$). Разлагая функцию $\varphi(x, y, 0 + \eta, t)$ в ряд по степеням η , получаем

$$\varphi(x, y, \eta, t) = \varphi(x, y, 0, t) + \eta \left[\frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial z} \right] + \dots,$$

или

$$[\varphi]_{z=\eta} = [\varphi]_{z=0} + \eta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]_{z=0} + \dots$$

Подставляя это выражение для φ в условия для свободной поверхности, приведенные в XVI-4.4, получаем для кинематического условия

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right] = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right] + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right]$$

и для динамического условия

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right] + \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots \right) \right\}^2 \right] + g\eta = 0.$$

Теперь задача полностью сформулирована: подстановка выражений для φ и η , полученных в XVI-5.1, в приведенные выше условия для свободной поверхности позволяет выполнить необходимые вычисления.

XVI-5.3. Метод решений. Полученные соотношения должны быть справедливы для любой величины a , поскольку a выбирается произвольно. Группируя члены с одинаковыми степенями a , получаем

$$a \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right) + a^2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \right) + a^3 (\dots) + \dots = 0$$

и

$$a \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\eta_1 \right) + a^2 \left(g\eta_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \right) \dots$$

Это ведет к следующим соотношениям, которые не зависят от величины a :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \frac{\partial \eta_n}{\partial t} = f(\varphi_{n-1}, \eta_{n-1})$$

и

$$-\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + g\eta_1 = 0,$$

$$-\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - g\eta_2 - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] = 0,$$

$$-\frac{\partial \eta_n}{\partial t} + g\eta_n = f'(\varphi_{n-1}, \eta_{n-1}).$$

Эти уравнения объединяют в пары и решают относительно $\varphi_n|_{z=0}$ и η_n , зная перед этим $\varphi_{n-1}|_{z=0}$ и η_{n-1} и используя уравнения

$\Delta^2 \varphi_n = 0$ и $\partial \varphi_n / \partial z |_{z=-d} = 0$. Например, исключая η из двух первых уравнений, линейных относительно a , получаем

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

Полученное выражение можно сравнить с условием Коши — Пуассона, полученным ранее. Тогда линейное движение будет определяться соотношениями $\varphi = a\varphi_1$ и $\eta = a\eta_1$.

На практике исследование нелинейных задач требует очень длительных и трудоемких вычислений. Иногда в случае двухмерного движения их можно сократить, вводя функцию

$$W = \varphi + i\psi,$$

где ψ — функция тока, а $i = \sqrt{-1}$.

XVI-5.4. Уравнение Бернулли и принцип Рэлея. В случае периодической прогрессивной волны, движущейся в направлении OX со скоростью C , общее решение для φ будет

$$\varphi = P(z) F(x - Ct),$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = -CP(z) F'(x - Ct)$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(z) F'(x - Ct).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = C \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Cu.$$

Вводя эти выражения, мы видим, что уравнение Бернулли в случае прогрессивной волны приобретает вид

$$-Cu + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = 0,$$

или после некоторых элементарных преобразований можно записать

$$\left[C^2 - 2Cu + u^2 + w^2 + \frac{2p}{\rho} + 2gz = C^2. \right]$$

Так как C^2 и p являются постоянными на свободной поверхности, то динамическое условие для свободной поверхности после деления на C^2 приобретает вид

$$\left(\frac{u-C}{C} \right)^2 + \frac{w^2}{C^2} + \frac{2g\eta}{C^2} = \text{const.}$$

Константу можно выбрать равной единице. Мы видим, что движение можно рассматривать как стационарное, если выбрать новую систему относительных координат. В этой новой системе координат начало оси OX перемещается со скоростью волны C . Это и есть принцип Рэлея.

XVI-6. Поток энергии и групповая скорость

XVI-6.1. Поток энергии. Средний поток энергии на единицу длины гребня волны, проходящий через фиксированную вертикальную поверхность, параллельную гребню, равен

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^{\eta} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gz \right) u dz dt,$$

или, если использовать уравнение Бернулли, в котором $f(t)$ предполагается включенной в $\partial \varphi / \partial t$,

$$F_{cp} = -\rho \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz dt.$$

Эта формула является общей, и в нее можно подставлять выражения потенциала скорости φ для любого безвихревого волнового движения, линейного либо нелинейного. В случае линейной периодической прогрессивной волны (см. XVI-3.2) имеем

$$\varphi = -a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{sh } md} \cos(kt - mx).$$

Подставляя это значение φ в приведенное выше выражение для потока энергии, получим

$$F_{cp} = \rho \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^{\eta} a^2 \frac{k^3}{m} \frac{\text{ch}^2 m(d+z)}{\text{sh}^2 md} \sin^2(kt - mx) dz dt,$$

откуда, интегрируя и пренебрегая некоторыми членами высших порядков, находим

$$F_{cp} = \frac{1}{4} \rho g a^2 C \left(1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md} \right),$$

что в случае глубокой воды ведет к выражению

$$F_{cp} |_{d \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{gT}{2\pi},$$

а в случае мелкой воды — к выражению

$$F_{cp} |_{d \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \sqrt{gd}.$$

XVI-6.2. Энергия, приходящаяся на длину волны, и скорость распространения энергии. Энергия, содержащаяся в объеме жидкости, ограниченном единицей длины вдоль гребня, полной длиной волны вдоль направления движения волны и расстоянием от свободной поверхности до дна по вертикали, равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \rho \int_{-d}^{x+L} \int_{-d}^{\eta} \left[\frac{1}{2} V^2 + gz \right] dz dx.$$

Подставляя сюда выражение

$$V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2$$

и пренебрегая некоторыми членами высших порядков, находим, что в случае простой линейной периодической прогрессивной волны потенциальная энергия E_P равна кинетической энергии E_K , а полная энергия указанного объема жидкости равна

$$E = E_P + E_K = \frac{1}{2} \rho g a^2 L.$$

Эта энергия на единицу длины в направлении распространения волны равна в среднем

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho g a^2.$$

Поделив величину потока энергии на величину энергии, содержащейся в столбе воды единичного поперечного сечения, получим скорость распространения энергии

$$U_E = \frac{F_{\text{ср}}}{E_{\text{ср}}} = \frac{1}{2} C \left[1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md} \right],$$

т. е. $U_E = \frac{1}{2} gT/(2\pi)$ на глубокой воде и $U_E = \sqrt{gd}$ на мелкой воде. Это означает, что на глубокой воде энергия распространяется вдвое медленнее самой волны, а на мелкой воде — со скоростью самой волны.

XVI-6.3. Групповая скорость. Рассмотрим линейную суперпозицию двух прогрессивных волн одинаковой амплитуды и слегка различающихся периодов:

$$\eta = a \sin(mx - kt) + a \sin[(m + \delta m)x - (k + \delta k)t],$$

где δm и δk будем считать малыми величинами. Это выражение можно переписать в виде

$$\eta = 2a \cos \frac{1}{2}(\delta mx - \delta kt) \sin \left[\left(m + \frac{\delta m}{2}\right)x - \left(k + \frac{\delta k}{2}\right)t \right],$$

и, поскольку δm и δk малы, то

$$\eta \cong 2a \cos \frac{1}{2}(\delta mx - \delta kt) \sin(mx - kt).$$

Результат показывает, что мы имеем волну $2a \sin(mx - kt)$, модулированную членом

$$\cos \frac{1}{2}(\delta mx - \delta kt) = \cos \frac{1}{2} \delta m \left(x - \frac{\delta k}{\delta m} t\right),$$

который в свою очередь представляет волну, перемещающуюся со скоростью $U = \delta k/(\delta m)$. Поскольку скорость волны $C = k/m$, то $\delta k = \delta(mC)$ и отсюда $U = \delta(mC)/(\delta m)$, т. е. в пределе, когда δm стремится к бесконечно малой величине dm , мы получаем (заменив, кроме того, m на $2\pi/L$):

$$U = \frac{d(mC)}{dm} = C - L \frac{dC}{dL}.$$

Подставляя сюда величины $C = (gT/2\pi) \text{th}(2\pi d/L)$ и $L = CT$, находим, что

$$U = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md} \right).$$

Интересно отметить, что это выражение совпадает с выражением для скорости распространения энергии U_E . Это вытекает из того факта, что в случае, когда мы имеем дуг волн, состоящий из отдельных групп, разделенных «узловыми» точками, где амплитуда волн равна нулю, энергия не проходит через эти узловые точки. Таким образом, скорость распространения энергии определяется скоростью

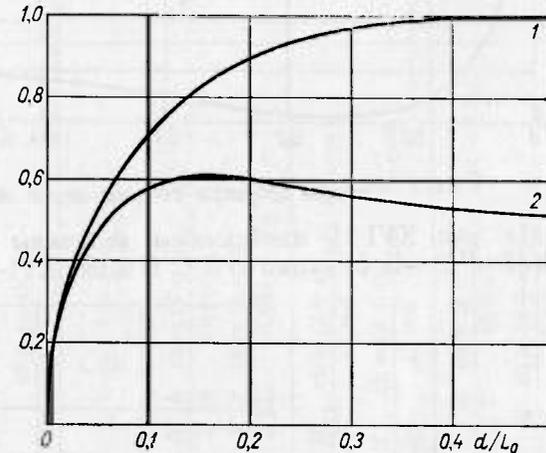


Рис. XVI-9. Зависимость относительной скорости волны и относительной групповой скорости от глубины.
1 — отношение C/C_0 ; 2 — отношение U/C_0 .

перемещения групп, или групповой скоростью. Групповая скорость и скорость распространения энергии равны друг другу. Важно подчеркнуть, однако, что это правило справедливо только в случае линейных волн. Величины U/C_0 и C/C_0 , где C_0 — скорость волны на глубокой воде ($C_0 = gT/(2\pi)$), показаны на рис. XVI-9.

XVI-6.4. Выход волн на мелководье. В случае когда волна распространяется над очень пологим уклоном дна, считается, что волновое движение остается таким же, как если бы дно было горизонтальным. Другими словами, деформацией картины потока, обусловленной наклоном дна, пренебрегают. Далее предполагают, что поток энергии в такой волне остается постоянным, а отсюда следует, что высоту волны $2a$ на данной глубине d можно определить как функцию от высоты волны $2a_0$ на глубокой воде с помощью формулы

$$F_{\text{ср}}|_d = F_{\text{ср}}|_{d \rightarrow \infty}$$

т. е.

$$\frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{g}{k} \text{th } md \left(1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md} \right) = \frac{1}{4} \rho g a_0^2 \frac{g}{k},$$

откуда

$$\frac{2a}{2a_0} = \frac{H}{H_0} = \frac{1}{\left[\text{th } md \left(1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md} \right) \right]^{1/2}},$$

Используя выражение

$$\frac{L}{L_0} = \text{th} \frac{2\pi d}{L}$$

где $L_0 = gT^2/(2\pi)$ — длина волны на глубокой воде, можно рассчитать величину отношения H/H_0 в виде функции только от d/L_0 . Результат таких вычислений представлен на рис. XVI-10.

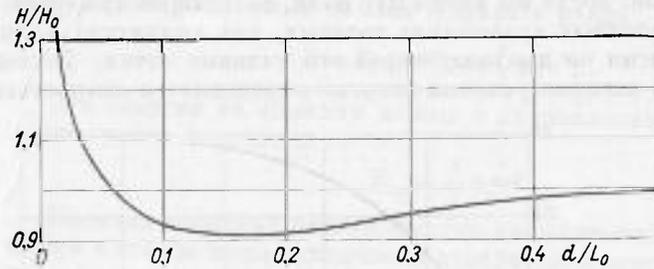


Рис. XVI-10. Зависимость относительной высоты волны от глубины.

XVI-7. Сводка формул теории волн малой амплитуды

На рис. XVI-11 изображены величины $\text{sh}(2\pi d/L)$, $\text{ch}(2\pi d/L)$ и $\text{th}(2\pi d/L)$ как функции от d/L . В табл. XVI-1 и XVI-2 представлена

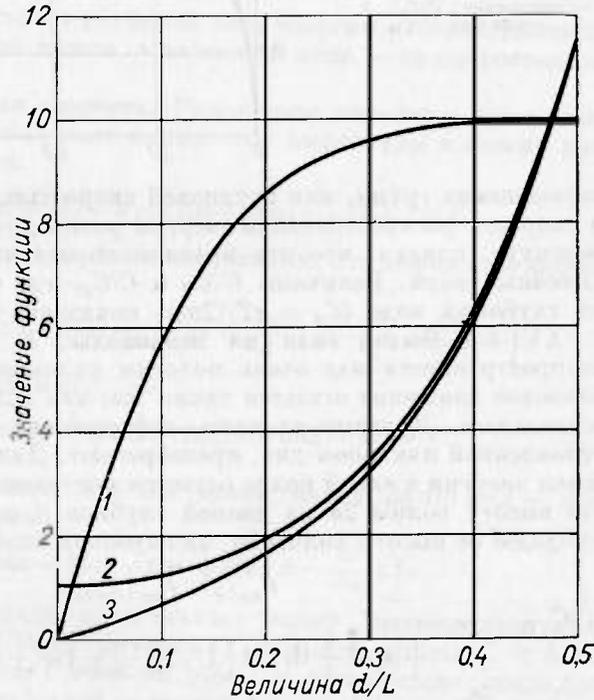


Рис. XVI-11. Зависимость гиперболических функций от относительной глубины.

— функция $\text{th}(2\pi d/L)$;
2 — функция $\text{ch}(2\pi d/L)$;
3 — функция $\text{sh}(2\pi d/L)$.

сводка формул для линейных периодических волн на глубокой воде, на воде промежуточной глубины и на мелкой воде. В первой таблице даны формулы для прогрессивных волн, а во второй — для стоячих.

Таблица XVI-1
Периодические прогрессивные волны, 1-е приближение (линейная теория)

	Глубокая вода $d/L > 0,5$	Вода промежуточной глубины $0,5 > d/L > 0,05$	Мелкая вода $d/L < 0,05$
Скорость волны	$C = \left[\frac{gL}{2\pi} \text{th} \frac{2\pi d}{L} \right]^{1/2} = \frac{gT}{2\pi} \text{th} \frac{2\pi d}{L}$	$C = \left[\frac{gL}{2\pi} \text{th} \frac{2\pi d}{L} \right]^{1/2} = \frac{gT}{2\pi} \text{th} \frac{2\pi d}{L}$	$C = \sqrt{gd}$
Длина волны	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$; $k^2 = gm$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \text{th} \frac{2\pi d}{L}$; $k^2 = gm \text{th} md$	$L = T \sqrt{gd}$; $k^2 = m^2 gd$
Групповая скорость	$U = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \frac{gT}{2\pi}$	$U = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{2md}{\text{sh} 2md} \right]$	$U = C = \sqrt{gd}$
Потенциал скорости	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{k}{m} e^{mz} \cos(kt - mx)$ $\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} e^{mz} \cos(kt - mx)$	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{k}{m} \frac{\text{ch} m(d+z)}{\text{sh} md} \cos(kt - mx)$ $\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} \frac{\text{ch} m(d+z)}{\text{ch} md} \cos(kt - mx)$	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{gT}{2\pi} \cos(kt - mx)$ $\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} \cos(kt - mx)$
Компоненты скорости	$u = \frac{2\pi}{T} \frac{H}{2} e^{mz} \sin(kt - mx)$ $w = \frac{2\pi}{T} \frac{H}{2} e^{mz} \cos(kt - mx)$	$u = \frac{H}{2} \frac{k}{m} \frac{\text{ch} m(d+z)}{\text{sh} md} \sin(kt - mx)$ $w = \frac{H}{2} \frac{k}{m} \frac{\text{sh} m(d+z)}{\text{sh} md} \cos(kt - mx)$	$u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin(kt - mx)$ $w = 0$
Орбиты частиц	$x - x_0 = -\frac{H}{2} e^{mz} \cos(kt - mx_0)$ $z - z_0 = \frac{H}{2} e^{mz} \sin(kt - mx_0)$	$x - x_0 = -\frac{H}{2} \frac{\text{ch} m(d+z_0)}{\text{sh} md} \cos(kt - mx_0)$ $z - z_0 = \frac{H}{2} \frac{\text{sh} m(d+z_0)}{\text{sh} md} \sin(kt - mx_0)$	$x - x_0 = -\frac{H}{2} \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \times \cos(kt - mx_0)$ $z - z_0 = 0$

	Глубокая вода $d/L > 0,5$	Вода промежуточной глубины $0,5 > d/L > 0,05$	Мелкая вода $d/L < 0,05$
Форма орбит	Окружности радиуса $R = \frac{H}{2} e^{mz_0}$	Эллипсы: большая полуось $\frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d+z_0)}{\text{sh } md}$ малая полуось $\frac{H}{2} \frac{\text{sh } m(d+z_0)}{\text{sh } md}$	Прямые линии длиной $H \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}}$
Уравнение свободной поверхности	$\eta = \frac{H}{2} \sin(kt - mx)$	$\eta = \frac{H}{2} \sin(kt - mx)$	$\eta = \frac{H}{2} \sin(kt - mx)$
Давление	$p = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} e^{-mz} \sin(kt - mx)$	$p = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{ch } md} \sin(kt - mx)$ $p = -\rho g z_0 - \rho g \frac{H}{2} \frac{\text{sh } mz_0}{\text{sh } md \text{ ch } md} \sin(kt - mx_0)$	$p = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \sin(kt - mx)$
Энергия на длину волны и на единицу ширины гребня	$E = \frac{1}{2} \rho g L \left(\frac{H}{2}\right)^2$ $E_k = E_p = \frac{1}{2} E$	$E = \frac{1}{2} \rho g L \left(\frac{H}{2}\right)^2$ $E_k = E_p = \frac{1}{2} E$	$E = \frac{1}{2} \rho g L \left(\frac{H}{2}\right)^2$ $E_k = E_p = \frac{1}{2} E$
Средний поток энергии на единицу ширины гребня	$\frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{gT}{2\pi}$	$\frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 C \left(1 + \frac{2md}{\text{sh } 2md}\right)$	$\frac{1}{2} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 \sqrt{gd}$

Таблица XVI-2

Стоячие волны (толчел), 1-е приближение (линейная теория)

	Глубокая вода $d/L > 0,5$	Вода промежуточной глубины $0,5 > d/L > 0,05$	Мелкая вода $d/L < 0,05$
Потенциал скорости	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{k}{m} e^{mz} \cos mx \sin kt$ $\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} e^{mz} \cos mx \sin kt$	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{sh } md} \cos mx \sin kt$ $\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{ch } md} \cos mx \sin kt$	$\varphi = -\frac{H}{2} \frac{g}{k} \cos mx \sin kt$
Компоненты скорости	$u = -\frac{H}{2} k e^{mz} \sin mx \sin kt$ $w = \frac{H}{2} k e^{mz} \cos mx \sin kt$	$u = -\frac{H}{2} k \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{sh } md} \sin mx \sin kt$ $w = \frac{H}{2} k \frac{\text{sh } m(d+z)}{\text{sh } md} \cos mx \sin kt$	$u = -\frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin mx \sin kt$ $w = 0$
Орбиты частиц	$x - x_0 = \frac{H}{2} e^{mz_0} \sin mx_0 \cos kt$ $z - z_0 = -\frac{H}{2} e^{mz_0} \cos mx_0 \cos kt$	$x - x_0 = \frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d+z_0)}{\text{sh } md} \sin mx_0 \cos kt$ $z - z_0 = -\frac{H}{2} \frac{\text{sh } m(d+z_0)}{\text{sh } md} \cos mx_0 \cos kt$	$x - x_0 = \frac{H}{2} \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin mx_0 \cos kt$ $z - z_0 = 0$

	Глубокая вода $\sigma/L > 0,5$	Вода промежуточной глубины $0,5 > d/L > 0,05$	Мелкая вода $d/L < 0,05$
Форма орбит	Прямые линии $\frac{x-d_0}{z-z_0} = -\operatorname{tg} m z_0$	Прямые линии $\frac{x-x_0}{z-z_0} = \frac{\operatorname{tg} m z_0}{\operatorname{th} m (d+z_0)}$	Горизонтальные линии длиной $H \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin m z_0$
Свободная поверхность	$\eta = -\frac{H}{2} \cos m x \cos k t$	$\eta = -\frac{H}{2} \cos m x \cos k t$	$\eta = -\frac{H}{2} \cos m x \cos k t$
Давление	$p = -\rho g z - \rho g \frac{H}{2} e^{m z} \cos m x \cos k t$	$p = -\rho g z - \rho g \frac{H}{2} \operatorname{ch} m (d+z) \times \cos m x \cos k t$	$p = -\rho g z - \rho g \frac{H}{2} \cos m x \cos k t$
Энергия на единицу длины волны	$E_K = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \sin^2 k t$ $E_P = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \cos^2 k t$ $E = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L$	$E_K = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \sin^2 k t$ $E_P = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \cos^2 k t$ $E = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L$	$E_K = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \sin^2 k t$ $E_P = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L \cos^2 k t$ $E = \frac{1}{4} \rho g \left(\frac{H}{2}\right)^2 L$

XVI-8. Различие между волнами на воде и нестационарным потоком сквозь пористую среду

XVI-8.1. Обзор основных допущений. Перед тем как завершить рассмотрение теории волн малой амплитуды, представляется интересным провести параллель между нестационарным потоком через пористую среду и безвихревыми волнами на воде, а также подчеркнуть существенные различия между этими явлениями.

