

Российская академия наук
Институт вычислительной математики

В.П. ДЫМНИКОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ
И ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ
КРУПНОМАСШТАБНЫХ
АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Москва 2007

УДК 551.513

ББК 22.162

Д38

Дымников В.П.

Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов – М.: ИВМ РАН, 2007. – 283 с. – ISBN

В книге рассмотрена фундаментальная проблема геофизической гидродинамики и современной теории прогноза погоды и изменений климата – проблема устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов. Эта проблема изучается с позиций трёх наук – геофизической гидродинамики, теории динамических систем и вычислительной математики.

Кроме традиционных методов исследования устойчивости по Ляпунову решений систем уравнений, описывающих крупномасштабную динамику атмосферы (задачи прогноза погоды) в книге рассматриваются новые подходы и методы, связанные с исследованием устойчивости аттракторов соответствующих диссипативных динамических систем (задачи прогноза изменений климата). В обоих случаях вводится понятие потенциальной предсказуемости через процедуру сходимости вероятностной меры к её равновесному значению.

Книга рассчитана на специалистов в области геофизической гидродинамики, прогноза погоды и теории климата, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

*Печатается по решению Ученого совета
Института вычислительной математики
Российской академии наук.*

ISBN

© ИВМ РАН, 2007

© В.П. Дымников, 2007

Оглавление

Предисловие	8
Введение 1. Краткий исторический обзор	21
Введение 2. Некоторые математические понятия и определения	32
Глава 1. Крупномасштабная динамика атмосферы	43
§ 1. Определение погоды и климата. Основные уравнения и законы сохранения	43
§ 2. Уравнение гидростатики и примитивные уравнения. p -система координат	49
§ 3. Эффекты вращения. Уравнение для квазигеострофического вихря	55
§ 4. Стационарные волны Россби. Горизонтальное и вертикальное распространение стационарных волн Россби	64
§ 5. Взаимодействие вихрей со средним потоком. Теоремы "неускорения"	71
Глава 2. Устойчивость потоков двумерной несжимаемой атмосферы	79
§ 1. Уравнения динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости. Интегральные инварианты	79

§ 2.	Устойчивость линейного приближения. Инварианты уравнения в вариациях	87
§ 3.	Достаточные условия устойчивости стационарных потоков	95
§ 4.	Преобразование энергии и устойчивость. Оценки энергии насыщения	98
§ 5.	Связки интегралов в исследовании устойчивости	103
§ 6.	Динамика двумерной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере	107
§ 7.	Устойчивость стационарных решений уравнений, описывающих динамику двумерной атмосферы	112
§ 8.	Галёркинские приближения. Инварианты	118
§ 9.	Симметрии показателей Ляпунова	124
§ 10.	Уравнения двумерной вязкой несжимаемой жидкости. Теорема об устойчивости стационарных решений	128
§ 11.	Теоремы устойчивости решений по линейному приближению. Сходимость галёркинских приближений для собственных чисел и показателей Ляпунова	132
§ 12.	Аттракторы уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере	137
§ 13.	Устойчивость аттракторов уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере	142
Глава 3.	Бароклидная неустойчивость атмосферы .	149
§ 1.	Физические механизмы бароклидной неустойчивости	149
§ 2.	Задача Иди	154
§ 3.	Модель Филлипса	160

§ 4. Связки интегралов в исследовании устойчивости бароклиных потоков	165
§ 5. Достаточные условия устойчивости стационарных потоков в двухслойной квазигеострофической атмосфере	171
§ 6. Аппроксимация спектра в задаче Иди	174
§ 7. Решение задачи на собственные значения для трехмерных бароклиных уравнений гидротермодинамики атмосферы	184
Глава 4. Предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов	189
§ 1. Природа низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции	189
§ 2. Потенциальная предсказуемость первого и второго рода	205
§ 3. Начальный рост ошибок	216
§ 4. Предсказуемость на подпространствах. Энтропия как мера предсказуемости	226
§ 5. Предсказуемость на режимах атмосферной циркуляции	232
§ 6. Предсказуемость систем гидродинамического типа	235
§ 7. Предсказуемость 2-го рода. ϵ -регуляризация и предсказуемость изменений климата	239
§ 8. Построение оператора отклика для модели общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН	244
Приложение. Некоторые вычислительные проблемы теории устойчивости	259
Литература	265