Напомним, что исследование осредненного потока сквозь пористую среду обычно позволяет пренебречь всеми силами инерции, как локальной, так и конвективной (см. IX-2.3). Давление и массовые силы всегда уравниваются силами трения. В случае волн на воде давление и массовые силы уравниваются силами инерции, а силами трения пренебрегают. Вследствие равенства между



Рис. XVI-12. Возмущение в потоке сквозь пористую среду $h(x, t)$ монотонно затухает, а возмущение на свободной поверхности воды $\eta(x, t)$ приводит к колебаниям.

давлением, массовыми силами и силами трения в пористой среде эффект волны на воде там невозможен. Например, рассмотрим возвышение свободной поверхности, существующее в начальный момент $t = 0$ в виде $\eta(x, t)$ в открытом водоеме и в виде $h(x, t)$ в пористой среде (рис. XVI-12). Горизонтальная скорость в начальный момент в обоих случаях равна нулю.

В случае волн на воде потенциальная энергия превращается в кинетическую по мере того, как $\eta(x, t)$ стремится к нулю, а затем кинетическая энергия в свою очередь превращается в потенциальную. Положение свободной поверхности колеблется около невозмущенного уровня, обозначенного на рисунке через SWL (still water level), и начальное возмущение порождает волны на воде.

В случае потока через пористую среду потенциальная энергия в любой момент рассеивается (диссипируется) силами трения. Возвышение свободной поверхности медленно стремится к положению невозмущенного уровня. Практический интерес представляет случай, когда оба указанных явления могут наблюдаться одновременно. Такая ситуация имеет место, когда волновые движения свободной поверхности моря (приливного или ветрового происхождения) происходят вдоль водопроницаемой земляной насыпи или набережной. Колебания зеркала грунтовых вод, обусловленные волновыми движениями морской поверхности, очень быстро затухают с удалением от моря.

Все эти факты, разумеется, могут быть проиллюстрированы строгими выкладками и вычислениями. Теперь мы перейдем к

краткому параллельному рассмотрению наиболее типичных уравнений указанных двух видов движения.

XVI-8.2. Динамические условия. Обе задачи сводятся к определению потенциала скоростей φ , удовлетворяющего уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Напомним (см. IX-2.6), что потенциал скорости для потока сквозь пористую среду в случае двумерного движения определяется выражениями:

$$u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где обозначения осреднения по пространству — двойные черточки над u и v — опущены ради простоты. Напомним, что при этих условиях

$$\varphi = \frac{p}{\rho g} + z.$$

В частности, $\varphi = h$ на свободной поверхности, где $z = h(x, y)$ по определению. Таким образом, уравнение свободной поверхности будет

$$h(x, t) = \varphi(x, z, t)|_{z=h}$$

или также

$$h(x, t) = \varphi[x, h(x, t), t].$$

Не употребляя слова «динамический» в отношении полученного выражения, заметим, однако, что оно соответствует динамическому условию для свободной поверхности в случае волн на воде:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = f(t).$$

Мы видим, что в линеаризованном варианте основное различие между этими двумя выражениями состоит в том, что в одном случае величина h пропорциональна φ , а в другом — члену $\partial \varphi / \partial t$, обусловленному локальной инерцией.

XVI-8.3. Кинематическое условие. Напомним (см. XVI-1.4), что кинематическое условие для волн на воде имеет вид

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=\eta}$$

Аналогичное уравнение существует и для потока сквозь пористую среду. Однако из-за того, что вода заполняет лишь пустоты пористой среды, а также за счет несколько иного определения потенциала скоростей, это уравнение несколько видоизменяется, так как в нем учитывается зависимость от коэффициента пустотности ε и от коэффициента фильтрации K . Это делается следующим образом.

Рассмотрим элемент $d\sigma$ свободной поверхности в момент t и в момент $t + dt$ (рис. XVI-13). Объем жидкости $ABCD$ равен расходу через участок поверхности AB , умноженному на интервал времени dt . С одной стороны, этот объем равен $\varepsilon d\sigma dn$, где ε — коэффициент

пустотности, а $dn = (\partial h / \partial t) dt \cos \alpha$. С другой стороны, расход жидкости через участок поверхности AB за время dt равен

$$(u \sin \alpha d\sigma + v \cos \alpha d\sigma) dt.$$

Подставляя значение $\operatorname{tg} \alpha = -\partial h / \partial x$, заменяя u и v их значениями $-K \partial \varphi / \partial x$ и $-K \partial \varphi / \partial y$ и деля все на $\cos \alpha dt$, получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Это и есть кинематическое условие для потока сквозь пористую среду.

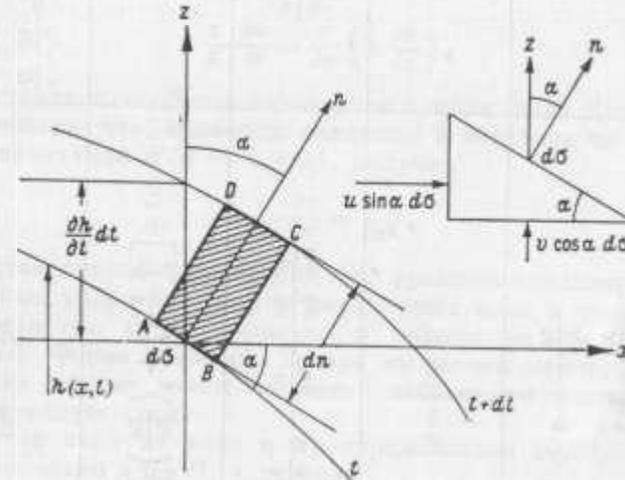


Рис. XVI-13. Обозначения, используемые при выводе уравнения свободной поверхности.

Поскольку на свободной поверхности

$$z = h(x, t) = \varphi[x, h(x, t), t],$$

то, дифференцируя это соотношение по t и по x , получим (здесь * означает t либо x):

$$\frac{\partial h}{\partial *} = \frac{\partial \varphi}{\partial *} + \frac{\partial \varphi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial *},$$

что можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Подставляя эти два соотношения в полученное выше уравнение, мы можем исключить h , и тогда получим выражение

$$\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

которое можно также записать в виде

$$\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

поскольку $\nabla^2 \varphi = 0$. В случае, когда вертикальная компонента движения мала и величиной $\partial \varphi / \partial z$ можно пренебречь, получаем (учитывая также, что $\varphi = h$)

$$\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

что представляет собой так называемое приближение Дююи. Предполагая теперь, что изменения величины h невелики по сравнению с самой величиной h ($h = d + \eta$), получим

$$\frac{\varepsilon}{Kd} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

что представляет собой уравнение типа уравнения теплопроводности.

Основные уравнения теории двумерных волн и теории потока сквозь пористую среду выписаны в таблице на стр. 314.

XVI-8.4. Форма решений. Теперь мы можем математически показать, что «эффект волны на воде» невозможен в случае потока сквозь пористую среду.

В случае волн на воде η пропорционально $\partial \varphi / \partial t$, или $\partial \varphi / \partial z$ пропорционально $\partial^2 \varphi / \partial t^2$, а так как

$$\varphi = f(x, z) e^{ist},$$

то очевидно, что $\partial \varphi / \partial z$ пропорционально величине $\sigma^2 \varphi$, которая является вещественной. Поэтому для волн на воде существует периодическое решение.

В случае потока сквозь пористую среду волновой эффект невозможен, поскольку h пропорционально φ , а $\partial \varphi / \partial z$ пропорционально $\partial \varphi / \partial t$. Отсюда видно, что решение вида $\varphi = f(x, z) e^{ist}$ ведет к мнимому соотношению между h и φ , если только величина σ не является мнимой. В этом последнем случае (σ — мнимая) произведение $i\sigma$ будет вещественным, а это означает, что движение будет экспоненциальным во времени, а не колебательным.

Рисунок XVI-12 физически поясняет высказанные соображения.

УПРАЖНЕНИЯ

XVI-1. Найдите уравнение линий тока, эквипотенциальных линий, траекторий и линий равного давления (изобар) в линейной периодической прогрессивной волне.

О т в е т: линии тока: $(k/m)[\text{sh } m(d+z)/(\text{sh } md)] \cos mx = \text{const}$; изобары: $z = -a\{[\text{ch } m(d+z)]/(\text{ch } md)\} \cos (kt - mx)$.

	Безвихревые волны на воде	Поток сквозь пористую среду
Определение потенциала скоростей	$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $w = -K \frac{\partial \varphi}{\partial z}$
Выражение для потенциала скоростей	$\varphi = f(x, z, t)$	$\varphi = \frac{p}{\rho g} + z$
Кинематическое условие на свободной поверхности	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}$
Динамическое условие на свободной поверхности	$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = f(t)$	$\varphi = h$
Из кинематического и динамического условий получаем	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ (линейное уравнение)	$\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ или $\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)$ (приближение Дююи)

XVI-2. Найдите уравнения линий тока, эквипотенциальных линий, траекторий и изобар в линейной периодической стоячей волне.

О т в е т: линии тока: $(k/m)\{\text{sh } m(d+z)/(\text{sh } md)\} \sin mx = \text{const}$; изобары: $z = -2a \{\text{ch } m(d+z)/(\text{ch } md)\} \cos mx \sin kt$.

XVI-3. Покажите с помощью линейной теории длинных волн, что свободная поверхность в двумерной основной (одноузловой) сейше в бассейне с параболическим дном

$$d(x) = d_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

представляет собой прямую линию.

Покажите, что свободная поверхность первой гармоники представляет собой параболу.

О т в е т: возвышение свободной поверхности в основном колебании

$$\eta = \frac{2x}{a^2} \sin \frac{2\pi}{T_1} t;$$

возвышение свободной поверхности в первой гармонике

$$\eta = \frac{3x^2 - a^2}{a^3} \sin \frac{2\pi}{T_2} t \quad \left(\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{3}\right).$$

XVI-4. Рассчитайте длину волны L как функцию глубины d в случае, когда период T равен 8, 10 и 12 с. Определите минимальную величину отношения d/L , при которой длину L можно определить по формулам теории глубокой воды, а также максимальную величину этого отношения, при которой применение теории мелкой воды дает погрешность не более 5%.

XVI-5. Покажите, что потенциал скорости в случае линейной периодической прогрессивной волны на глубокой воде будет

$$\varphi = -a \frac{k}{m} e^{-kz} \cos(kt - mx),$$

и дайте выражение для давления $p(x, z, t)$ и для свободной поверхности. Покажите, почему в качестве предела применимости указанного выше выражения для φ обычно используется критерий $d/L \leq 0,5$. Объясните, почему построение рефракционной волновой диаграммы надо начинать при $d/L > 0,3$.

XVI-6. Выведите выражение для $p(x, z, t)$ в случае двумерной периодической линейной прогрессивной волны на промежуточной глубине.

О т в е т:

$$\frac{p}{\rho g} = -z + \frac{H}{2} \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{ch } md} \cos(kt - mx) \cdot \frac{\rho a}{\rho g}$$

XVI-7. Рассмотрите соотношение

$$k^2 = mg \text{th } md$$

и выведите выражение

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \text{th } \frac{2\pi d}{L}}$$

XVI-8. Покажите, что траектории частиц в двумерной периодической линейной стоячей волне являются прямыми линиями и нарисуйте примерную картину потока.

О т в е т:

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = -\text{th } m(d + z_0) \text{ctg } mx_0.$$

XVI-9. Определите периоды свободных колебаний (основного и первых десяти гармоник) в двумерном бассейне, имеющем 10 футов в длину и два в глубину. Определите три наиболее долгих периода свободных колебаний в прямоугольном бассейне со сторонами 10 на 8 футов и глубиной 2 фута.

XVI-10. Найдите погрешность величины C , определенной согласно приближению теории глубокой воды ($C = gT/2\pi$) в случае, когда $d/L = 1/3$. Определите минимальную величину d/L , которая дает ту же погрешность при определении величины C согласно приближению теории мелкой воды ($C = \sqrt{gd}$). Определите такую величину d/L , при которой погрешности за счет каждой из теорий равны друг другу.

XVI-11. В фиксированной точке морского дна регистрируется давление $p(t)$, изменяющееся за счет периодической волны. Глубина воды является промежуточной. Найдите выражение, с помощью которого, зная данную флуктуацию давления, можно определить высоту волны.

О т в е т:

$$H = \frac{2(p_{\text{max}} - \rho g d)}{\rho g \text{ch } md}, \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = mg \text{th } md.$$

XVI-12. Найдите величину давления на вертикальную стенку (в первом приближении) и определите соответствующий метод расчета устойчивости вертикального мола.

О т в е т: максимальное давление на вертикальную стенку со стороны моря аппроксимируется линейным распределением от уровня поверхности моря $d + H$, где давление равно нулю, до дна, где давление равно

$$p_b = \rho g \left[d + H \left(\text{ch } \frac{2\pi}{L} \right)^{-1} \right].$$

Со стороны гавани на стенку действует более низкое гидростатическое давление, достигающее у дна величины $\rho g d$. Результирующее воздействие равно разности указанных двух давлений. Далее находятся опрокидывающий момент и касательное напряжение трения о дно, как для гравитационной плотины.

XVI-13. Будем считать, что выполняется принцип сохранения энергии, переносимой между волновыми ортогоналями. Можно показать, что при горизонтальном дне волна обрушивается, когда ее крутизна H/L стремится к величине $0,14 \text{th}(2\pi d/L)$. Будем считать, что этот критерий сохраняется в том случае, когда волна опрокидывается над полого наклоненным дном, подходя к изобатам под некоторым углом. Рассмотрим теперь периодическую волну, приходящую из района глубокой воды и движущуюся под углом α_0 к изобатам. Изобаты — параллельные прямые, а уклон дна очень невелик. Установите метод расчета угла α_b , который гребень опрокидывающейся волны составляет с линией берега, глубины d_b , на которой происходит обрушение, и высоты волны в момент обрушения H_b . Эти величины надо определить как функции от α_0 , высоты волны на глубокой воде H_0 и периода волны T .

О т в е т: расстояние между ортогоналями

$$\frac{b_0}{b_b} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_b}.$$

поток энергии

$$H_0^3 b_0 V_0 = H_b^3 b_b V_b,$$

$$\frac{L_b}{L_0} = \frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_0} = \text{th } \frac{2\pi d_b}{L_b},$$

$$\frac{L_b}{L_0} = \frac{L_b}{H_b} \frac{H_b}{H_0} \frac{H_0}{L_0}.$$

Пусть $\alpha = 2\pi d_b/L_b$, $t = \text{th } \alpha$, $s = \text{sh } 2\alpha$. Тогда

$$0,14 t^{3/2} \left(1 + \frac{2\alpha}{s}\right)^{1/2} = \frac{H_0}{L_0} \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{1 - t^2 \sin^2 \alpha_0}\right)^{1/4},$$

откуда получаем величину d_b/L_b как функцию от H_0 , L_0 и α_0 . Величина L_b находится из соотношения $L_b/L_0 = t$, затем определяется d_b и, наконец, α_b .

ГИДРАВЛИКА ОТКРЫТЫХ РУСЕЛ И ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ВОЛН

XVII-1. Стационарный поток в открытом русле

XVII-1.1. Однородный поток, нормальная глубина и критическая глубина. XVII-1.1.1. Гидравлический радиус и формула Шези. XVII-1.1.1.1. Большая часть основных уравнений этой главы может быть получена: 1) из уравнений Эйлера, в которых некоторые члены приняты равными нулю, а трение учитывается

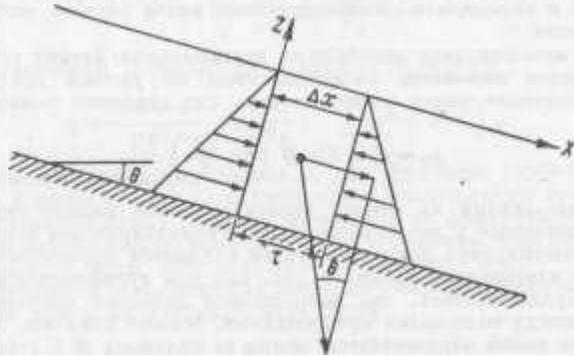


Рис. XVII-1. Однородный поток.

с помощью эмпирического члена; 2) из обобщенного уравнения Бернулли, в которое подставлено условие на свободной поверхности вида $p = p_a$, где p_a — атмосферное давление; или 3) путем непосредственного применения уравнения импульсов, в котором сохранены только наиболее важные члены.

Будут использованы все три подхода, однако следует все время помнить, что все эти математически различные описания движения вытекают из одного и того же уравнения Ньютона и что не существует критерия для предпочтения одного из них другому.

XVII-1.1.1.2. Рассмотрим однородный поток, параллельный оси OX (рис. XVII-1). Поскольку движение является стационарным, то $\partial(u, v, w)/\partial t = 0$, а поскольку движение однородно, то $v = w = 0$ и $du/dx = 0$. Отсюда сразу следует, что все инерционные члены равны нулю. Кроме того, силы давления, действующие на обе стороны элементарного слоя жидкости, расположенного поперек потока, уравновешивают друг друга. Толщина элементарного слоя равна Δx , а площадь каждой из сторон равна площади поперечного сечения A . Направленные вдоль оси OZ компоненты сил давления и тяжести также уравновешивают друг друга независимо от скорости потока. Таким образом, единственными заметными остающимися си-

лами являются: компонента силы тяжести вдоль оси OX и касательные напряжения, т. е.

$$\rho g A \Delta x \sin \theta = \Delta x \int_0^P \tau dP,$$

где P — «смоченный периметр», т. е. длина подводной части периметра поперечного сечения A , а τ — касательное напряжение на единицу площади поверхности.

XVII-1.1.1.3. В общем величина τ изменяется от одного места к другому, за исключением случая потока в трубе кругового сечения, где она неизменна за счет симметрии. Однако благодаря вторичным течениям (см. VIII-2.4) изменчивостью величины τ от места к месту часто можно пренебречь. Тогда приведенное выше уравнение запишется в виде

$$\rho g \frac{A}{P} \sin \theta = \tau.$$

Величина $R_H = A/P$, имеющая размерность длины, называется гидравлическим радиусом. Очевидно, что в случае прямоугольного поперечного сечения с шириной l и глубиной h мы имеем

$$R_H = \frac{lh}{l+2h},$$

причем R_H стремится к h при $l \rightarrow \infty$, т. е. на практике в случае широкой реки или канала можно считать, что $R_H = h$. В случае круглой трубы радиуса R получаем

$$R_H = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}.$$

XVII-1.1.1.4. В случае реки или канала число Рейнольдса обычно велико, так что поток полностью турбулизирован. В этом случае можно считать, что касательные напряжения связаны с осредненной скоростью $\{V = (1/A) \int_A u dA$ квадратичным соотношением вида

$$\tau = \rho^* f V^2,$$

где f — безразмерный коэффициент трения. Тогда получаем

$$V = \left[\frac{g}{f} \right]^{1/2} [R_H \sin \theta]^{1/2}.$$

Величина $[g/f]^{1/2} = C_h$ называется коэффициентом Шези и имеет размерность $[LT^{-2}]^{1/2}$. Отсюда $f = g/C_h^2$. Поскольку уклон S обычно мал, то

$$S = \text{tg } \theta \cong \sin \theta,$$

и окончательно получаем

$$V = C_h \sqrt{R_H S}.$$

Это — формула Шези.

Тогда расход $Q_n = VA$ будет равен

$$Q_n = AC_h \sqrt{R_H S}.$$

Величина $K = AC_h \sqrt{R_H}$ называется модулем расхода (или пропускной способностью) канала или русла и зависит только от геометрии поперечного сечения и от глубины. Величина Q_n называется нормальным расходом и определяется как функция глубины потока для данного канала.

XVII-1.1.1.5. Коэффициент Шези и величину f можно определить только экспериментально. Найдено, что

$$C_h = \frac{1,486}{n} R_H^{1/6} *$$

где гидравлический радиус R_H дан в футах, а n — коэффициент Маннинга. Величина n дается в виде функции от относительной шероховатости и на практике колеблется в пределах от 0,01 до 0,03. Подставляя это выражение в формулу Шези, получаем формулу Маннинга

$$V = \frac{1,486}{n} R_H^{2/3} S^{1/2} *$$

и модуль расхода тогда будет равен

$$K = \frac{1,486}{n} A R_H^{2/3} *$$

XVII-1.1.2. Нормальная глубина и переходная глубина. Нормальной глубиной h_n называется расстояние от свободной поверхности однородного потока до наиболее низкой точки ложа канала. Нормальная глубина определяется равенством

$$\frac{Q}{V S} = K(h_n),$$

где $K(h_n)$ — функция, характеризующая пропускную способность канала. В случае широкого прямоугольного канала, когда $R_H = h_n$, нормальная глубина будет равна

$$h_n = \left(\frac{q}{C_h V S} \right)^{3/5} *$$

где q — расход на единицу ширины. Мы видим, что (для данного канала или русла) данной глубине соответствует единственное значение расхода — нормальный расход, а данному расходу соответствует единственное значение глубины — нормальная глубина.

XVII-1.1.2.1. В случае неоднородного потока член $(d/dx)(V^2/2)$ уже не будет равен нулю, а значит, сила тяжести и сила трения уже не уравновешивают полностью друг друга. Глубина h не равна нормальной глубине, а является теперь «переходной» глубиной, которая неодинакова вдоль канала и может принимать значения как больше,

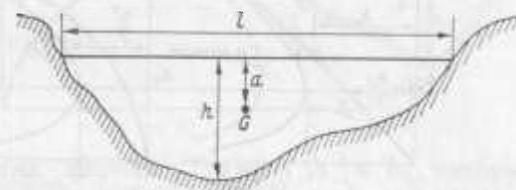
* В метрических мерах коэффициент 1,486 заменяется единицей. — Прим. ред.

так и меньше, чем h_n . Например, переходная глубина на участке, расположенном вверх по течению от плотины, будет больше, чем нормальная глубина.

Считается, что все величины и формулы, связанные с коэффициентами f , C_h и n и полученные для случая стационарного однородного потока с нормальной глубиной, остаются справедливыми и в случае неоднородного потока с переходной глубиной. Вообще говоря, недостаток точной информации о величине коэффициента трения приводит к погрешностям, сравнимым с погрешностями, обусловленными допущениями при самой аппроксимации. Следовательно, пропускная способность русла K является общей функцией от h , применимой и в случае неоднородного потока.

XVII-1.2. Удельная энергия. Удельная сила. Критическая глубина. XVII-1.2.1. Определение понятия удельной энергии и удельной силы. Величина

$$E = \frac{(1+\alpha)V^2}{2g} + h = \frac{(1+\alpha)Q^2}{2gA^2} + h,$$



где V — средняя скорость, h — максимальная глубина, Q — расход и A — площадь поперечного сечения, называется удельной энергией. Величиной α , которая представляет собой некоторый положительный коэффициент (см. XII-2.2), в дальнейшем ради простоты будем пренебрегать. Приведенная формула показывает, что удельная энергия представляет собой сумму кинетической энергии $[V^2/(2g)]$ и потенциальной энергии единицы массы жидкости, отнесенную ко дну канала (h), а не к горизонтальной нулевой отсчетной поверхности.

Удельной силой называется величина

$$I = \int_A \left[\frac{V^2}{g} + \frac{p}{\rho g} \right] dA = \frac{Q^2}{gA} + aA,$$

где a — расстояние от центра тяжести площади поперечного сечения до свободной поверхности (рис. XVII-2). Напомним, что удельная сила представляет собой сумму изменения за единицу времени импульса и интеграла от сил давления, приходящихся на единицу массы воды.

В случае двухмерного канала прямоугольного поперечного сечения имеем $A = hl$, $a = h/2$ и $q = Q/l$, так что E и I на единицу ширины будут:

$$E = \frac{q^2}{2gh^2} + h, \quad I = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}.$$

Если ввести обозначения

$$h^* = \frac{h}{E}, \quad q^* = \frac{q}{E \sqrt{2gE}}$$

то получим уравнение

$$q^* = h^* \sqrt{1 - h^*},$$

которое является универсальным.

XVII-1.2.2. Понятие критической глубины.
XVII-1.2.2.1. Случай прямоугольного канала. Рассмотрим две функции $E(q, h)$ и $I(q, h)$ в случае прямоугольного канала. При данной

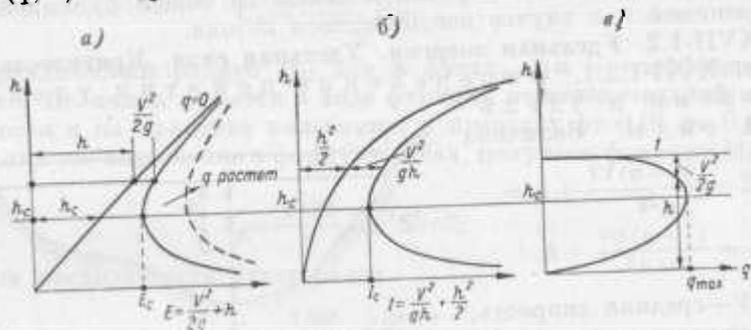


Рис. XVII-3. Удельная энергия и удельная сила.
l — линия энергии.

величине q их зависимость от h показана на рис. XVII-3 а и б. В частности, минимальные значения величин E и I , определяемые соотношениями $\partial E/\partial h = 0$ и $\partial I/\partial h = 0$, соответствуют одной и той же величине $h = h_c$, определяемой уравнением

$$\frac{q^2}{gh_c^3} = 1,$$

откуда

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{V^2}{g}, \text{ или } V = \sqrt{gh_c}.$$

В этом случае

$$E = E_c = \frac{3}{2} h_c,$$

$$I = I_c = \frac{3}{2} h_c^2.$$

XVII-1.2.2.2. Аналогично можно построить график зависимости величины q от h при фиксированном значении E . Такой график приведен на рис. XVII-3 в. Можно без труда показать, что минимальное значение q , определяемое соотношением $\partial q/\partial h = 0$, соответствует той же величине $h = h_c$.

XVII-1.2.2.3. В случае сложного поперечного сечения площади $A(h)$ критическая глубина определяется выражением

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 1 - \frac{2}{A^3} \frac{Q^2}{2g} \frac{\partial A}{\partial h} = 0,$$

и, поскольку $\partial A/\partial h = l$, где l — ширина канала по свободной поверхности, то имеем

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{l}.$$

Так как A и l являются функциями только от h , то можно построить кривую, выражающую функциональную зависимость h_c от критического расхода Q_c для любого вида поперечного сечения (рис. XVII-4). Можно легко показать, что в случае прямоугольного поперечного сечения мы получаем приведенную выше величину h_c .

XVII-1.3. Медленный (докритический) поток и быстрый (сверхкритический) поток. XVII-1.3.1. Сопряженные глубины.

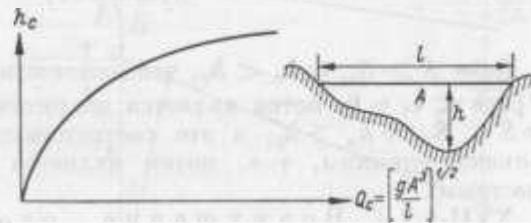


Рис. XVII-4. Зависимость критической глубины от расхода.

Существуют два возможных значения глубин h_1 и h_2 , которым соответствуют одинаковые значения E и q . Значения h_1 и h_2 определяются соотношениями

$$E = h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

и

$$q = h_1 V_1 = h_2 V_2,$$

так что

$$\frac{q^2}{2g} \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 h_2^2} = h_1 - h_2.$$

Подставляя сюда величину критической глубины $h_c = (q^2/g)^{1/3}$, получим

$$\frac{2h_1^2 h_2^2}{h_2 + h_1} = h_c^3.$$

Величины h_1 и h_2 называют сопряженными глубинами. Большая из них, допустим h_1 , соответствует так называемому докритическому, или медленному потоку (спокойное течение), скорость которого $V < \sqrt{gh}$. Меньшая величина, допустим h_2 , соответствует так называемому сверхкритическому, или быстрому потоку (бурное течение), скорость которого $V > \sqrt{gh}$.

XVII-1.3.2. Критический уклон дна. Мы видели, что нормальный расход есть функция от пропускной способности русла и уклона дна ($Q_n = K\sqrt{S}$), в то время как критический расход является функцией только от площади поперечного сечения и ширины канала ($Q_c = (gA^3/l)^{1/2}$).

Существует такой уклон дна (критический уклон), при котором нормальный расход, т. е. расход однородного потока, равен

критическому расходу, а следовательно, нормальная глубина h_n равна критической глубине h_c .

Следовательно, критический уклон определяется соотношением

$$AC_h \sqrt{R_H S_c} = \left[\frac{g A^3}{I} \right]^{1/3},$$

т. е.

$$S_c = \frac{g}{C_h^2} \frac{A}{R_H^3},$$

а в случае широкого прямоугольного канала

$$S_c = \frac{g}{C_h^2} = f.$$

Если $S > S_c$, то $h_n < h_c$, что соответствует величине числа Фруда $V/\sqrt{gh} < 1$, т. е. поток является докритическим (медленным). Если же $S < S_c$, то $h_n > h_c$, а это соответствует величине числа Фруда большей единицы, т. е. поток является тогда сверхкритическим (быстрым).

XVII-1.3.3. Возмущение свободной поверхности и регулирование потока. Поскольку любое возмущение распространяется со скоростью, не превышающей величину \sqrt{gh} , то существование скорости $V > \sqrt{gh}$ означает, что возмущение любого типа не может распространяться вверх по течению. Если же характеристики потока изменяются в направлении вниз по течению от докритических до сверхкритических (например, в верхней части водослива), то величина расхода регулируется на критическом поперечном сечении.

XVII-2. Медленно изменяющийся поток

XVII-2.1. Основные уравнения для медленно изменяющегося потока. XVII-2.1.1. Обобщенное уравнение Бернулли с учетом трения можно применить к потоку со слегка наклонной свободной поверхностью. Напомним, что обобщенное уравнение Бернулли можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right] = - \frac{S}{\rho g R_H},$$

т. е.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{p}{\rho g} + z \right] = - \frac{Q^2}{C_h^2 R_H A^2},$$

$$\frac{Q^2}{C_h^2 R_H A^2} = \frac{Q^2}{K^2} = S_f.$$

Величина S_f представляет собой наклон линии, характеризующей потери напора (линии напора). Тогда, подставляя $p = p_a$ (где p_a — атмосферное давление) в качестве постоянной величины и обозначая через z возвышение свободной поверхности относительно

горизонтального уровня, принятого за начало отсчета, а также учитывая (рис. XVII-5), что

$$\frac{dz}{dx} = -S + \frac{dh}{dx},$$

получаем

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2}{2gA^2} + h \right] = S - \frac{Q^2}{K}.$$

В величине, заключенной в квадратные скобки, нетрудно узнать удельную энергию.

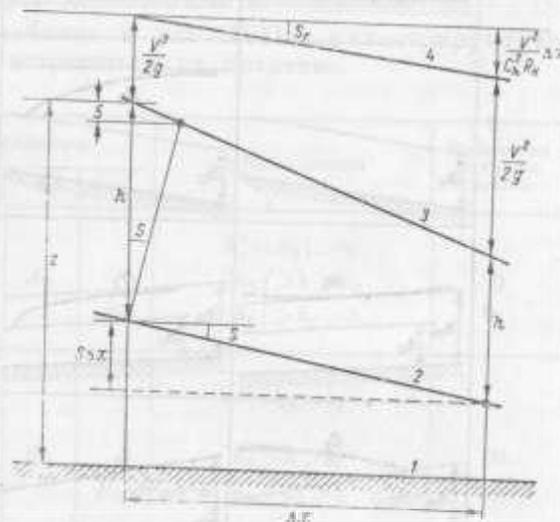


Рис. XVII-5. Медленно меняющийся поток; обозначения.

1 — нулевая отметка высот; 2 — дно; 3 — свободная поверхность; 4 — линия энергии (напора); 5 — величина, которую можно пренебречь.

XVII-2.1.2. Поскольку

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2}{2gA^2} \right] = - \frac{Q^2}{g} \frac{L}{A^3} \frac{dh}{dx},$$

то окончательно получаем

$$\frac{dh}{dx} = S \cdot \frac{1 - \frac{Q^2}{K^2 S}}{1 - \frac{Q^2 L}{g A^3}}$$

Это основное уравнение для медленно изменяющегося потока. Так как $Q^2/(K^2 S) = S_f/S$ и $Q^2 L/(g A^3) = C_h^2 R_H S_f L/(g A) = S_f/S_c$, то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dh}{dx} = S \frac{1 - \left(\frac{S_f}{S} \right)}{1 - \left(\frac{S_f}{S_c} \right)},$$

или, снова возвращаясь к случаю широкого прямоугольного канала ($R_H = h$), получаем после некоторых преобразований

$$\frac{dh}{dx} = S \frac{h_n^3 - h^3}{h^3 - h_c^3}.$$

XVII-2.2. Кривые свободной поверхности. XVII-2.2.1. В общем изменение положения свободной поверхности зависит: 1) от знака величины S ; 2) от знака числителя в полученной выше формуле

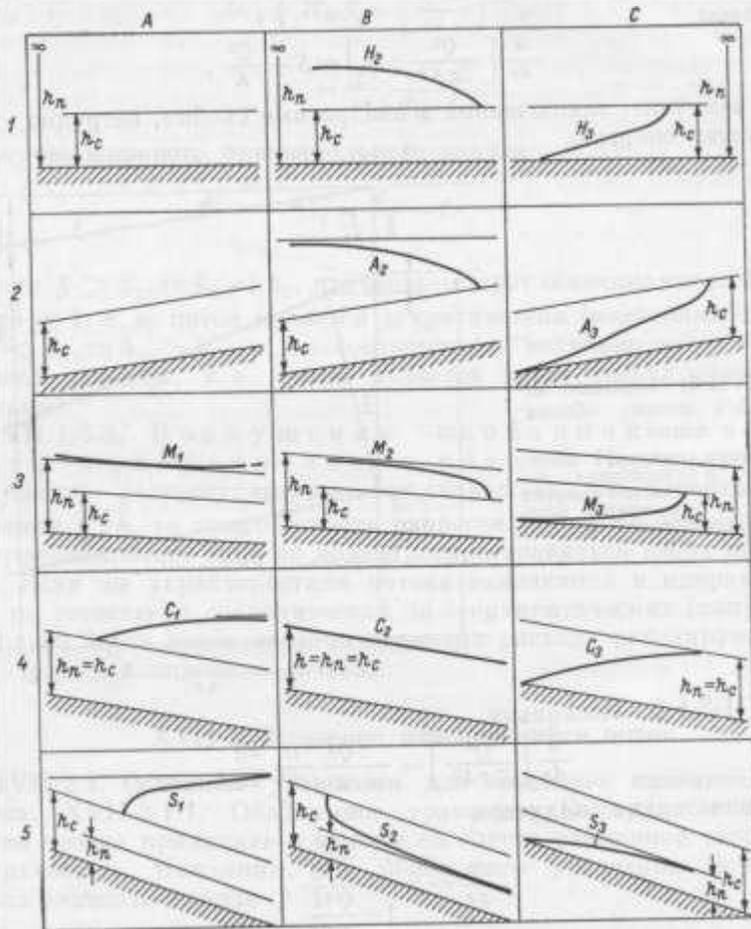


Рис. XVII-6. Различные формы кривой подпора. Показаны случаи, соответствующие трем различным соотношениям между h , h_n и h_c (варианты А, В, С) и пяти типам уклона дна (типы 1—5).

Варианты: А) $h > h_n$; $h > h_c$; В) $h_n \geq h \geq h_c$; $h_c \geq h \geq h_n$; С) $h < h_n$; $h < h_c$. Типы уклона дна: 1 — горизонтальное дно; $h_n > h_c$; 2 — обратный уклон; 3 — пологий уклон; $h_n > h_c$; 4 — критический уклон; $h_n = h_c$; 5 — крутой уклон; $h_n < h_c$.