Аннотация

В книге рассмотрена фундаментальная проблема геофизической гидродинамики и современной теории прогноза погоды и изменений климата – проблема устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов. Данная проблема изучается с позиций трёх наук – геофизической гидродинамики, теории динамических систем и вычислительной математики.

Кроме традиционных методов исследования устойчивости по Ляпунову решений систем уравнений, описывающих крупномасштабную динамику атмосферы (задачи прогноза погоды) в книге рассматриваются новые подходы и методы, связанные с исследованием устойчивости аттракторов соответствующих диссипативных динамических систем (задачи прогноза изменений климата). В обоих случаях вводится понятие потенциальной предсказуемости через процедуру сходимости вероятностной меры к её равновесному значению.

При исследовании устойчивости течений идеальной жидкости особое внимание уделяется использованию интегральных инвариантов как в случае нелинейной задачи, так и для системы уравнений в вариациях. Существенная часть книги посвящена вычислительным аспектам теории устойчивости – аппроксимации спектра линейных операторов на основе галёркинских приближений и конечномерных разностных схем и соответствующих теорем сходимости, методам вычисления и свойствам симметрии показателей Ляпунова, аппроксимации характеристик хаотических аттракторов, порождаемых атмосферными моделями и др. Рассмотрены основные гидродинамические процессы, ответственные за формирование потенциальной предсказуемости крупномасштабной динамики атмосферы. При исследовании актуальной проблемы современной теории климата – чувствительности климата к малым внешним воздействиям – излагается теория построения линейного оператора

отклика на эти возмущения. Приведены результаты численных экспериментов с моделями общей циркуляции атмосферы, показывающие высокую точность данного подхода, позволяющего в принципе исследовать чувствительность реальной климатической системы к малым внешним воздействиям на основе данных наблюдений.

Книга рассчитана на специалистов в области геофизической гидродинамики, прогноза погоды и теории климата, а также на студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Предисловие

Любому автору, собирающемуся написать книгу, необходимо дать ответ на вопрос: на какой именно круг читателей он рассчитывает? Десять лет назад мы с профессором А.Н.Филатовым решили издать в США книгу "Математика климатического моделирования". Книга была издана, но одна предварительная рецензия на неё меня очень огорчила: рецензент писал, что ему неясно, на кого рассчитана книга. Вроде бы она написана для людей, занимающихся моделированием климата, однако, математический уровень ее такой, что из ста студентов, занимающихся в университете, где работал рецензент, вряд ли более 5 человек заинтересуются этой проблемой, а из них может быть один поймет, что же там написано. Тут возникают два предположения: либо книга действительно писалась для "никого", либо образование в данном конкретном американском университете недостаточно высоко. Так или иначе, но во мне в настоящее время созрело убеждение (оно зрело в течение последних десятилетий), что поскольку метеорология вышла из "пеленок" самодостаточности и стала частью физики, то в ней должны быть использованы все математические достижения последних лет, так или иначе имеющих отношение к этой области знаний. Это внедрение современной математики в физику атмосферы нетрудно проследить по такому журналу как JAS. Сначала в нем бурным потоком пошли статьи, использующие современные методы линейной

алгебры, затем начался новый переход к функциональному анализу и теории динамических систем. Насколько я знаю, в США открыта программа – математика в физику атмосферы!

Здесь речь идет не о вычислительных методах, используемых при решении уравнений геофизической гидродинамики – в этой части все было в порядке, более того, метеорологи и океанологи часто опережали профессиональных математиков в изобретении подходящих методов, речь идет о применении фундаментальных результатов математики при исследовании таких сложных объектов как атмосфера и океан.