для dh/dx , т. е. от того, больше или меньше фактическая глубина h , чем нормальная глубина h_n ; 3) от знака знаменателя той же формулы, т. е. от того, больше или меньше фактическая глубина h , чем критическая глубина h_c .

Отметим, что и при $h > h_n$, и при $h < h_n$ мы можем иметь либо $h > h_c$, либо $h < h_c$ в зависимости от того, что больше: h_n или h_c . На практике прежде всего сопоставляют именно эти две величины, прежде чем переходить к дальнейшим вычислениям.

Возьмем, например, случай потока в канале с положительным уклоном дна, т. е. $S > 0$. Пусть при этом $h_n > h_c$. Тогда и числитель, и знаменатель в формуле для dh/dx отрицательны, т. е. величина dh/dx — положительна. Глубина непрерывно увеличивается вдоль оси OX . Этот случай соответствует кривой подпора, обусловленной наличием плотины в реке с незначительным уклоном дна (рис. XVII-6, случай M_1).

Приведенная ниже таблица и рис. XVII-6 иллюстрируют все случаи, которые могут встретиться на практике.

Уклон дна	Варианты			Глубина потока	Изменение глубины потока
	A	B	C		
Обратный $S < 0$	—	A_2	A_3	$h > h_n > h_c$ $ h_n > h > h_c$ $ h_n > h_c > h$	— D B
Нулевой (горизонтальный) $S = 0$	—	H_2	H_3	$h > h_n > h_c$ $h_n > h > h_c$ $h_n > h_c > h$	— D B
Слабый $0 < S < S_c$	M_1	M_2	M_3	$h > h_n > h_c$ $h_n > h > h_c$ $h_n > h_c > h$	B D B
Критический $S = S_c$	C_1	C_2	C_3	$h > h_c = h_n$ $h_c = h = h_n$ $h_c = h_n > h$	B U B
Крутой $S > S_c > 0$	S_1	S_2	S_3	$h > h_c > h_n$ $h_c > h > h_n$ $h_c > h_n > h$	B D B

Вариант А соответствует случаю, когда переходная глубина больше и нормальной глубины h_n , и критической глубины h_c . Вариант В соответствует случаю, когда переходная глубина имеет величину, промежуточную между h_n и h_c . Вариант С соответствует случаю,

когда переходная глубина меньше и h_n , и h_c . В последней колонке таблицы буква В (backwater — подпор) означает, что глубина в направлении потока увеличивается — имеет кривую подпора, буква D (drawdown — понижение уровня) — что глубина в направлении потока уменьшается, т. е. имеет кривую спада, и буква U (uniform — без изменений) — что глубина остается неизменной.

XVII-2.2.2. Более подробное рассмотрение кривых свободной поверхности не входит в цели этой книги. Все прочие случаи могут быть систематически выведены путем простого анализа основного уравнения. Точно так же можно проанализировать и рассчитать кривые свободной поверхности в каналах (руслах) с переменным уклоном дна, непрерывным или с резкими перепадами.

XVII-2.2.3. В инженерной практике расчет кривых свободной поверхности можно осуществлять либо путем точного интегрирования в некоторых простых случаях (например, для случая канала прямоугольного сечения служит формула Брессе), либо, чаще всего численно, с помощью метода конечных разностей для последовательных интервалов Δx . Кроме того, существует целый ряд приближенных и графических методов. В технической литературе можно найти специальные таблицы и графики для безразмерной «единицы канала». Обычно самый прямой метод, основанный на конечных разностях, является и наиболее практичным; при этом все операции без труда могут быть запрограммированы для электронно-счетной машины.

XVII-2.3. Быстро изменяющийся поток. Эффект кривизны траекторий. В случае быстро изменяющегося потока распределение давления не является более гидростатическим. Кривизна траекторий оказывает на поведение потока влияние, которым уже нельзя пренебречь. Также и однородный поток при глубинах, близких к критическим, является очень неустойчивым, и соответствующее движение может тогда перейти в категорию движений с искривленными траекториями.

Обозначим через R радиус кривизны свободной поверхности, т. е.

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2h}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \cong \frac{d^2h}{dx^2}.$$

Допустим, что величина кривизны линейно распределена от дна до свободной поверхности, так что

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{h+z}{h} \frac{d^2h}{dx^2}.$$

Центробежное ускорение равно V^2/R , где V — средняя скорость. Тогда уравнение динамики вдоль вертикали принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + \rho V^2 \left[\frac{h+z}{h} \frac{d^2h}{dx^2} \right],$$

а после интегрирования получаем

$$p(z) = -\rho g z + \rho \frac{V^2}{h} \frac{d^2h}{dx^2} \left[h z + \frac{z^2}{2} \right].$$

Буссинеск эффективно использовал это уравнение для определения условия, определяющего, будет ли движение потока устойчивым, или оно может стать волнообразно изгибающимся, или, наконец, в потоке образуется волнообразный гидравлический прыжок.

Кривизну траекторий приходится учитывать и при исследовании потока над быстро изменяющимся уклоном дна, например над водосливом. Этот процесс мы не будем здесь рассматривать.

XVII-3. Теория длинных волн. Допущения и основные уравнения

XVII-3.1. Уравнения движения. XVII-3.1.1. Уравнения движения теории длинных волн можно получить либо с помощью непосредственного вывода, либо применяя обобщенное уравнение Бернулли, либо из уравнений Эйлера. Мы используем последний путь.

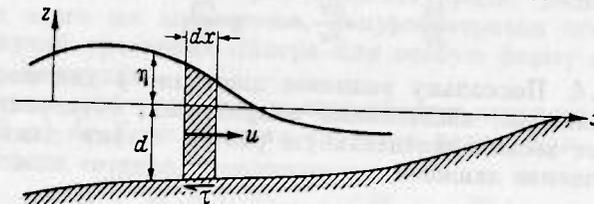


Рис. XVII-7. Обозначения теории длинных волн.

Рассмотрим уравнения Эйлера в двумерной системе координат (X, Z) . Движение нестационарно, но мы будем считать, что вертикальная компонента движения мала и что, следовательно, члены конвективного ускорения $u \partial w / \partial z$, $w \partial w / \partial x$, $w \partial w / \partial z$ пренебрежимо малы. В случае, когда величина w очень мала, производной $\partial w / \partial t$ также можно пренебречь, и, таким образом, уравнения Эйлера сводятся к

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{p}{\rho} \right)}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial \left(\frac{p}{\rho} \right)}{\partial z} + g.$$

Отметим, что членом $u \partial u / \partial x$ мы не пренебрегли, как это было сделано в линейной теории.

Интегрируя второе уравнение, получаем (рис. XVII-7)

$$p = \rho g (-z + \eta).$$

На дне (при $z = -d$) имеем

$$p = \rho g (d + \eta).$$

Распределение давления является гидростатическим.

XVII-3.1.2. Величина $u(z)$ предполагается неизменной вдоль вертикали или, говоря более точно, равной скорости, осредненной по вертикали:

$$\bar{u} = \frac{1}{d + \eta} \int_{-d}^{\eta} u(z) dz.$$

В дальнейшем мы будем опускать знак осреднения. Средняя величина $u \partial u / \partial x$, выраженная через осредненную скорость, теоретически должна быть исправлена коэффициентом $(1 + \alpha) > 1$, учитывающим неоднородное распределение скорости по поперечному сечению. Этот коэффициент аналогичен коэффициенту α , который появляется при обобщении уравнения Бернулли (см. XII-2.2). Ради простоты мы будем пренебрегать этим поправочным множителем.

XVII-3.1.3. Дифференцируя величину $p = \rho g (-z + \eta)$ по x , получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнение движения вдоль оси OX приобретает простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

XVII-3.1.4. Поскольку волновое движение у дна имеет вполне ощутимые размеры, касательные напряжения, обусловленные трением, играют весьма значительную роль в теории длинных волн, так что уравнение движения длинных волн следует записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho(d + \eta)}.$$

Вообще говоря, предполагается, что величина τ связана со средней скоростью квадратичной зависимостью, т. е. $\tau = \rho f u^2$. При этом коэффициент f считается не зависящим от колебаний величины u во времени, т. е. таким же, как и при стационарном движении. Следовательно, коэффициент f можно выразить через коэффициент Шези $C_n = \sqrt{g/f}$, и уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{C_n^2} \frac{u |u|}{(d + \eta)}.$$

Мы уже видели, что коэффициенты трения, такие как f , C_n , n , используются в случае медленно изменяющегося потока. Очень часто их считают также применимыми и в случае нестационарного движения, обусловленного, например, волнами паводка или приливными явлениями в эстуариях. Однако надо ясно сознавать, что применение этих эмпирических величин на практике вызвано только недостаточным знанием процесса зарождения турбулентности и коэффициента трения в нестационарном движении. Мы знаем только, что применение коэффициента Шези к нестационарному движению справедливо при условии, что распределение скорости подвержено влиянию трения вплоть до свободной поверхности, как и в случае стационарного движения. Для этого необходимо, чтобы выражение для толщины пограничного слоя, которая растет с увеличением периода волны, дало величину, значительно превышающую фактическую глубину h . Надо также иметь в виду, что в морском эстуарии распределение плотности оказывает ощутимое влияние на распределе-

ние сил трения. Этот эффект можно учесть только путем анализа данных полевых наблюдений.

XVII-3.2. Уравнения Баррэ де Сен-Венана. Добавляя к полученному выше уравнению движения равную нулю величину $g d(d)/dx \pm gS$, где S — уклон дна, который может быть как положительным, так и отрицательным (в зависимости от направления движения относительно положительного направления оси X), и заменяя сумму $d + \eta$ полной глубиной h , а величину u величиной V , получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = \mp gS - \frac{g}{C_h^2} \frac{V |V|}{h}$$

Это уравнение известно как уравнение Сен-Венана. Ввиду его важности для исследования приливных эстуариев * дадим специальный вывод этого же выражения, не рассматривая его более как частный случай уравнения Эйлера или особую форму обобщенного уравнения Бернулли.

Рассмотрим слой жидкости толщиной dx с поперечным сечением h и массой $\rho h dx$. Если средняя скорость равна $V(x, t)$, то силы инерции будут

$$\rho h dx \frac{dV(x, t)}{dt} = \rho h dx \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right).$$

Эти силы инерции уравновешиваются силами давления, тяжести и трения. Давление предполагается гидростатическим, поэтому результирующая сила давления будет

$$\rho g \frac{h^2}{2} - \rho \frac{g}{2} \left[h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right]^2 = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} dx,$$

где

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(d)}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = -S + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Компонента силы тяжести в направлении движения равна $-gh dx S$, а сила трения равна $\rho g h V |V| / (C_h^2 R_H)$, где гидравлический радиус $R_H = h$. Суммируя эти выражения и деля все на $\rho h dx$, получаем уравнение Сен-Венана.

XVII-3.3. Учет кривизны траекторий. Уравнение Буссинеска. Рассмотрим снова уравнение Эйлера вдоль вертикальной оси

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

в котором мы полагаем $dw/dt \cong \partial w/\partial t$, т. е. пренебрегаем нелинейными членами $u \partial w/\partial z$ и $w \partial w/\partial z$, но не линейным членом $\partial w/\partial t$. Распределение давления, следовательно, не является более гидростатическим. Вертикальное ускорение $\partial w/\partial t$, обусловленное кривизной траекторий, видоизменяет этот простой закон следующим

* Оно является основным и при расчетах неустановившегося движения воды в каналах и реках. — Прим. ред.

образом. На горизонтальном дне вертикальная компонента придонной скорости w_b равна нулю. На свободной поверхности величина $w = w_s$ равна скорости самой свободной поверхности $d\eta/dt = \partial\eta/\partial t + u \partial\eta/\partial x$ (см. XVI-4.1). Нелинейным членом $u\partial\eta/\partial x$ также можно пренебречь, и тогда $w_s \cong \partial\eta/\partial t$. Следовательно, вертикальная скорость $w(z)$ возрастает от значения $w_b = 0$ до значения $w_s = \partial\eta/\partial t$. В самом общем случае можно сказать, что функция $w(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда:

$$w(z) = \frac{\partial\eta}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{z}{d+\eta} \right]^n,$$

где $A_1 = 1$ ($z = 0$ на дне). Рассматривая только первый член этого ряда ($n = 1$), имеем

$$w(z) = \frac{z}{d+\eta} \frac{\partial\eta}{\partial t},$$

что аналогично допущению, что величина w линейно изменяется от дна до свободной поверхности. Далее, полагая величину η малой по сравнению с d , находим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{z}{d+\eta} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.$$

Подставляя эту величину в уравнение Эйлера с отброшенными нелинейными членами, получаем

$$\frac{z}{d+\eta} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right).$$

Интегрирование этого выражения по вертикали от точки z до свободной поверхности, расположенной на расстоянии $(d+\eta)$ от начала отсчета, дает

$$\frac{p(z)}{\rho} - g[d+\eta-z] + \int_z^{d+\eta} \frac{z}{d+\eta} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} dz,$$

т. е.

$$\frac{p(z)}{\rho} = g[d+\eta-z] + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \frac{(d+\eta)^2 - z^2}{2(d+\eta)}.$$

Первый член представляет собой гидростатическое давление, а второй — поправку за счет вертикального ускорения. Дифференцируя полученное выражение по x , подставляя величину $\partial p/\partial x$ в уравнение Эйлера для горизонтальной оси и пренебрегая некоторыми малыми членами, получим

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial^3\eta}{\partial t^2 \partial x} \left[\frac{(d+\eta)^2 - z^2}{2(d+\eta)} \right].$$

Теперь, производя осреднение по вертикали и пренебрегая некоторыми членами из-за того, что $\eta \ll d$, можно получить

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{d+\eta} \int_{d-\eta}^{\eta} \left[g \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^3\eta}{\partial t^2 \partial x} \frac{(d+\eta)^2 - z^2}{2(d+\eta)} \right] dz.$$

Выполняем интегрирование и представляем полную производную от \bar{u} как сумму локальной и конвективной производных. Тогда

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial+\eta}{3} \frac{\partial^3\eta}{\partial t^2 \partial x}.$$

Первые три члена полученного уравнения хорошо знакомы, так как приводились раньше. Последний член представляет собой приближенную поправку за счет кривизны траекторий. Это уравнение известно как уравнение Буссинеска.

XVII-3.4. Уравнение неразрывности. XVII-3.4.1. В III-3.1 было показано, что уравнение неразрывности в случае двумерной длинной волны имеет вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial[u(d+\eta)]}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, в случае трехмерной длинной волны уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(d+\eta)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(d+\eta)] = 0.$$

XVII-3.4.2. В реке или эстуарии с постепенно изменяющейся шириной l уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AV)}{\partial x} = 0,$$

где $A = hl$ — поперечное сечение. Учитывая значение величины A в членах $\partial A/\partial t$ и $\partial(AV)/\partial x$ и пренебрегая величиной $\partial l/\partial t$ (т. е. считая, что $\partial l/\partial x \cong dl/dx$), получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{hu}{l} \frac{dl}{dx} = 0.$$

Первые два члена нам хорошо знакомы, а последний член представляет собой поправку, обусловленную некоторым изменением ширины dl/dx .

XVII-4. Линейная теория длинных волн

XVII-4.1. Основные допущения. Если пренебречь членами конвективной инерции и трения в уравнениях движения, то получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Аналогично, если в уравнении неразрывности пренебречь нелинейными членами $\partial(u\eta)/\partial x$ и $\partial(v\eta)/\partial y$, то будем иметь

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (ud)}{\partial x} + \frac{\partial (vd)}{\partial y}.$$

Полученная система уравнений лежит в основе линеаризованной теории длинных волн, которая применима при условии $\eta \ll d$ и $(\eta/L)(L/d)^3 \ll 1$.

В случае квазидвухмерного движения величиной v пренебрегают, и система уравнений записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (Au) + l \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

где A — площадь поперечного сечения, перпендикулярного к вектору скорости u , а l — ширина канала на уровне свободной поверхности. Эта система уравнений имеет большое количество точных решений для различных типов формы дна.

XVII-4.2. Линейные уравнения длинных волн (волновое уравнение). Рассмотрим в качестве примера двухмерный случай. Будем считать глубину бассейна d постоянной: $d = A/l$. Дифференцируя уравнение движения по x , а уравнение неразрывности — по t и исключая величину u , получаем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + gd \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Аналогично, дифференцируя уравнение движения по t , а уравнение неразрывности по x и исключая величину η , находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + gd \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

XVII-4.3. Гармоническое решение. Сейши. Можно без труда показать, что решения выведенных выше уравнений могут иметь либо форму прогрессивной волны вида

$$\eta = H \cos(mx - kt), \quad u = H \left[\frac{g}{d} \right]^{1/2} \cos(mx - kt),$$

где $m = 2\pi/L$, $k = 2\pi/T$, $L = T\sqrt{gd}$, либо форму стоячей волны вида

$$\eta = H \cos mx \cos kt, \quad u = H \left[\frac{g}{d} \right]^{1/2} \sin mx \sin kt.$$

Легко также показать, что линейная теория длинных волн представляет собой предельный случай теории волн малой амплитуды, когда $d/L \rightarrow 0$ (см. XVI-3).

XVII-5. Численные методы решения

XVII-5.1. Метод характеристик. XVII-5.1.1. Вывод уравнений характеристик. Рассмотрим теперь уравнения длинных волн в форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{уравнение движения}),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(d + \eta)]}{\partial x} = 0 \quad (\text{уравнение неразрывности}),$$

и определим величину $c = \sqrt{g(d + \eta)}$, имеющую размерность скорости. Добавляя к уравнению движения равную нулю величину

$$-\left[\frac{d(d)}{dx} + S \right] = 0$$

и имея в виду, что

$$\frac{\partial (d)}{\partial t} = 0,$$

получаем (так как величина g постоянная):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial [g(d + \eta)]}{\partial x} = -gS,$$

$$\frac{\partial [g(d + \eta)]}{\partial t} + \frac{\partial [ug(d + \eta)]}{\partial x} = 0.$$

Вводя величину $c^2 = g(d + \eta)$, дифференцируя $(\partial(c^2)/\partial t)^* = c \partial(2c)/\partial t^*$ и деля второе уравнение на c , находим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial (2c)}{\partial x} = -gS,$$

$$\frac{\partial (2c)}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (2c)}{\partial x} = 0.$$

Складывая и вычитая оба уравнения, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \mp 2c) + (u \mp c) \frac{\partial}{\partial x} (u \mp 2c) = -gS.$$

Напомним теперь, что полная производная от $A(x, t)$ по t будет

$$\frac{dA(x, t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, левая часть приведенного выше уравнения представляет собой полную производную

$$\frac{d}{dt} (u \mp 2c)$$

при условии, что

$$\frac{dx}{dt} = u \mp c.$$

Это значит, что вдоль линии, имеющей наклон $dx/dt = u \mp c$, выполняется соотношение (рис. XVII-8)

$$\frac{d}{dt}(u \mp 2c) = -gS.$$

Линии, имеющие наклон $dx/dt = u + c$, называются прямыми или положительными характеристиками, а линии, имеющие наклон $dx/dt = u - c$, называются обратными, или отрицательными, характеристиками.

Очевидно, что из данной точки (x, t) на плоскости (X, T) можно провести две линии с наклонами $u + c$ и $u - c$.

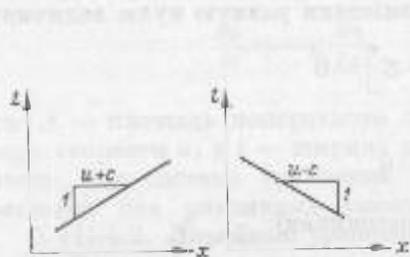


Рис. XVII-8. Прямая и обратная характеристики.

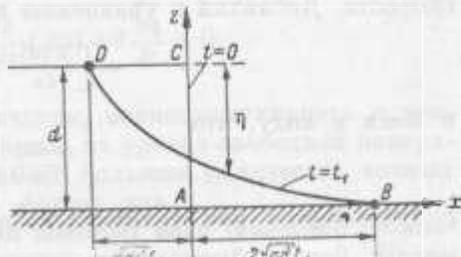


Рис. XVII-9. Задача о разрушении плотины. Обозначения. $AB = 2CD$.

XVII-5.1.2. Приложение метода характеристик к задаче о разрушении плотины. В случае горизонтального дна величина S равна нулю и $(d/dt)(u \mp 2c) = 0$, т. е. величина $u \mp 2c$ равна постоянным K_1 и K_2 вдоль линий, имеющих наклоны соответственно $dx/dt = u - c$ и $dx/dt = u + c$.

Рассмотрим случай вертикальной стены воды, внезапно лишенной боковой опоры, — это может иметь место в случае быстрого разрушения плотины (рис. XVII-9). Очевидно, что в момент $t = 0$ мы имеем $u = 0$ и $c = \sqrt{gd}$, где d — глубина, так что величины K_1 и K_2 будут:

$$u + 2c = K_1 = 2\sqrt{gd},$$

$$u - 2c = K_2 = -2\sqrt{gd}.$$

В момент $t = t_0$ стена воды разрушается. На переднем краю водяного «языка» $\eta = -d$ и $c = 0$. Отсюда скорость этого переднего края равна $dx/dt = u(+0)$ и, таким образом, из соотношения

$$(u - 2c)|_{t=0} = (u + 2c)|_{t=t}$$

получаем

$$0 + 2\sqrt{gd} = u,$$

так что передний конец водяного языка движется со скоростью $2\sqrt{gd}$. Скорость волны понижения, распространяющейся вверх по

течению, где $\eta = 0$ и $u = 0$, равна $dx/dt = 0 + c$, т. е. из соотношения

$$(0 + 2c)|_{t=0} = (0 + 2c)|_{t=t}$$

получаем

$$c = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gd}.$$

XVII-5.1.3. Практический метод решения. В общем изменении величин u и η (или c) достаточно плавны, чтобы можно было применить метод конечных разностей. Тогда основные уравнения, записанные для конечных интервалов Δx , Δy , будут

$$\Delta(u \mp 2c) = -gS \Delta t \text{ вдоль}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u \mp c.$$

Теперь можно шаг за шагом проследить эволюцию волны во времени следующим образом. Пусть для данной волны в момент

$t = t_1$ вдоль оси Ox заданы величины $u(x, t_1)$ и $\eta(x, t_1)$ или $c(x, t_1)$ (рис. XVII-10). Находим значения u и c в этот же момент в точках, отстоящих друг от друга на расстояниях Δx . Затем проводим характеристику с наклоном $\Delta x/\Delta t = u_1 + c_1$ из точки 1 и характеристику с наклоном $\Delta x/\Delta t = u_2 - c_2$ из точки 2. Их пересечение в точке 3

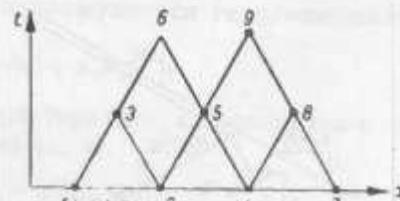


Рис. XVII-10. Применение метода характеристик.

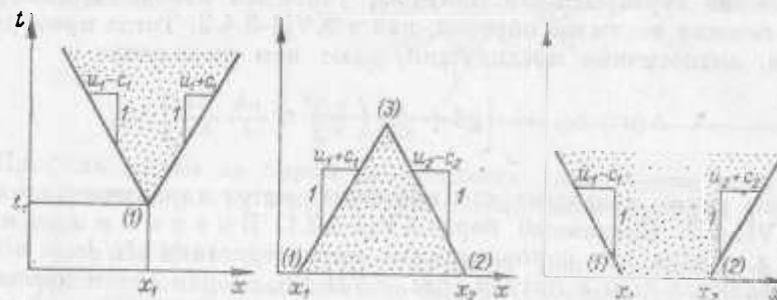


Рис. XVII-11. Область влияния и область зависимости.

графически определяет точку (x_3, t_3) . Теперь, применяя уравнения характеристик вдоль этих линий, находим величины u_3 и c_3 (т. е. и η_3), решая систему:

$$u_3 + 2c_3 = u_1 + 2c_1 - gS_1(t_3 - t_1),$$

$$u_3 - 2c_3 = u_2 - 2c_2 - gS_2(t_3 - t_2).$$

В частном случае, показанном на рис. XVII-10, имеем $t_2 = t_1$. Аналогично, проведя характеристики из точек 2 и 4, мы найдем u_5 и c_5 , а проведя характеристики из 3 и 5, найдем u_6 и c_6 , и т. д.

XVII-5.1.4. Область влияния и область зависимости. Из изложенного выше процесса вычислений видно, что состояние волны в данной точке $I(x_1, t_1)$ оказывает влияние на состояние волны в любой другой точке, которая находится между характеристиками, исходящими из точки I (рис. XVII-11). Эти две характеристики определяют область влияния данной точки I . Аналогично, состояние волны в точке Z зависит исключительно от состояния волны в зоне, ограниченной двумя характеристиками, пересекающимися в точке Z и подходящими к ней снизу. Эта зона является областью зависимости точки Z .

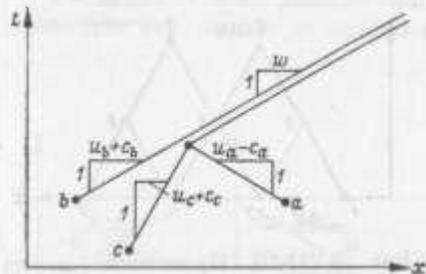


Рис. XVII-12. Возникновение бора.

Любое возмущение, возникающее на конечном интервале $(x_2 - x_1)$, будет оказывать влияние на поведение жидкости в пределах области, ограниченной отрицательной характеристикой, исходящей из точки x_1 , и положительной характеристикой, исходящей из x_2 .

XVII-5.1.5. Метод характеристик в приложении к приливному эстуарию.

В случае приливного эстуария необходимо учитывать придонное трение и изменение поперечного сечения. Уравнение движения получим, вводя в него придонное трение подобно тому, как это сделано в XVII-3.1.4. Уравнение неразрывности получим, учитывая изменение поперечного сечения таким же образом, как в XVII-3.4.2. Тогда преобразования, аналогичные предыдущим, дают нам выражение

$$\Delta(u \mp 2c) = - \left[gS + \frac{g}{c^3} \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 \mp \frac{uh}{l} \frac{\Delta l}{\Delta x} \right] \Delta t,$$

которое также позволяет нам применить метод характеристик.

XVII-5.2. Приливный бор. XVII-5.2.1. Возникновение бора. Когда две положительные характеристики $dx/dt = u + c$ пересекаются друг с другом (рис. XVII-12), то для точки пересечения можно определить две различные системы величин: одну (u_2 и c_2) — по характеристикам, исходящим из точек a и b , и вторую (u_1 и c_1) — по характеристикам, исходящим из точек a и c .

Двойное значение u и двойное значение c в одном и том же месте и в один и тот же момент означает наличие здесь разрыва или вертикальной водяной стены. Эта ситуация соответствует началу возникновения бора.

XVII-5.2.2. Движение бора. Линия $dx/dt = W$, где W — скорость распространения бора, является линией разрыва на сетке, образованной положительными и отрицательными характеристиками. В самой точке разрыва (вертикального водяного уступа) подлежащими определению неизвестными являются пять величин, а именно: u_1 и η_1 на низкой стороне бора, u_2 и η_2 — на высокой стороне бора

и сама скорость бора W . Поскольку $W > u_1 + c_1$, то величины u_1 и η_1 определяются непосредственно с помощью метода характеристик (рис. XVII-13), а величины u_2 , η_2 и W находятся из следующих трех уравнений:

1) уравнения импульса для движущегося гидравлического прыжка

$$\frac{\rho g}{2} [h_2^2 - h_1^2] = \rho h_1 (u_2 - u_1) (W - u_1);$$

2) уравнения неразрывности для движущегося гидравлического прыжка

$$u_2 h_2 = W (h_2 - h_1) + u_1 h_1;$$

3) уравнения положительных характеристик, сливающихся с линией бора в рассматриваемой точке (x, t) ,

$$u_2 + 2c_2 = u_0 + 2c_0 - gS(t_2 - t_0).$$

При этом отметим, что $u_2 + c_2$ всегда больше, чем W .

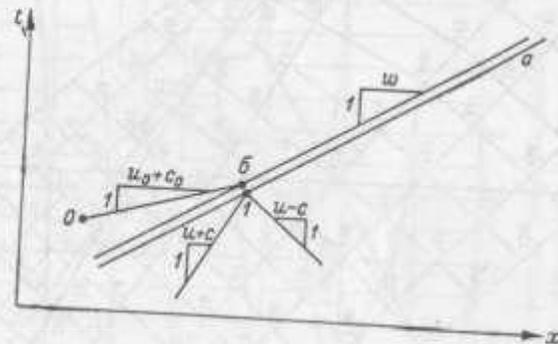


Рис. XVII-13. Распространение бора. a — линия бора.

Профиль волны за бором определяется далее путем использования значений u_2 и c_2 и применения метода характеристик в обычном виде.

На рис. XVII-14 в качестве примера использования метода характеристик изображено решение задачи о предельной уединенной волне (см. XVII-6.2), движущейся над горизонтальным дном и подходящей к уклону дна, равному 1 : 10. На рис. XVII-15 показаны последовательные профили волны, полученные путем интерполяции значений η между точками пересечения характеристик.

XVII-5.3. Прямые численные решения. Применение метода характеристик требует, чтобы в каждой точке пересечения были найдены четыре неизвестные величины: x , t , u и η . Если, однако, значения x и t задать заранее, то остаются только две неизвестные: u и η . Таким образом, уравнения длинных волн можно использовать для непосредственного перехода к конечно-разностным операциям, в которых интервалы Δx и Δt , т. е. значения x и t , заданы независимо от линий характеристик. С этой целью могут быть использованы прямоугольная либо шахматная сетка (рис. XVII-16).

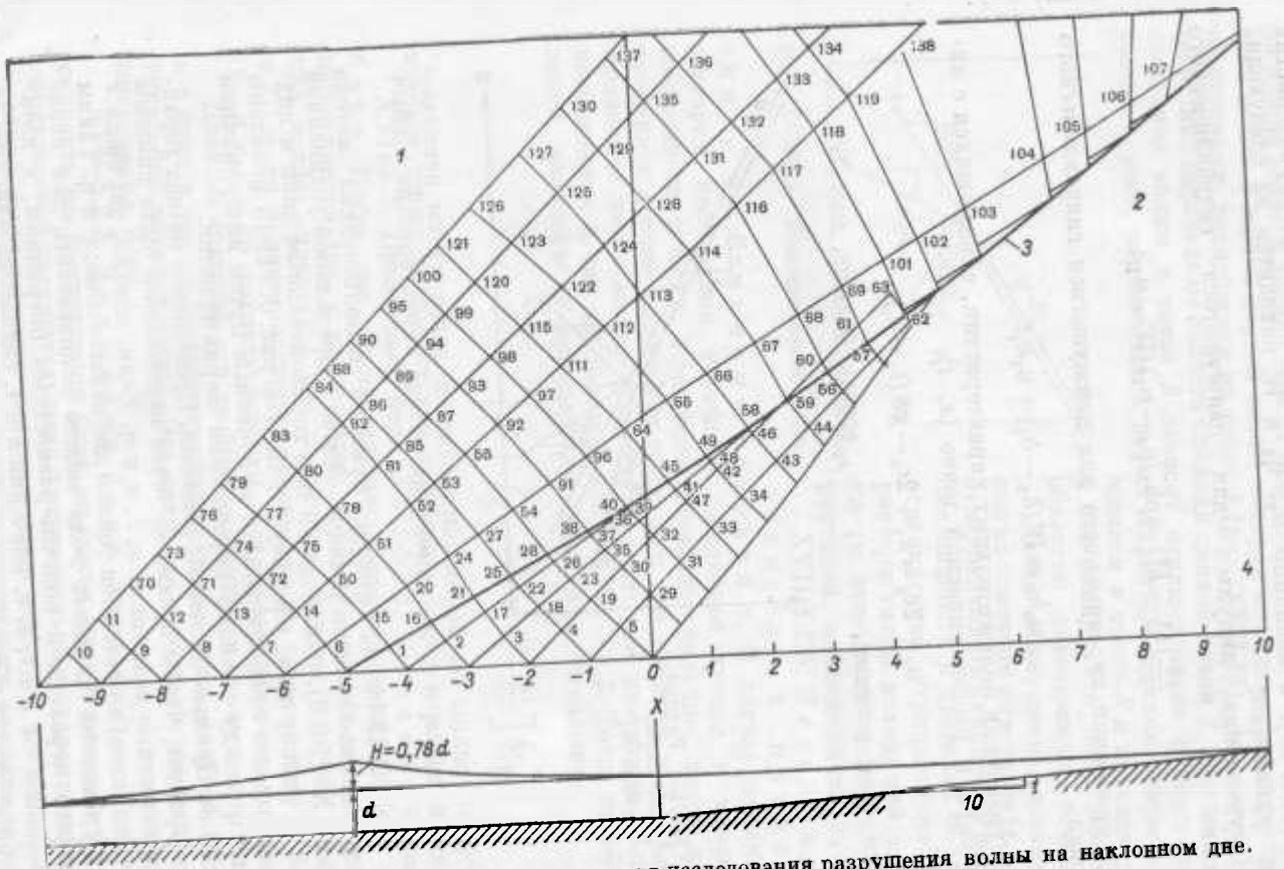


Рис. XVII-14. Применение метода характеристик для исследования разрушения волны на наклонном дне.
 1 — область с горизонтальным дном; 2 — область с уклоном дна 1 : 10; 3 — линия бора; 4 — берег.

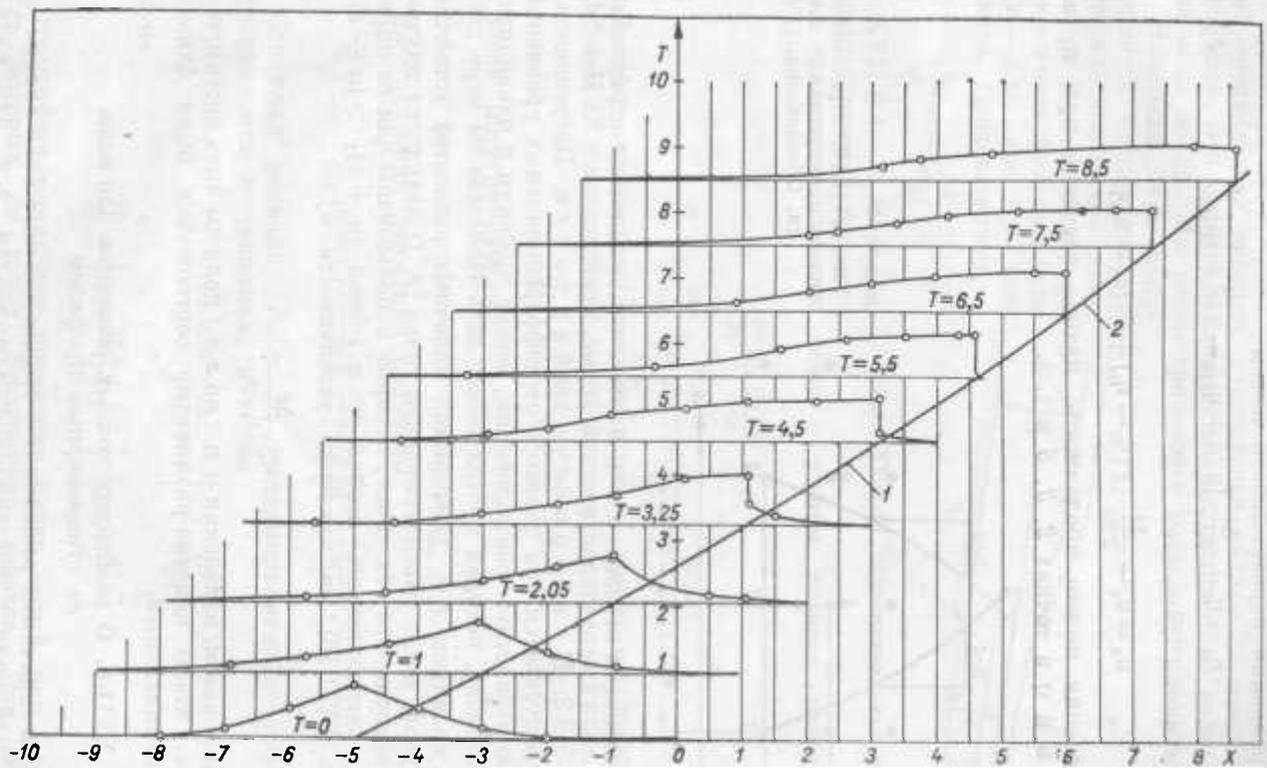


Рис. XVII-15. Последовательные профили волны, разрушающейся на участке с дном, имеющим уклон 1 : 10.
 1 — линия скользящего буруна; 2 — линия бора

XVII-5.3.1. Метод прямоугольной сетки. Величины u и η в точке 4 на рис. XVII-16 могут быть непосредственно определены из величин u и η в точках 1 и 2 следующим образом.

Из уравнения неразрывности имеем

$$\eta_4 = \eta_2 + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u(d+\eta)|_3 - u(d+\eta)|_1],$$

а из уравнения движения

$$u_4 = u_2 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [g(\eta_3 - \eta_1) + u_2(u_3 - u_1)].$$

Вычисления можно продолжить, находя значения u_5 и η_5 из величин u и η в точках 2, 3, 6 и т. д.

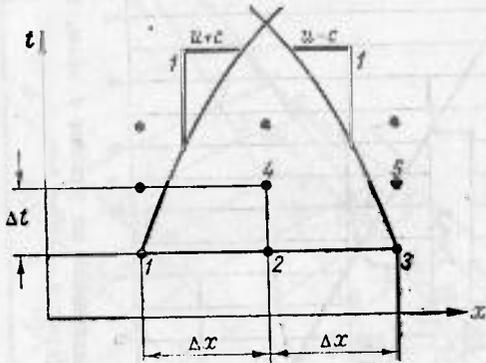


Рис. XVII-16. Применение метода прямоугольной сетки. Обозначения.