Отвлечемся на время от океана с его специфическими рыбными, нефтяными и газовыми проблемами. Что интересует в первую очередь человека, живущего в нижнем слое атмосферы? Ключевыми проблемами всегда был прогноз погоды и изменения климата (лишь в последние годы стали интересоваться магнитными полями). Далеко не все метеорологи в не таком уж далеком прошлом понимали, что прогноз погоды по существу проблема вероятностная (современное определение детерминированного прогноза, строго говоря, есть понятие условное). Проблема заключается в том, что сама траектория климатической системы сильно неустойчива по Ляпунову – как угодно малые ошибки в начальных данных за конечное время приведут к конечным ошибкам прогноза. Как только эта проблема была понята, сразу возникло много разных полезных задач:

1. Какова скорость нарастания ошибки?
2. Бывают ли ситуации, когда эта скорость мала и чем она собственно определяется?
3. Какие структуры наиболее предсказуемы?
4. Какова роль внешних по отношению к атмосфере воздействий в предсказании погоды?

5. Как предсказывать экстремальные события и каковы их частоты?

Можно перечислять много других задач, но мне хотелось бы только заметить, что современное понимание проблемы прогноза сводится к трем простым вещам: нужна как можно более точная модель системы (в силу неустойчивости траектории к постоянно действующим возмущениям). Нужны как можно более точные начальные данные (в силу неустойчивости траектории к ошибкам начальных данных). Нужны как можно более мощные компьютеры, чтобы можно было использовать мощные модели и использовать метод Монте-Карло для оценивания фактического роста ошибок (степени неустойчивости) и определять предел полезного прогноза. Таким образом, решение задачи прогноза погоды (краткосрочного и среднесрочного) стало в большой степени проблемой технологической. Отличие этой задачи от задачи изменения климата заключается в том, что мы имеем большую выборку (с точки зрения прогнозов на несколько дней) данных наблюдений, и успешность прогнозистической деятельности может быть решена чисто статистическим путем. Это не означает, что мы не встретимся с ситуацией, успешный прогноз которой потребует понимания чего-то принципиально нового, не описываемого уравнениями гидротермодинамики, например, ситуация будет связана с потоком возмущений из верхней атмосферы или с какими-то геодинимическими эффектами, однако, это никак не изменяет изложенную выше схему.

Совсем другая ситуация имеется в отношении климатических изменений. Прежде всего, мы встречаемся здесь с большой путаницей во временных масштабах. Проблема заключается в том, что сам временной масштаб не определен в определении климата. Климат – это ансамбль состояний, проходимый климатической системой (атмосферой, океаном, сушей, криосферой, биотой) за достаточно

большой промежуток времени. Энергозначимыми временными масштабами являются масштабы от десятков минут до тысяч лет, т.е. если мы выберем подходящий с точки зрения жизни человеческого поколения в определении климата масштаб ~ 30 лет (что на самом деле и сделано), то ясно, что климат (ансамбль как множество с заданной на нем мерой) будет меняться со временем в силу внутренней динамики системы. Это факт очевидный. Хорошо, конечно, с математической точки зрения выбрать этот масштаб времени бесконечным, тогда климат при постоянных внешних воздействиях неизменен и может изменяться только под воздействием изменения внешних сил. Ясно, что для принятия решений в рамках человеческой жизни, пожалуй, это определение неудобно. Поэтому в проблеме климата возникают две фундаментальные задачи – прогноз его внутренней изменчивости и прогноз его изменений под воздействием внешних (например, антропогенных) воздействий.

Трудность решения этих проблем заключается в том, что атмосфера и океан – это тонкие пленки, вертикальное движение в них отвечает за преобразование энергии и смоделировать их в лабораторных условиях практически невозможно. В нашем распоряжении нет и достаточно длинных рядов данных наблюдений, чтобы статистически значимо можно было судить о количественных изменениях климатической системы. Все данные – это разрозненные свидетельства изменений некоторых климатических характеристик на различных временных масштабах, и чтобы восстановить полную картину, необходимо решать обратные задачи, которые, как известно, практически всегда некорректны. Что остается? Остается метод математического моделирования. Нужно построить математическую модель, которая бы удовлетворительно воспроизводила современный климат. Очень желательно, чтобы эта модель воспроизво-

дила циклы Миланковича, да и многое другое. Но как уже было сказано выше, у нас нет данных, чтобы идентифицировать способность моделей предсказывать будущие изменения климата (если они в каком-то смысле предсказуемы) и ее чувствительность к малым внешним воздействиям по отношению к чувствительности реальной климатической системы. Тут нужны какая-то убедительная теория и подходящий ей математический аппарат.

Лет пятнадцать назад мне показалось, что таким аппаратом может быть теория аттракторов диссипативных динамических систем. Что такое аттрактор? Аттрактор – это притягивающее компактное множество, строго инвариантное относительно динамики системы (строгое определение будет дано в соответствующей главе). Что это значит? Это значит, что траектория системы, выпущенная из любой точки фазового пространства, рано или поздно попадет в окрестность аттрактора и останется в ней навсегда. Большие надежды мы связывали с тем, что размерность аттрактора может оказаться малой. В метеорологии обычно все исследования начинают с двумерной баротропной квазигеострофической модели, затем переходят к двуслойной бароклинной модели, а затем уже к сложным моделям общей циркуляции атмосферы. Для баротропной модели теория однозначной разрешимости существует, поэтому можно было сразу приступить к построению оценок размерности аттракторов (конструктивных, позволяющих вычислить число). Это было сделано [16, 114, 153, 98], однако, здесь нас ждало разочарование. Дело в том, что в метеорологии используются не уравнения Навье-Стокса, а уравнения Рейнольдса, – усредненные в определенных интервалах временных и пространственных масштабов уравнения Навье-Стокса. При больших масштабах осреднения и простых алгоритмах замыкания размерность аттрактора действительно оказывалась не очень большой,

однако она стремилась к очень большим числам, если параметры усреднения становились маленькими. В то же время мы при заданных величинах диссипации наблюдали сходимость показателей Ляпунова конечномерных галёркинских аппроксимаций к пределу [98]. Еще большее разочарование ждало нас при исследовании инерциальных многообразий, гладких конечномерных многообразий, притягивающих все траектории системы. Даже если бы теорема о существовании инерциального многообразия для баротропной модели была верна, что свидетельствовало бы о том, что можно было построить конечномерную модель системы, полностью эквивалентную по динамике исходной бесконечномерной системе, то оценки размерности этого многообразия были настолько велики, что терялся всякий разумный смысл строить такие системы. Поскольку общих результатов из теории аттракторов, полезных для практических задач прогноза и климата получить не удалось, необходимо было сузить как класс исследуемых систем так и класс задач. Другими словами, было очевидно, что прикладные результаты можно получить лишь в двух асимптотиках – либо размерность аттрактора очень мала (типа аттрактора Лоренца), когда задачу можно исследовать до конца как аналитически, так и численно, либо размерность аттрактора очень велика, так что в каком-то смысле могут быть использованы предельные теоремы теории вероятностей. То, что динамика на аттракторах, порождаемых метеорологическими задачами, хаотична, было ясно с самого начала – это следовало из многочисленных работ по теории устойчивости крупномасштабных атмосферных процессов (см., например, [27]).

Главная задача, которая была сформулирована – это задача об устойчивости аттрактора как множества в хаусдорфовой метрике. Вторая задача – задача об устойчивости меры на аттракторе. Устойчивость здесь понимается как

устойчивость по отношению к малым внешним воздействиям.

Ясно, что обе задачи имеют непосредственное отношение к теории климата.