Подобный же метод можно применить, используя уравнение длинных волн в характеристической форме, приведенное в XVII-3.2.1.

XVII-5.3.2. Критерий устойчивости. Погрешность, которая допускается при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным соотношениям, может привести к накапливающейся ошибке, которая иногда может дать «всплеск» по мере увеличения величины $t = \sum \Delta t$. Метод конечных разностей устойчив в том случае, когда рассматриваемая точка (x, t) находится внутри области зависимости тех точек, которые использованы для ее определения. Следовательно, поскольку в общем $(u+c)_1 > (u-c)_3$ (см. рис. XVII-16), то критерий устойчивости будет

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{u+c}.$$

Таким образом, изменения u и c по x и t должны быть достаточно плавными, чтобы конечно-разностные соотношения были близки к дифференциальным.

XVII-6. О некоторых точных решениях для волн со стационарным профилем

В общем типичными решениями в теории длинных волн являются решения для волн с нестационарным профилем, т. е. для волн, профиль которых изменяет свою форму по мере движения волны.

Это свойство следует из уравнений длинных волн. Однако введение в уравнения длинных волн членов донного трения и вертикального ускорения (даже в приближенной форме) позволяет найти некоторые специальные решения, отвечающие волнам со стационарным профилем. Это «моноклиальные» волны, уединенные волны и кноидальные волны. Мы рассмотрим здесь только первые два вида.

Напомним, что допущение о стационарности профиля идентично тому, что мы ищем решение для η и u в виде функции типа $f(x - Ct)$, где C — константа. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial x}.$$

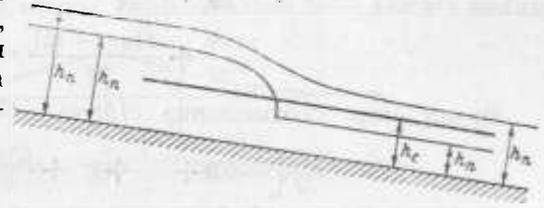


Рис. XVII-17. Моноклиальная волна.

XVII-6.1. Моноклиальные волны. Рассмотрим уравнения длинных волн с учетом донного трения (см. XVII-3.1.4):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = gS - \frac{g}{C_h^2} \frac{u|u|}{h}.$$

Вводя соотношение $\partial/\partial t = -C \partial/\partial x$ в уравнение неразрывности, получаем

$$(u - C) \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

а после интегрирования

$$(u - C)h = A = \text{const}.$$

Из уравнения движения получаем

$$(u - C) \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \left[S - \frac{u^2}{C_h^2 h} \right].$$

Исключая величину $\partial u/\partial x$ из модифицированных уравнений неразрывности и движения, находим

$$\left[g - \frac{(u - C)^2}{h} \right] \frac{\partial h}{\partial x} = g \left[S - \frac{u^2}{C_h^2 h} \right],$$

откуда

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left[S - \frac{(Ch + A)^2}{C_h^2 h^3} \right] : \left[1 - \frac{A^2}{gh^3} \right].$$

Это дифференциальное уравнение имеет целый ряд решений, часть которых не имеет физического смысла. Вид решения зависит от того, будет ли глубина воды больше или меньше критической глубины (рис. XVII-17). Соответствующие волны называются

моноклинальными волнами, или однородно-прогрессивным (поступательным) потоком. Теория этих волн особенно пригодна для исследования волн паводка на реках.

XVII-6.2. Теория уединенной волны. Рассмотрим уравнения длинных волн над горизонтальным дном с учетом вертикального ускорения, как это показано в XVII-3.3 и XVII-3.4.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{d+\eta}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(d+\eta)]}{\partial x} = 0.$$

Вводя сюда соотношение $\partial/\partial t = -C\partial/\partial x$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-Cu + \frac{u^2}{2} + g\eta + \frac{C^2 h}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [-C\eta + (d+\eta)u] = 0.$$

Выражения в квадратных скобках независимы от x и, следовательно, представляют собой константы. Очевидно, что эти константы равны нулю, поскольку u и η стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Исключая u , получим

$$\frac{C^2 \eta}{d+\eta} = \frac{C^2 \eta^2}{2(d+\eta)^2} + g\eta + \frac{C^2 (d+\eta)}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

откуда, полагая величину η малой по сравнению с d и используя приближенное выражение для квадратного корня согласно формуле $(1 + \alpha)^{1/2} \cong 1 + \alpha/2$, находим

$$C = \left[g(d+\eta) \left(1 + \frac{\eta}{4d} + \frac{d^2}{6\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right]^{1/2}.$$

Если пренебречь кривизной свободной поверхности, то выражение для C примет вид

$$C = \sqrt{gd} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\eta}{d} \right].$$

Это выражение можно получить и непосредственно, применяя теорему импульсов.

В этом случае, поскольку величина C считается постоянной, а профиль не изменяется во времени, мы должны иметь

$$1 + \frac{\eta}{4d} + \frac{d^2}{6\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \text{const} = \frac{H}{2d}.$$

где H — константа, смысл которой будет определен ниже. Это уравнение можно проинтегрировать следующим образом. Запишем его в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{3\eta}{2d^3} [2H - 3\eta],$$

и, поскольку $\partial\eta/\partial x = 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, то

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx = \frac{3\eta}{d^3} (2H - 3\eta) d\eta,$$

или

$$\left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \frac{3\eta^2}{d^3} (H - \eta).$$

Мы видим, что в случае, когда $\eta = H$, мы имеем $d\eta/dx = 0$, что соответствует вершине волны, следовательно H — высота волны.

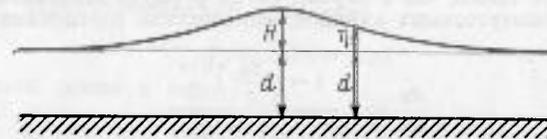


Рис. XVII-18. Уединенная волна.

Это уравнение можно еще записать в виде

$$\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{3}{d^3} \right)^{1/2} \eta (H - \eta)^{1/2}$$

и после разделения переменных его можно проинтегрировать

$$\int \frac{d\eta}{\eta \sqrt{H - \eta}} = \int \left(\frac{3}{d^3} \right)^{1/2} dx,$$

откуда получаем профиль волны

$$\eta = \frac{H}{\text{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{H}{d} \right)^{1/2} \frac{x}{d} \right]},$$

который показан на рис. XVII-18.

УПРАЖНЕНИЯ

XVII-1. Определите для канала кругового сечения величину гидравлического радиуса R_H как функцию максимальной глубины.

XVII-2. Трапециевидный канал имеет ширину по дну 40 футов при уклоне боковых откосов 45° . Уклон дна $S = 0,002$, а коэффициент Маннинга $n = 0,03$. Рассчитайте кривую для нормальной глубины y_n как функцию от расхода Q_n вплоть до величины $Q = 1000$ фут³/с. Рассчитайте кривую, выражающую критический расход Q_c , как функцию от критической глубины y_c и определите величину расхода для случая, когда критическая глубина равна нормальной.

XVII-3. Может ли канал иметь такое поперечное сечение, что его гидравлический радиус R_H остается постоянным при любой глубине h ?

О т в е т:

$$R_H = \frac{A}{P} = \frac{dA}{dP} = \frac{b dh}{\sqrt{db^2 + dh^2}}.$$

Интегрируя и полагая $b = R_H$ при $h = 0$, находим

$$h = R \left[\ln \left(b + \sqrt{b^2 + R^2} \right) - \ln R \right].$$

XVII-4. Покажите, что уклон свободной поверхности в стационарном медленно изменяющемся потоке в открытом канале представляет собой сумму наклона линии энергии и наклона, обусловленного изменением скорости $(d/dx)(V^2/2g)$.

XVII-5. Покажите, что

$$\frac{dy}{dx} = S \frac{1 - \left(\frac{Q}{Q_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{Q}{Q_c}\right)^2},$$

где S — уклон дна, Q — расход, Q_n — нормальный расход, Q_c — критический расход. Покажите также, что в случае, когда формула Маннинга используется для широких прямоугольных каналов, справедливо соотношение

$$\frac{dy}{dx} = S \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^3}.$$

Покажите также, что в прямоугольном канале с переменной шириной l

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - S_f + \frac{Q^2 y}{gA^3} \frac{dl}{dx}}{1 - \frac{Q^2 l}{gA^3}}$$

XVII-6. Определите все возможные виды кривой свободной поверхности, какие могут встретиться в прямоугольном канале, используя формулу

$$\frac{dy}{dx} = S \frac{y^3 - y_n^3}{y^3 - y_c^3}$$

и варьируя знак S и относительные значения величин y , y_n и y_c .

XVII-7. Определите все виды профиля водной поверхности, какие могут встретиться в ситуации, изображенной на рисунке. Рассмотрите два случая.

В одном случае нормальная глубина больше критической, а в другом критическая глубина больше нормальной. Рассмотрите затвор «о» рассматривайте как переменную величину n , причем «о» может быть меньше и/или больше, чем h_c и h_n .

XVII-8. Установите, при каких условиях существуют две нормальные глубины и две критические глубины в закрытом русле кругового сечения. Определите все кривые

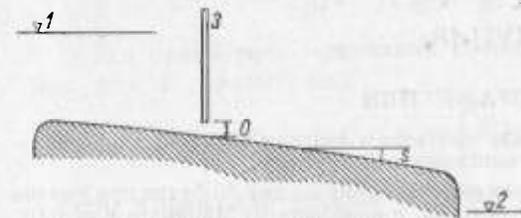


Рис. к упражнению XVII-7.

1 — уровень перед затвором; 2 — уровень за водосливом; 3 — затвор.

свободной поверхности, возможные в таком русле.

XVII-9. Найдите условие, необходимое для определения гидравлического прыжка на резком уступе дна и соответствующее различиям доущениям в отношении точного местоположения прыжка относительно уступа.

XVII-10. Рассмотрите вертикальную струю, падающую в центр широкой круглой горизонтальной плоскости. Плоскость ограничена на краях водосливом при условии квазипостоянной глубины h . Определите местоположение кругового гидравлического прыжка как функцию расхода струи Q и величины h . Донным трением пренебречь.

XVII-11. Рассмотрите диаграмму, изображающую линию энергии, показанную на рис. XVII-5. Какие изменения в рисунке необходимы в случае нестационарного движения?

XVII-12. Покажите, что уравнения длинных волн можно привести к выражениям:

$$u + 2c = \text{const}, \quad u - 2c = \text{const}$$

вдоль линий, определяемых наклоном

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c \pm \frac{gS}{\frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c)}$$

О т в е т: характеристическое уравнение

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2c) = -gS$$

можно записать также в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) \pm \left[u \pm c \pm \frac{gS}{\frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c)} \right] \frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(u \pm 2c) = 0$$

для линий определенного наклона.

XVII-13. Преобразуйте дифференциальные уравнения, используемые в методе характеристик для изучения распространения двумерных длинных волн, в конечно-разностную систему, соответствующую интервалам Δx и Δt , образующим прямоугольную сетку. Прделайте то же самое для случая шахматной сетки.

XVII-14. Покажите, что уравнение Сен-Венана можно записать в виде

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = F,$$

где $\alpha = (Q^2 - gA^3/l)$, $\beta = QA$, $\gamma = A^3$, $F = A^3 g [(A/l^2) dl/dx - S - (lQ/Q)/(C_h^2 A^3)]$, и дайте определение для φ .

О т в е т: уравнение неразрывности — $\partial A/\partial t + \partial Q/\partial x = 0$, $Q = \partial \varphi/\partial t$; $A = -\partial \varphi/\partial x$, $d\varphi = Q dt - A dx$.

Тогда величины $u = Q/A$ и $h = A/l$ (где l — ширина) выражаются как функции от φ в уравнении движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -gS - \frac{g}{C_h^2 R_H} |u|.$$

Глава XVIII

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ КАК СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

XVIII-1. Гармонический анализ

XVIII-1.1. Представление синусоидальных волн в амплитудно-частотной плоскости. Рассмотрим синусоидальную волну

$$\eta = A \cos(mx + kt + \varepsilon),$$

где A — амплитуда, $m = 2\pi/L$ и $k = 2\pi/T$ (L — длина волны, а T — период) и ε — фазовый угол. При наблюдении в фиксированной

точке колебания уровня будут функцией только от времени, и если выбор начала отсчета соответствует нулевой начальной фазе, то эти колебания запишутся в виде

$$\eta = A \cos kt.$$

Такую волну можно охарактеризовать амплитудой A и частотой k (в радианах за единицу времени). Эта характеристика графически изображена на рис. XVIII-1, который приводит нас к понятию амплитудного спектра.

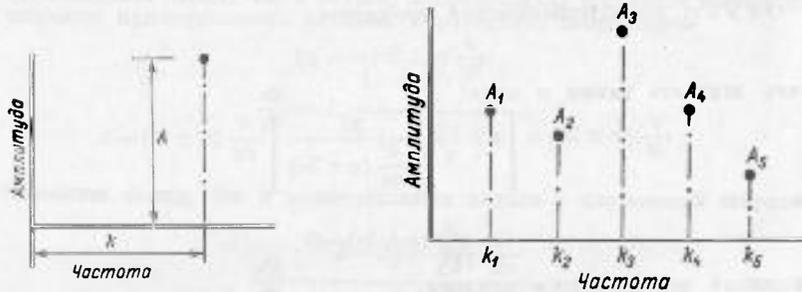


Рис. XVIII-1. Амплитудный спектр синусоидальной волны.

Рис. XVIII-2. Амплитудный спектр периодической волны произвольной формы.

Представим себе волну произвольной формы, но имеющую период T (и частоту $2\pi/T$). Пусть требуется представить такую волну с помощью амплитудного спектра, подобного тому, который изображен на рис. XVIII-1. Напомним, что почти любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда Фурье с основным периодом T и гармониками высших порядков. Таким образом

$$\eta = \sum A_n \cos(nkt + \epsilon_n).$$

Такая волна будет иметь амплитудно-частотный спектр, изображенный на рис. XVIII-2.

Рис. XVIII-3. Амплитудный спектр двух синусоид.

Если водная поверхность описывается комбинацией целого ряда волн, имеющих различные периоды (частоты), то ее также можно представить с помощью диаграммы, подобной той, которая показана на рис. XVIII-2. Например, сумма двух синусоид разного периода (T_1 и T_2) представлена на рис. XVIII-3.

XVIII-1.2. Анализ Фурье. XVIII-1.2.1. Сразу же возникает желание обратиться к реальной волнограмме, пример которой приведен на рис. XVIII-4. Допустим, что такая кривая может быть представлена в интервале $0 < t < T_1$ в виде ряда Фурье

$$\eta(t) = \frac{A_0}{2} + \sum \left[A_n \cos \frac{2\pi nt}{T_1} + B_n \sin \frac{2\pi nt}{T_1} \right].$$

и оценим коэффициенты A_n и B_n . Предельное значение n пока не задано. Вообще следовало бы взять $1 < n < \infty$, но очевидно, что можно взять и ограниченное число членов ряда, так как и с помощью конечного числа членов можно надеяться добиться хорошего совпадения с реальной кривой, изображенной на рис. XVIII-4.

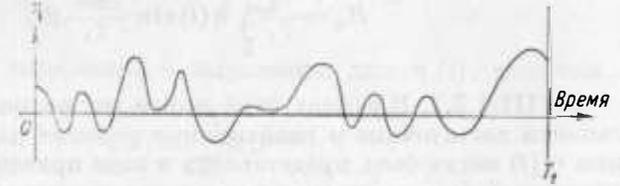


Рис. XVIII-4. Типичная запись морского волнения.

Чтобы определить коэффициенты A_n и B_n в правой части записанного выше уравнения, напомним, что

$$\int_0^{T_1} \cos \frac{2\pi nt}{T_2} \sin \frac{2\pi mt}{T_2} dt = 0 \quad \text{для всех } m \text{ и } n,$$

$$\int_0^{T_1} \cos \frac{2\pi nt}{T_1} \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt = 0 \quad \text{для } m \neq n,$$

$$\int_0^{T_1} \cos \frac{2\pi nt}{T_1} \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt = \frac{T_1}{2} \quad \text{для } m = n,$$

$$\int_0^{T_1} \sin \frac{2\pi nt}{T_1} \sin \frac{2\pi mt}{T_1} dt = 0 \quad \text{для } m \neq n,$$

$$\int_0^{T_1} \sin \frac{2\pi nt}{T_1} \sin \frac{2\pi mt}{T_1} dt = \frac{T_1}{2} \quad \text{для } m = n.$$

Используем эти свойства, умножая обе части уравнения для $\eta(t)$ на $\cos 2\pi mt/T_1$ и интегрируя от 0 до T_1 :

$$\int_0^{T_1} \eta(t) \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt = \frac{A_0}{2} \int_0^{T_1} \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt +$$

$$+ \sum_n A_n \int_0^{T_1} \cos \frac{2\pi nt}{T_1} \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt +$$

$$+ \sum_n B_n \int_0^{T_1} \sin \frac{2\pi nt}{T_1} \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt = \frac{A_n T_1}{2},$$

так что получаем

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \cos \frac{2\pi mt}{T_1} dt,$$

и аналогично

$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \sin \frac{2\pi mt}{T_1} dt.$$

XVIII-1.2.2. В рамках этой книги мы не можем строго и полно вывести достаточные и необходимые условия для того, чтобы функция $\eta(t)$ могла быть представлена в виде приведенной выше системы уравнений (этот вопрос изложен в многочисленных руководствах по анализу Фурье). Для наших целей достаточно привести одно из необходимых условий, а именно

$$\int_0^{T_1} |\eta(t)| dt \neq \infty.$$

Это условие удовлетворяется, если величина T_1 конечна.

Коэффициенты A_n и B_n могут быть представлены на двух графиках, подобных рис. XVIII-2, — один для A_n , другой для B_n . Точки для каждого коэффициента лягут на абсциссы, кратные частоте $k_n = 2\pi/T_1$, где T_1 — продолжительность записи.

Для того чтобы коэффициенты Фурье A_n и B_n могли характеризовать состояние поверхности моря в любое время, продолжительность записи должна быть очень большой. Предельное значение n должно быть очень велико и процедура анализа Фурье — чрезвычайно трудоемкой. Сравнительно короткие волнограммы дают величины A_n и B_n , которые характеризуют лишь картину, отраженную данными частными сериями наблюдений в данный промежуток времени и в данном месте. Записи, произведенные даже на несколько минут раньше или позже данной или в нескольких футах в стороне от нее, дают совершенно другие значения A_n и B_n . Такой упрощенный анализ Фурье является неустойчивым, поэтому необходимо найти значительно более стабильные характеристики состояния поверхности моря.