Первая идея, которая привела к определенному результату, заключалась в следующем. Если система имеет большое число эффективных степеней свободы [81], то по определению дисперсия ее энергии очень мала. В силу того же большого числа степеней свободы на подпространстве крупномасштабных процессов распределения параметров, характеризующих эти процессы, должны быть близки к нормальным в силу центральной предельной теоремы. Отсюда следует, что в некотором смысле система должна быть близка к регулярной, и к ней должны быть применимы результаты, полученные Крейкнаном [121] для регулярных систем. Т.е. можно построить оператор отклика системы на малые внешние воздействия для первого момента системы через статистические характеристики системы – в частности, через ковариационные матрицы со сдвигом (здесь предполагается, что мы уже имеем дело с конечномерной системой). Такие операторы отклика были построены [98], и они показали, что данный подход ”работает”, однако, слабая теоретическая обоснованность его вызывала сильное неудовлетворение. Вся техника, предложенная Крейкнаном, была основана на линеаризации системы вокруг каждой траектории и последующем осреднении по ансамблю начальных данных. Более общий результат, примененный к диссипативным системам, был получен в работе [39], однако использовалась та же техника линеаризации относительно каждой отдельной реализации случайного процесса.

К счастью в физической литературе уже были опубликованы работы [92], когда аналогичный результат был получен линеаризацией относительно стационарной меры, но здесь оставалась масса проблем – нужно было

доказывать единственность этой меры и ее непрерывную зависимость от параметров задачи. В ясном виде эта проблема была сформулирована Зееманом [154] с помощью процедуры, которую он назвал ε -регуляризацией: введением в правую часть диссипативной динамической системы малого δ -коррелированного по времени гауссового шума. При этом область определения искомых функций уже является не конечномерный аттрактор, а все фазовое пространство, поэтому доказательство Зеемана для компактных носителей несут, конечно, весьма ограниченный характер. Полная замкнутая теория этого подхода по всей видимости может быть построена, следуя последним работам, по ε -регуляризации двумерных уравнений гидродинамики [144]. В этих работах было показано, что если в правую часть уравнений, описывающих двумерную несжимаемую жидкость, добавить δ -коррелированный по времени гауссов шум, то равновесная инвариантная мера будет эргодична и устойчива по отношению к малым возмущениям параметров задачи, причем сама мера будет экспоненциально-притягивающим аттрактором [144]. Из экспоненциального притяжения также следует устойчивость равновесной меры (см. [46]). Вообще говоря, в этой цепи нет одного доказательства, что такое же утверждение следует и для галёркинских аппроксимаций двумерных уравнений несжимаемой жидкости, однако практически очевидно, что это утверждение есть следствие полученного в [144] доказательства. В этом случае также будут справедливы утверждения для соответствующего уравнения Фоккера-Планка: стационарное решение типа функции распределения этого уравнения существует и единственно, оно гладкое, устойчивое относительно малых возмущений параметров исходной задачи, и, значит, линеаризация относительно него справедлива. Другими словами, справедлива формула, впервые полученная в [92] без всяких

предположений существования стационарного решения и его непрерывной зависимости от параметров задачи.

Чтобы получить формулу, аналогичную формуле Крейкнана, нам нужно только предположить, что функция распределения близка к нормальной. Доказать это для произвольных систем невозможно, однако для систем с большим числом степеней свободы, имея в виду, что крупномасштабные процессы в естественном базисе можно считать линейным откликом на сумму большого числа некоррелированных процессов, предположение о нормальном кажется весьма обоснованным. Этот же результат дают и прямые вычисления (см. [152]). Итак, мы в принципе имеем возможность вычислить оператор отклика (для первого момента) крупномасштабной динамики на малые внешние воздействия:

$$\delta u = M \cdot \delta f,$$

что позволяет нам решать как прямые, так и обратные задачи [108].

Итак, при определенных ограничениях отправными точками исследуемой проблемы являются две: траектория климатической системы неустойчива по Ляпунову (по отношению к малым возмущениям начальных данных) и к постоянно действующим возмущениям. Во-вторых, климат, если его понимать как ансамбль состояний, проходимый системой за бесконечный промежуток времени, устойчив по отношению к малым возмущениям параметров.