XVIII-1.3. Анализ Фурье в экспоненциальной форме. Выражения для ряда Фурье, полученные выше, удобнее применять в экспоненциальной форме. Известные преобразования

$$\cos nkt = \frac{1}{2} (e^{inkt} + e^{-inkt}), \quad \sin nkt = \frac{1}{2} (e^{inkt} - e^{-inkt})$$

позволяют записать выражение для $\eta(t)$ в виде

$$\eta(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (A_n - iB_n) e^{inkt} + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (A_n + iB_n) e^{-inkt}.$$

Из определения A_n и B_n следует, что $A_n = A_{-n}$, поскольку $\cos(-nkt) = \cos nkt$ и $B_n = -B_{-n}$, поскольку $\sin(-nkt) = -\sin nkt$, так что последний член в уравнении для $\eta(t)$ запишется в виде

$$\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (A_n + iB_n) e^{-inkt} \equiv \frac{1}{2} \sum_{-1}^{-\infty} (A_n - iB_n) e^{inkt}.$$

Подставляя это выражение в выражение для $\eta(t)$, получим

$$\eta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A'_n e^{inkt},$$

где

$$A'_n = \frac{1}{2} (A_n - iB_n).$$

Отсюда

$$A'_n = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) e^{-inkt} dt \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Мы видим, что величина A'_n представляет собой комплексную функцию частоты (nk) для данной записи $\eta(t)$ продолжительности T_1 , содержащую информацию о фазах и амплитудах компонент, из которых состоит кривая $\eta(t)$. Эта операция называется преобразованием Фурье.

XVIII-1.4. Случайные функции. Как уже говорилось, возникает вопрос о получении более стабильных характеристик состояния поверхности моря и метода, позволяющего использовать более продолжительные волнографические записи. По мере стремления продолжительности записи к бесконечности условие

$$\int_0^{T_1} |\eta(t)| dt \neq \infty$$

будет, очевидно, нарушаться. Преобразование Фурье, дающее величину A'_n , уже не будет правомерным. Для того чтобы оперировать со случайным процессом с помощью общих понятий гармонического анализа, приходится использовать несколько иной метод. Случайным процессом называется процесс, в котором флуктуации наблюдаемой величины, являющейся функцией времени, не могут быть точно предсказаны. Никакие две записи колебаний водной поверхности никогда не оказываются идентичными. Они обладают, однако, некоторыми статистическими свойствами, вполне поддающимися идентификации. Когда морская поверхность взволнована беспорядочным и случайным образом и разнообразие волн бесконечно, то ее характеристика с помощью описания формы этих волн находится в противоречии с существенными свойствами и чертами самого процесса. В этом случае нужны характеристики, общие для любого участка и временного интервала.

XVIII-1.5. **Автокорреляция.** Представим себе наблюдателя, регистрирующего возвышение уровня морской поверхности в момент $t = t_1$ в фиксированной точке. Что он может сказать о возвышении морской поверхности в момент $t_1 + \Delta t$, где $\Delta t = 0,1; 1,0; 10$ или 100 с? Если наблюдатель регистрирует синусоидальную группу волн, то он может довольно много сказать о том, какой уровень будет наблюдаться в момент $t + \Delta t$, но если процесс является случайным, то с уверенностью об этом судить нельзя. Самое лучшее, что может сделать наблюдатель, это дать какую-то оценку ожидаемой величины подъема уровня (ожидаемая величина определяется как средняя из бесконечного числа наблюденных величин). Задача состоит в том, чтобы связать возвышение в момент t с его величиной в момент $t + \Delta t$. Корреляционная функция

$$R(\tau) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \eta(t + \tau) dt$$

позволяет предсказать ожидаемую (среднюю) величину произведения двух значений возвышения уровня, относящихся к одному месту и разделенных интервалом времени τ . Функцию $R(\tau)$ называют **автокорреляционной функцией** от $\eta(t)$, чтобы подчеркнуть, что значения $\eta(t)$ и $\eta(t + \tau)$ относятся к одной волнограмме. В некоторых случаях используется взаимная корреляция между различными записями.

Установлены некоторые свойства автокорреляции, определяемой функцией $R(\tau)$:

1) автокорреляционная функция является четной, т. е.

$$R(\tau) = R(-\tau) \text{ или}$$

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \eta(t + \tau) dt = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \eta(t - \tau) dt;$$

2) значение автокорреляционной функции при $\tau = 0$ равно среднему квадрату флуктуаций водной поверхности, поскольку

$$R(\tau = 0) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta^2(t) dt;$$

3) значение автокорреляционной функции при $\tau \rightarrow \infty$ равно нулю, если наблюдаемое явление состоит из непериодических или «плывущих» компонент. Доказательство этого свойства выходит за рамки данной книги. Укажем, однако, что если процесс является случайным, то корреляция между результатами наблюдений в моменты t и $t + \tau$ будет стремиться к бесконечно малой величине по мере роста величины τ .

XVIII-1.6. **Автокорреляция и плотность энергетического (или дисперсионного) спектра.** XVIII-1.6.1. **Дельта-функция**

Дирака. Введем понятие спектра плотности (амплитудного или частотного) в области переменной частоты. Понятие о спектральной плотности аналогично понятию плотности вероятности. Спектр плотности энергии фактически выражает быстроту изменения дисперсии или производную от сигнала по частоте. Однако вместо самой амплитуды используется ее квадрат. Спектр плотности, соответствующий простой синусоидальной волне (см. рис. XVIII-3), будет представлять собой пик бесконечной высоты на частоте $2\pi/T$, поскольку изменение квадрата амплитуды по частоте равно бесконечности. Однако по определению этот пик имеет конечную площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(k) dk = \frac{1}{2} A^2.$$

Такую функцию называют дельта-функцией Дирака. Периодическая волна произвольной формы, имеющая амплитудный спектр, показанный на рис. XVIII-2, будет представлена «гребнем», состоящим из дельта-функций, каждая из которых имеет на частотах k_1, k_2, k_3, \dots бесконечную высоту, но конечную площадь, равную $A^2/2, A^2/2, A^2/2, \dots$ и т. д.

XVIII-1.6.2. **Дисперсионный спектр и спектр мощности.** Случайная функция, не содержащая периодических компонент, не будет иметь бесконечных пиков плотности на каких-либо частотах. Рассмотрим преобразование Фурье автокорреляционной функции:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-ik\tau} d\tau.$$

Тогда по определению

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ik\tau} dk.$$

Если $\tau = 0$, то

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) dk = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \eta(t) \eta(t) dt = \overline{\eta^2(t)}.$$

Мы видим, что полная площадь под кривой $\Phi(k)$ равна среднему квадрату величины $\eta(t)$. Площадь любого элемента $\Phi(k) dk$ представляет собой средний квадрат той доли дисперсии функции $\eta(t)$, которая приходится на интервал $\pm 1/2 dk$. Функция $\Phi(k)$ есть частотный спектр плотности дисперсии функции $\eta(t)$. Часто этот спектр ошибочно называют энергетическим спектром, или спектром мощности, или просто спектром процесса $\eta(t)$. Можно показать, что дисперсионный спектр можно называть энергетическим спектром только применительно к линейным волнам на глубокой воде. В том

виде, в котором он определен выше, он никогда не является спектром «мощности», но всегда является дисперсионным спектром для любой записи колебаний поверхности моря — как в линейном, так и в нелинейном случае.

Возможность использования названия «энергетический спектр» вытекает из самого определения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) dk = \overline{\eta^2(t)}.$$

Если величину $\eta(t)$ записать в виде

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(knt + \epsilon_n),$$

то, возводя в квадрат и осредняя правую часть, получим

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \sum A_n^2.$$

Напомним теперь, что средняя энергия на длину волны и на единицу ширины гребня линейной волны (малой амплитуды) равна

$$E_{cp} = \frac{1}{8} \rho g H^2,$$

где H — высота волны ($2A_n$). Волна с высотой $2A_n$ и частотой k_n вносит энергетический вклад, равный $1/2 \rho g A_n^2$, в охваченное волнением море. Из приведенного выше уравнения видно, что величина $\rho g \int \Phi(k) dk$ в случае линейных волн представляет собой энергию волнения. Описание волнения с помощью его дисперсионного спектра $\Phi(k) dk$ является чисто статистической операцией. Если при употреблении выражения «энергетический спектр» в него вкладывается физический смысл, то надо помнить, что дисперсионный спектр и энергетический спектр эквивалентны друг другу (помимо различия за счет множителя ρg) только для волн малой амплитуды на глубокой воде.

XVIII-1.6.3. Свойство четности функции $R(\tau)$ позволяет свести преобразование Фурье к косинус-преобразованию:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos k\tau d\tau,$$

и за счет симметрии ($\Phi(k) = \Phi(-k)$) получаем другое определение спектра:

$$S(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos k\tau d\tau.$$

Некоторые авторы выражают частоту в циклах в секунду, т. е. используют вместо k величину $f = k/2\pi$. В этом случае переход к новому выражению для спектра очень прост:

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau.$$

Преимуществом такого вида записи является то, что множитель $1/2\pi$ в преобразовании Фурье больше не нужен. Отметим, что при переходе от $S(k)$ к $S(f)$ надо помнить, что речь идет о спектрах

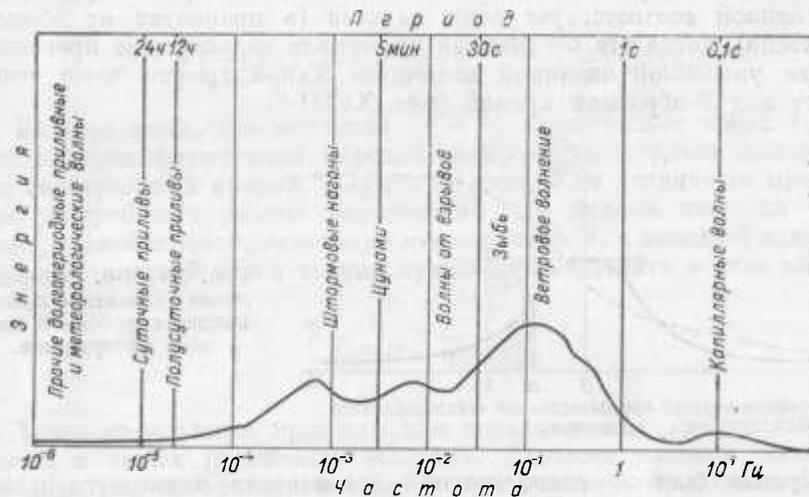


Рис. XVIII-5. Энергетический спектр волновых движений в море.

плотности, и что поэтому должно сохраняться тождество $S(f) df = S(k) dk$, так что $S(k) = (1/2\pi) S(f)$. Некоторые авторы находят целесообразным также употреблять понятие «периодного» спектра («по периодам»), т. е.

$$S(T) dT \equiv S(f) df,$$

где $f = 1/T$.

Преимущество такого представления спектра заключается в том, что период волны «ощущается» лучше, чем частота, однако в сущности такое же «чутье» можно выработать и в отношении частоты (f или $k = 2\pi f$), если как следует привыкнуть к этой характеристике.

Спектр и автокорреляционная функция обладают многими ценными свойствами, помогающими использовать их для описания случайных процессов типа морского волнения. Они (особенно спектр) статистически устойчивы, так что отдельные записи, относящиеся к одному и тому же состоянию морской поверхности, дают близкие по характеру спектры. Очень полезным свойством этих характеристик является их компактность; например, 30-минутная запись колебаний поверхности моря оказывается сосредоточенной в 50—

100 точках, расположенных вдоль оси частот. Делались попытки аппроксимировать ветровые спектры эмпирическими кривыми.

На рис. XVIII-5 показан типичный спектр движений морской поверхности. Здесь представлен полный диапазон частот от инфракрасных колебаний до капиллярных волн.

XVIII-2. Вероятностные характеристики волновых движений

XVIII-2.1. Понятие о распределении вероятности и плотности вероятности. Распределение вероятности обычно выражается графиком, на котором каждой заданной величине рассматриваемой переменной соответствует доля случаев (в процентах от общего их числа), когда эта переменная принимала значение, не превосходящее указанной заданной величины. Такой график чаще всего имеет вид S-образной кривой (рис. XVIII-6).



Рис. XVIII-6. Распределение вероятности возвышения свободной морской поверхности.

Производная от распределения вероятности называется плотностью вероятности. Площадь, ограниченная кривой плотности вероятности и вертикальными прямыми, соответствующими величинам a и b , определяет вероятность того, что значение наблюдаемой величины будет заключено в интервале от a до b . Полная вероятность того, что величина примет любое из всех возможных значений, должна быть равна единице.

Предположим, что рассматривается возвышение морской поверхности. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) d\eta = 1,$$

где $p(\eta)$ — плотность вероятности возвышения морской поверхности η . Распределение вероятности величины η , т. е. $P(\eta)$, будет (рис. XVIII-6):

$$P(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} p(\eta) d\eta.$$

XVIII-2.2. Плотность вероятности ординат водной поверхности. Теоретической формы для кривой плотности вероятности возвышения поверхности при морском волнении не существует. Обычно эту

кривую считают гауссовой (нормальной), симметричной относительно нулевого значения η (невозмущенного уровня), т. е.

$$p(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\eta}^2}} e^{-\frac{\eta^2}{2\bar{\eta}^2}} d\eta,$$

где $\bar{\eta}^2$ — средний квадрат возвышения (флуктуации) поверхности. Вид этого уравнения может варьироваться. Если величина η измеряется в единицах $\sqrt{\bar{\eta}^2}$ ($=k_\eta$), то приведенное выше уравнение будет иметь вид

$$p\left(\frac{\eta}{k_\eta}\right) d\left(\frac{\eta}{k_\eta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{k_\eta}\right)^2} d\left(\frac{\eta}{k_\eta}\right).$$

Укажем здесь, что величина $\bar{\eta}^2 = k_\eta^2$ представляет собой средний квадрат флуктуации морской поверхности и равна площади под спектральной кривой. Некоторые авторы по различным причинам употребляют разные определения для полной площади под спектральной кривой, используя множители 2, 4, а иногда 8 или 16. С математической точки зрения лучше всего оставить в силе выражение

$$\int_0^{\infty} S(f) df = \bar{\eta}^2 = k_\eta^2.$$

Такое определение пригодно для использования спектрального метода в самых различных областях. Другими словами, полная площадь под спектральной кривой представляет собой дисперсию (среднее квадратическое отклонение) исследуемого процесса.

XVIII-2.3. Вероятность высот волн. Предполагается, что одномерная последовательность волн описывается функцией

$$\eta(t) = \sum A_n \cos(k_n t + \varepsilon_n),$$

где ряд значений k_n распределен по частотам, содержащимся в спектре, величины ε_n означают произвольные фазовые углы, а значения A_n определяются спектром, как функция от k_n .

Если спектр сосредоточен в узком диапазоне частот, так что k_m — средняя частота, а фактические частоты k_n лишь незначительно отличаются от k_m , то приведенное выше уравнение можно записать в виде

$$\eta(t) = \sum A_n \cos(k_n t - k_m t + \varepsilon_n + k_m t) = A_c \cos k_m t + A_s \sin k_m t,$$

где

$$A_c = \sum A_n \cos(k_n t - k_m t + \varepsilon_n),$$

$$A_s = \sum A_n \sin(k_n t - k_m t + \varepsilon_n).$$

В уравнении для $\eta(t)$ предположение об узости диапазона значений k_n означает, что величины A_c и A_s очень медленно изменяются

во времени. Теперь положим $R = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}$. Далее, из центральной предельной теоремы теории вероятностей следует, что величины A_c и A_s по определению будут иметь нормальное распределение, если суммирование производить по достаточно большому числу членов. Мы имеем

$$\overline{A_c^2} = \overline{A_s^2} = \overline{\eta^2} = \int_0^{\infty} S(f) df.$$

Следовательно, вероятность того, что A_c и A_s лежат в пределах элементов dA_c и dA_s , дается следующей функцией плотности вероятности:

$$p(A_c, A_s) dA_c dA_s = \frac{1}{2\pi\eta^2} \exp\left[-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\eta^2}\right] dA_c dA_s,$$

если только переменные A_c и A_s статистически независимы. Это следует из того факта, что $\overline{A_c A_s} = 0$. Теперь положим

$$A_c = R \cos \alpha, \quad A_s = R \sin \alpha$$

и преобразуем выражение для $p(A_c, A_s)$ с помощью тождества

$$p(A_c, A_s) dA_c dA_s \equiv p(R, \alpha) R dR d\alpha$$

к выражению

$$p(R, \alpha) dR d\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{\eta^2} e^{-R^2/2\eta^2} d\alpha dR.$$

Здесь мы можем разделить переменные и тогда получаем

$$\begin{aligned} p(R, \alpha) dR d\alpha &= p(R) dR p(\alpha) d\alpha = \\ &= \frac{R}{\eta^2} e^{-R^2/2\eta^2} dR \cdot \frac{1}{2\pi} d\alpha, \end{aligned}$$

так что

$$p(R) dR = \frac{R}{\eta^2} e^{-R^2/2\eta^2} dR, \quad p(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} d\alpha.$$

Фактически величину R можно рассматривать как амплитуду волны $H/2$, а величину α — как фазу волны ϵ_n . Последнее уравнение показывает, что фазы волн распределены равномерно между 0 и 2π . Выражение для $p(R) dR$ можно еще упростить, поскольку для синусоидальной волны средняя квадратичная величина равна половине квадрата амплитуды. Таким образом, если $H = 2R$, то

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \overline{R^2} = \frac{1}{8} \overline{H^2} \quad \text{и} \quad p(H) dH = \frac{2H}{H^2} e^{-H^2/4\eta^2} dH,$$

что представляет собой хорошо известный закон распределения Рэлея.

Несмотря на многие кажущиеся допущения при выводе этого уравнения, наблюдения показывают его исключительно хорошее согласие с фактическим распределением высот волн в морском ветровом волнении.

XVIII-2.4. Вероятность периодов волн. В настоящее время не имеется простого метода вывода распределения вероятности периодов волн из волнового спектра. Вероятность периодов волн (основанная на учете нуль-пересечений или прохождений фактической водной поверхности $\eta(t)$ через уровень невозмущенной поверхности) надо каким-то образом связать с автокорреляционной функцией, однако точного способа для этого пока найти не удалось. Чтобы получить какую-то оценку «среднего периода», основанную на спектре плотности дисперсии, вводится понятие спектрального момента. Спектральный момент порядка n определяется выражением

$$M_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df.$$

Это выражение совершенно аналогично выражению для момента плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx.$$

Ожидаемая (средняя) величина интервала времени между последовательными нуль-пересечениями в процессе, имеющем спектр $S(f)$, будет

$$\frac{1}{2} \overline{T} = \frac{1}{2} \left[\frac{M_0}{M_2} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\int_0^{\infty} S(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df} \right]^{1/2},$$

где \overline{T} — средний кажущийся период волны (полный период равен удвоенному ожидаемому интервалу времени между последовательными нуль-пересечениями). Вывод этого выражения можно найти в более полных учебниках и пособиях — здесь мы его давать не будем. Подобным же образом найдено, что ожидаемый период между последовательными максимумами и минимумами (точками нулевого градиента, $\partial\eta/\partial t = 0$) дается выражением

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_2}{M_4} \right]^{1/2},$$

и мы видим, что он заметно отличается от величины $\overline{T}/2$ при общей форме спектра $S(f)$. Оба периода идентичны только, если $S(f)$ представляет собой дельта-функцию, что соответствует только одной частоте.

Соотношение между \overline{T} и автокорреляционной функцией можно лучше всего проиллюстрировать, если вспомнить хорошо известную теорему статистики: «Момент распределения вероятности порядка n дается n -ной производной от характеристической функции плотности вероятности в начале координат». Характеристическая функция плотности вероятности представляет собой преобразование Фурье.