Вопрос, который постоянно возникает: какова норма оператора, связывающего возмущения и отклик, т.е. насколько малыми должны быть возмущения, чтобы отклик действительно был мал? Ответ на этот вопрос находится в рамках той теории, контуры которой были изложены выше, поскольку она в принципе позволяет построить оператор отклика непосредственно по реальным данным.

Коротко остановимся теперь на содержании книги. Основной замысел книги заключается в том, что мне хотелось описать с той или иной степенью подробности все стороны проблемы предсказуемости крупномасштабных атмосферных потоков – физические основы построения моделей крупномасштабных атмосферных движений, теорию устойчивости траекторий, порождаемых уравнениями этих моделей, природу низкочастотной изменчивости крупномасштабных атмосферных процессов, фундаментальные основы теории её предсказуемости, некоторые принципиальные вычислительные аспекты в теории устойчивости и предсказуемости.

Следуя этой основной концепции, содержание книги построено следующим образом.

Во введении даётся краткий исторический обзор развития методов гидродинамического прогноза погоды и изменений климата с упором на принципиальные моменты понимания проблемы устойчивости траектории климатической системы.

В первой главе книги формулируются основные уравнения гидротермодинамики атмосферы, фундаментальные законы сохранения, эффекты вращения, лежащие в основе формулирования упрощенных уравнений, – процедуры особенно важной при аналитическом исследовании устойчивости атмосферных потоков. Особое внимание уделяется проблеме горизонтального и вертикального распространения волн. Изложенные основные результаты этой теории явились фундаментальной основой понимания квазистационарного отклика атмосферы на внешние воздействия, в частности, на аномалии поверхностной температуры океана. Задача взаимодействия волн со средним потоком является ключевым звеном в проблемах формирования квазидвухлетних колебаний зонального ветра в экваториальной стратосфере и поддержании арктических осцилляций

– процессов, несомненно играющих важную роль в понимании потенциальной предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов [109, 148].

Две следующие главы являются центральными в изложении теории устойчивости крупномасштабных атмосферных процессов.

Изложение теории устойчивости течений двумерной баротропной атмосферы мы начинаем с классических результатов, связанных с динамикой двумерной идеальной жидкости. Такое начало представляется совершенно необходимым, особенно если принять во внимание необходимость построения конечномерных аппроксимаций исходных уравнений для решения конкретных прикладных задач. Центральное направление, избранное в книге, связано с изучением системы интегральных инвариантов, ограничивающих как класс возможных решений, так и класс решений уравнений в вариациях. Важным аспектом является рассмотрение симметрий глобальных и локальных показателей Ляпунова, поскольку сами показатели в диссипативных системах являются важными параметрами, определяющими размерность глобальных аттракторов и характер динамики на них. С физической точки зрения интересна связь показателей с "понятными" интегральными характеристиками траекторий типа энтропии и энергии. Следует отметить, что материал, изложенный в книге, позволяет заключить, что для баротропной вязкой атмосферы проблему исследования устойчивости по Ляпунову стационарных решений можно считать в определённом смысле завершённой: доказаны теоремы существования и единственности этих решений, применимость первого и второго методов Ляпунова для исследования их устойчивости, построены численные алгоритмы решения соответствующих спектральных задач, доказана теорема сходимости для собственных значений.

Третья глава посвящена исследованию бароклиной неустойчивости атмосферы – основного механизма, ответственного за формирование синоптических вихрей в атмосфере. В отличие от общей постановки для баротропной атмосферы (которая, конечно, является сильным упрощением для описания реальной атмосферы), бароклиная неустойчивость исследуется на примере некоторых частных задач, ставших к настоящему времени классическими (задача Иди, Филлипса). На примере этих же задач исследуется и сходимість собственных чисел разностных аппроксимаций для спектральных проблем. Эта часть книги в определённом смысле повторяет результаты, изложенные автором в монографии [27].

Что касается аттракторов бароклиных задач, то к настоящему времени в отсутствие глобальных теорем разрешимости для трёхмерных постановок, речь может идти только о системах уравнений типа двуслойных квазигеострофических систем.