Преобразование Фурье спектра является автокорреляционной функцией (см. XVIII-1.6), так что M_0 , M_2 и M_4 просто равны нулевой, второй и четвертой производным от автокорреляционной функции при $\tau = 0$.

XVIII-2.5. Вероятность подповерхностных скоростей и ускорений. Распределение вероятностей подповерхностных скоростей и ускорений в случае волн малой амплитуды (линейное приближение) обычно предполагается нормальным. Чтобы определить нормальное распределение, требуется только найти дисперсию. Для скоростей и ускорений это можно сделать с помощью дисперсионного спектра движений поверхности и с использованием гидродинамической потенциальной теории.

Водная поверхность описывается суммой бесконечного числа синусоид, распределение которых по частотам имеет вид S_f . Можно показать, что результат линейного преобразования любого линейного случайного процесса можно представить в виде произведения спектра этого процесса на квадрат оператора этого преобразования. Состояние поверхности моря описывается выражением

$$\eta(t) = \sum A_n \sin(2\pi f_n t + \epsilon_n).$$

Соответствующие подповерхностные скорости и ускорения будут (см. XVI-3.4):

$$u(t) = \sum 2\pi f_n A_n \frac{\text{ch } m_n(d+z)}{\text{sh } m_n d} \sin(2\pi f_n t + \epsilon_n)$$

и

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \sum 4\pi^2 f_n^2 A_n \frac{\text{ch } m_n(d+z)}{\text{sh } m_n d} \cos(2\pi f_n t + \epsilon_n).$$

Квадрат модуля выражения, описывающего операцию над величиной $\eta(t)$, необходимую для получения величины $u(t)$, будет

$$\left[2\pi f_n \frac{\text{ch } m_n(d+z)}{\text{sh } m_n d} \right]^2,$$

так что

$$S_u(f) df = \left[2\pi f \frac{\text{ch } m(d+z)}{\text{sh } m d} \right]^2 S_\eta(f) df,$$

где $S_u(f)$ — спектр скорости на горизонте z , а $S_\eta(f)$ — спектр колебаний поверхности.

В соответствии с определением спектра имеем

$$\overline{u^2} = \int_0^\infty S_u(f) df = \int_0^\infty \left[\frac{2\pi f \text{ch } m(d+z)}{\text{sh } m d} \right]^2 S_\eta(f) df.$$

Напомним (см. XVI-3.3), что здесь величина m представляет собой функцию от f , определяемую уравнением

$$(2\pi f)^2 = mg \text{th } md.$$

Определив величину $\overline{u^2}$, можно записать распределение плотности вероятности в виде

$$p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^2}} e^{-\frac{u^2}{u^2}} du.$$

Аналогично можно получить плотность вероятности ускорения и подповерхностного давления.

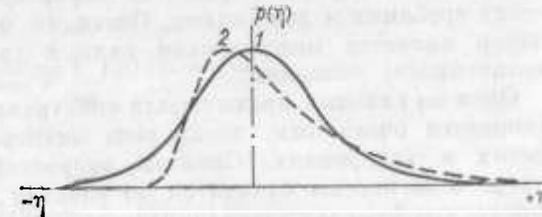
XVIII-3. Обсуждение некоторых проблем нелинейности

XVIII-3.1. Влияние нелинейности на распределение вероятности.

Хорошо известен неоднократно наблюдавшийся факт, а именно, что при высоких волнах гребни становятся короче и острее, а ложбины — длиннее и положе, чем в случае простого синусоидального

Рис. XVIII-7. Иллюстрация влияния нелинейных эффектов на распределение вероятности возвышения свободной морской поверхности.

1 — линейный процесс (гауссово распределение); 2 — нелинейный процесс (асимметричная кривая).



профиля. Поскольку средний (невозмущенный) уровень поверхности должен оставаться неизменным, следует ожидать, что плотность вероятности ординат поверхности будет неодинаковой в случае сильного и слабого волнения. При усилении волнения положительные ординаты станут крупнее, но наблюдаться они будут реже, а отрицательные ординаты станут меньше по величине, но наблюдаться будут чаще. Симметрия кривой плотности распределения нарушается (рис. XVIII-7).

Влияние асимметрии кривой распределения вероятности ординат водной поверхности сказывается в некоторой степени на распределении вероятности высот волн. Этот эффект, однако, заметен довольно слабо и не представляется особенно существенным. Напомним, что, тогда как гребни становятся более острыми, ложбины становятся более плоскими. При рассмотрении высоты волн эти эффекты отчасти компенсируют друг друга, и распределение вероятности высоты волн при сильном волнении остается очень близким к рэлеевскому.

Влияние нелинейности на распределение периодов изучения пока слабо. При волнении, носящем случайный характер, понятия «период волны» фактически не существует. Можно сказать лишь, что промежутки времени между последовательными нуль-пересечениями при подъеме и опускании будут короче, чем аналогичные промежутки времени от нуль-пересечения при опускании до нуль-пересечения при подъеме. Оценки средних интервалов времени

между последовательными нуль-пересечениями и последовательными максимумами или минимумами, которые упоминались выше, не являются достаточно достоверными.

XVIII-3.2. Влияние нелинейности на спектр и спектральные преобразования. Проблема нелинейности может возникнуть при изучении волновых спектров в разной форме. Ясно, что сама техническая сторона процедуры гармонического анализа, описанная в XVIII-1, не зависит от нелинейных эффектов. Трудности возникают при интерпретации получающихся спектров. Высокочастотная часть спектра отражает наличие и небольшой ряби, и мелких ветровых волн, и высших гармоник некоторых более низкочастотных волновых компонент. Высшие гармоники было бы желательно отделять от прочих, так как они движутся с фазовой скоростью основной волны, в то время как более короткие волны перемещаются гораздо медленнее.

Спектр не отражает фазовых характеристик, а также различий между гребнями и ложбинами. Очевидно, что нормальный волновой спектр является недостаточно полной характеристикой сильного (нелинейного) волнения.

Одно из главных преимуществ спектрального описания волнения становится очевидным, когда речь идет о подповерхностных скоростях и ускорениях. Спектры скоростей, ускорений, давления и т. д. с легкостью находятся по спектру колебаний поверхности. Переходные функции при нелинейном волнении далеко не так просты. При операциях со спектром возникает новая форма нелинейности. Например, предсказание спектра степени волнения по спектру колебаний поверхности, если функция f имеет вид $f = au^2 + bu$, требует проведения нелинейных преобразований спектра колебаний поверхности. Эти задачи еще не решены.

УПРАЖНЕНИЯ

XVIII-1. Изобразите (приближенно) автокорреляционную функцию для синусоидальной волны и случайного шума. Предложите способ выделения синусоидальной компоненты из случайного процесса.

О т в е т: способ выделения периодических компонент состоит в определении автокорреляционной функции при произвольно большом временном интервале τ .

XVIII-2. Изобразите спектр плотности дисперсии периодической волны. Почему описание периодического движения с помощью дисперсионного спектра не очень эффективно?

О т в е т: спектр плотности периодической функции в общем представляет собой бесконечный ряд дельта-функций. Периодическое явление лучше всего описывать с помощью простого ряда Фурье, а не спектра плотности. С помощью «плотности» нельзя представить относительной величины амплитуд гармоник.

XVIII-3. Найдите $p[f(x)]$ и нарисуйте график этой функции, если $f(x) = x^2$ и $p(x) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-(1/2)x^2}$.

О т в е т: для каждой величины x существует только одна величина $p(x)$. После преобразования x в $y = f(x) = x^2$ требуется, чтобы вероятность $p(y)$ также однозначно определялась величиной y . В частности, величина $p(x)$ в интервале $x - \delta x/2 < x < x + \delta x/2$ будет теперь представлена в y -плоскости величиной $p(y)$ в интервале $y - \delta y/2 < y < y + \delta y/2$. Это требование необходимо только, если при всех x и y удовлетворяется тождество $p(x)dx \equiv p(y)dy$. Отсюда

следует соотношение $p(y) = p[f(x)] = p(x) dx/dy$. Однако в этой частной задаче возникает еще один момент.

При $y = x^2$ функция $p(y)$ может существовать только при положительных значениях y . Короче говоря, в соотношении $y = x^2$ каждому значению y соответствуют два значения x , а именно: $+x$ и $-x$. Поэтому здесь необходимо, чтобы удовлетворялось тождество

$$p(y) dy \equiv p(-x) dx + p(x) dx,$$

и, поскольку $p(x)$ является четной функцией, то $p(y) dy = 2p(x) dx$, если $y = x^2$. Следовательно,

$$p(y) = 2p(x) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{(2\pi y)^{1/2}} e^{-\frac{y}{2}} \text{ при } y > 0,$$

$$p(y) = 2p(x) \frac{dx}{dy} = 0 \text{ при } y < 0.$$

XVIII-4. Покажите, что автокорреляционная функция любой стационарной случайной переменной является четной.

О т в е т:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} f(t) f(t+\tau) dt.$$

Подставляем вместо t величину $t-\tau$:

$$r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=\tau}^{t=T-\tau} f(t-\tau) f(t) dt.$$

Проделанная подстановка не изменяет средние характеристики. Теперь без потери общности можно сдвинуть пределы интегрирования, поскольку процесс является стационарным. Получим

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) f(t) dt = R(-\tau)$$

по определению.

XVIII-5. При определении спектра случайного процесса сначала вычисляют автокорреляционную функцию, а затем применяют косинус-преобразование Фурье. Что, по вашему мнению, получится, если применить к автокорреляционной функции синус-преобразование? Почему?

О т в е т: функцию $R(\tau)$ можно представить рядом Фурье

$$R(\tau) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega\tau + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin n\omega\tau.$$

Синус-преобразование соответствует операции

$$\int R(\tau) \sin m\omega\tau d\tau.$$

Из общей теории рядов Фурье следует, что этот интеграл существует только при определенной величине m , если $R(\tau)$ имеет синусоидальные компоненты, содержащие аргумент $m\omega\tau$. Поскольку $R(\tau)$ является четной функцией, то представляющий ее ряд Фурье

$$R(\tau) = a_0 + \sum a_n \cos n\omega\tau + \sum b_n \sin n\omega\tau$$

не может содержать синусоидальных (несимметричных) компонент. Поэтому

$$R(\tau) = a_0 + \sum a_n \cos n\omega\tau,$$

а это значит, что синус-преобразование тождественно равно нулю.

XVIII-6. Случайная переменная x имеет экспоненциальное распределение плотности вероятности:

$$p(x) = a \exp(-b|x|),$$

где a и b — константы. Определите соотношение между a и b и функцию распределения вероятности $P(x)$. Изобразите $p(x)$ и $P(x)$.

О т в е т:

$$b = 2a, \quad P(x) = \frac{1}{2} e^{-2a|x|} \quad \text{для } x < 0,$$

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - e^{-2ax}) \quad \text{для } x > 0.$$

XVIII-7. Предполагая волновое движение линейным, найдите выражение для дисперсии подповерхностного гидродинамического давления при глубине d и при волнении, описываемом выражением

$$\eta(t) = \sum A_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n).$$

О т в е т: из линейной теории периодических волн имеем

$$P = \rho g \left[z + \frac{1}{\operatorname{ch} k d} \eta \right].$$

Следовательно,

$$S_p(f) = (\rho g)^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 k d} S_\eta(f),$$

$$\sigma_p = \int_0^\infty S_p(f) = (\rho g)^2 \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}^2 k d} S_\eta(f).$$

XVIII-8. Распределение плотности вероятности высот волн в море, охваченном волнением, дается выражением

$$p(H) dH = \frac{H}{2\bar{H}^2} e^{-H^2/\bar{H}^2} dH.$$

Найдите соотношение между наиболее вероятной высотой волны, средней высотой волны, характерной высотой волны (средней из самой высокой трети волн) и максимальной волной (имеющей вероятность 1:100).

О т в е т:

$$H_{\text{ср}} = 1,25 H_{\text{наиб. вер}} \quad (p = 0,460);$$

$$H_{\text{наиб. вер}} = H_{\text{наиб. вер}} \quad (p = 0,606);$$

$$H_{\text{хар}} = 2 H_{\text{наиб. вер}} \quad (p = 0,135);$$

$$H_{\text{макс}} = 3 H_{\text{наиб. вер}} \quad (p = 0,010).$$

Предисловие редактора перевода	3
Предисловие автора	6
Введение	8

Том I. ОБЩИЕ ОСНОВЫ

Часть первая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Глава I. Основные положения и принципы теоретической гидравлики	13
I-1. Основные положения теоретической гидравлики	—
I-2. Линии тока, траектория, жилка тока и трубка тока	15
I-3. Метод изучения	19
I-4. Основные уравнения	21
I-5. Граничные условия	23
Глава II. Движение элементарных частиц жидкости	28
II-1. Различные типы движения	—
II-2. Поступательное движение	30
II-3. Деформации	—
II-4. Вихревое движение	33
II-5. Математические выражения, определяющие движение частицы жидкости	41
Глава III. Принцип неразрывности	47
III-1. Элементарные соотношения	—
III-2. Уравнение неразрывности в общем случае	49
III-3. Уравнение неразрывности для некоторых специальных случаев: гравитационные волны, волны давления	52
III-4. Частные формы уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости	55
Глава IV. Силы инерции	57
IV-1. Масса, инерция, ускорение	—
IV-2. Локальное ускорение	58
IV-3. Конвективное ускорение	59
IV-4. Общие математические выражения для сил инерции	61
IV-5. Некоторые приближения	63
Глава V. Приложенные силы	69
V-1. Внутренние и внешние силы	—
V-2. Сила тяжести	70
V-3. Силы давления	71
V-4. Силы вязкости	73
V-5. Теоретическое рассмотрение поверхностных сил	74
Глава VI. Уравнения Эйлера. Уравнения Навье — Стокса. Устойчивость ламинарного потока	80

VI-1. Основные формы дифференциальных уравнений движения . . .	80
VI-2. Сводка наиболее употребительных аппроксимаций	84
VI-3. Устойчивость ламинарного потока	89
Глава VII. Турбулентность. Осредненное движение. Осредненные силы. Уравнения Рейнольдса	95
VII-1. Определение среднего движения и средних сил	—
VII-2. Вычисление осредненных сил	99
VII-3. Уравнение неразрывности	104
VII-4. Основные характеристики осредненного движения турбулентного потока	105
VII-5. Уравнения Рейнольдса	106
Глава VIII. Турбулентность. Физические эффекты. Современные теории	110
VIII-1. Некоторые физические эффекты турбулентных флуктуаций	110
VIII-2. Турбулентный поток между двумя параллельными пластинами	114
VIII-3. Современные теории турбулентности	116
VIII-4. Потери энергии в однородном потоке	120
Глава IX. Поток в пористой среде. Закон Дарси	122
IX-1. Осредненное движение в пористой среде	—
IX-2. Закон Дарси	126
IX-3. Область применимости закона Дарси	130
Обзор результатов первой части	132

Часть вторая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С ОСНОВНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Глава X. Уравнение Бернулли	134
X-1. Сила и инерция. Работа и энергия	—
X-2. Безвихревое движение идеальной жидкости	135
X-3. Вихревое движение идеальной жидкости	140
X-4. Выводы и наиболее важные формулы	145
Глава XI. Картина потока. Функция тока. Потенциал скорости	148
XI-1. Общие соображения об определении картины потока	—
XI-2. Функция тока	149
XI-3. Потенциал скорости	152
XI-4. Стационарное, безвихревое, двумерное движение. Циркуляция скорости	155
XI-5. Соображения о важности граничных условий	166
XI-6. Гидродинамическая сетка	168
Глава XII. Обобщение уравнения Бернулли	178
XII-1. Элементарное приложение уравнения Бернулли к трубке тока	—
XII-2. Обобщение уравнения Бернулли на случай трубки тока	182
XII-3. Ограничение области применения двух форм уравнения Бернулли	188
XII-4. Определение потерь напора	189
Глава XIII. Теорема импульсов и ее применение	194
XIII-1. Внешние и внутренние силы	—
XIII-2. Математические преобразования	197
XIII-3. Практическое применение теоремы импульсов. Случай трубки тока	201
XIII-4. Примеры	203
XIII-5. Затруднения, возникающие при применении теоремы импульсов	207
XIII-6. Взаимосвязь между импульсом и энергией	210

Глава XIV. Пограничный слой. Поток в трубах и сопротивление	217
XIV-1. Общее понятие о пограничном слое	—
XIV-2. Ламинарный пограничный слой	219
XIV-3. Турбулентный пограничный слой	230
XIV-4. Поток в трубах	233
XIV-5. Сопротивление погруженного тела	240

Том II. ТЕОРИИ ВОЛН НА ВОДЕ

Часть третья

ПОТОК СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И ВОЛНЫ НА ВОДЕ

Глава XV. Введение в теорию волн на воде	257
XV-1. Физическая классификация различных видов волн на воде. Обозначения	—
XV-2. Критерии классификации по математическим методам решения	263
XV-3. Теория волн малой амплитуды	268
XV-4. Теория длинных волн	275
XV-5. Волновое движение как случайный процесс	279
XV-6. Замечания о теориях волн на воде	281
Глава XVI. Теория периодических волн малой амплитуды	282
XVI-1. Основные уравнения и положения задачи о поверхностных волнах	—
XVI-2. Вертикальная составляющая волнового движения	289
XVI-3. Двухмерное волновое движение. Линейное решение	291
XVI-4. Трехмерное волновое движение	297
XVI-5. Нелинейная теория волн	300
XVI-6. Поток энергии и групповая скорость	303
XVI-7. Сводка формул теории волн малой амплитуды	306
XVI-8. Различие между волнами на воде и нестационарным потоком сквозь пористую среду	311
Глава XVII. Гидравлика открытых русел и теории длинных волн	318
XVII-1. Стационарный поток в открытом русле	—
XVII-2. Медленно изменяющийся поток	324
XVII-3. Теория длинных волн. Допущения и основные уравнения	329
XVII-4. Линейная теория длинных волн	333
XVII-5. Численные методы решения	335
XVII-6. О некоторых точных решениях для волн со стационарным профилем	342
Глава XVIII. Волновое движение как случайный процесс	347
XVIII-1. Гармонический анализ	—
XVIII-2. Вероятностные характеристики волновых движений	356
XVIII-3. Обсуждение некоторых проблем нелинейности	361

Бернар Ле Меоте

**ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ
И ТЕОРИЮ ВОЛН НА ВОДЕ**

Редактор **З. И. Мироненко**
Переплет **Б. Н. Осенчакова**
Техн. редактор **М. И. Брайнина**
Корректоры: **Г. Н. Римант, Т. Н. Черненко**

Сдано в набор 8/I 1974 г.
Подписано к печати 26/VII 1974 г.
Формат 60 × 90/16. Бум. тип. № 1.
Печ. л. 23. Уч.-изд. л. 23,24.
Тираж 1800 экз.
Индекс ОЛ-270. Заказ № 769.
Цена 2 руб. 55 коп.
Гидрометеонадат. 199053.
Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 6
«Союзполиграфпрома» при Государственном
комитете Совета Министров СССР по
делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
196006, Ленинград, Московский пр., 91.