Переходным параграфом к главам, в которых исследуется предсказуемость крупномасштабных движений, является параграф, в котором рассматривается природа низкочастотной изменчивости атмосферных процессов. Разделяя эту изменчивость на внутреннюю атмосферную и изменчивость, вызываемую внешними по отношению к атмосфере факторами, мы тем самым естественным образом приходим к понятиям потенциальной предсказуемости первого и второго рода.

В четвертой главе книги рассматриваются принципиальные аспекты этих понятий, метод ε -регуляризации, позволяющий проблему предсказуемости свести к исследованию решений уравнений Фоккера-Планка, предсказуемость на подпространствах (здесь в качестве примера рассматриваются также и системы гидродинамического типа), предсказуемость изменений климата.

Для удобства чтения книги необходимые математические определения и формулировки основных теорем, которые используются при формулировке результатов по теории устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов, приводятся во введении.

Конечно, я отдаю себе отчёт в том, что изложить такой разнородный материал на одном уровне полноты и строгости практически невозможно – некоторые утверждения доказываются на так называемом ”физическом” уровне строгости (без формулирования функциональных пространств и т.п.), некоторые утверждения приводятся без доказательств – мне представляется, что излишний формализм в данном случае не поможет пониманию сути проблемы. Можно отметить и многие другие недостатки, связанные с полнотой описания конкретных физических атмосферных процессов и уровня их современного моделирования. Однако, думается, что книга будет полезна широкому кругу читателей, поскольку (я опять надеюсь на это) позволяет не только ознакомиться с современными идеями и методами исследования проблем устойчивости и предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов, но и выстроить иерархию нерешённых задач, принципиально важных для её понимания.

Автор выражает глубокую благодарность Л.И.Журиной и С.В.Кострыкину за подготовку компьютерного макета книги, А.С.Грицуну за предоставление результатов численных расчетов (рис. 10,11,12-15).

Введение 1. Краткий исторический обзор

Пытаясь понять историю развития проблемы, объявленной в заглавии книги, мы должны коснуться в первую очередь следующих научных направлений:

- 1) формулирования проблемы прогноза погоды как задачи математической физики,
- 2) развития методов решения уравнений математической физики,
- 3) формулирования и развития теории устойчивости движения и применения её к гидродинамике (в частности, к геофизической гидродинамике),
- 4) развития вычислительной техники, как средства реализации вычислительных алгоритмов,
- 5) принципиальных основ создания современных вычислительных и информационных технологий, лежащих в основе современных схем прогноза погоды и моделирования климата и его измерений.

Впервые задачу прогноза погоды как задачу гидротермодинамики с начальными и краевыми условиями сформулировал Вильгельм Бьеркнес в 1904 году сначала в докладе на конференции в Берлине, а затем и в знаменитой статье [75].

Попытку решить такую систему уравнений с помощью разностных методов осуществил во время Первой Мировой войны Льюис Ричардсон. Он с группой сотрудников ан-

глийской метеослужбы попытался дать прогноз для района Нюрнберг-Аугсбург на одни сутки. Однако эта попытка оказалась неудачной – ошибка в приземном поле давления через 6 часов составила величину порядка сотен миллибар. Ричардсон использовал неустойчивую разностную схему (в то время теории устойчивости разностных схем не существовало), однако, не это было главной причиной его неудачи. В своих расчетах Ричардсон использовал нефилтрованные уравнения гидродинамики, которые требовали начальных данных для поля ветра. Эти поля он получал из данных наблюдений за ветром, получая при этом гигантскую ошибку в поле дивергенции, ответственной за преобразование энергии. Тем не менее, свою неудачную попытку Ричардсон опубликовал в 1922 году в монографии [138]. Стоит заметить, что Льюис Ричардсон, выдающийся ученый в области атмосферы (вспомним хотя бы число Ричардсона), основные свои труды создавал в области теории военных действий.

Не останавливаясь собственно на развитии динамической метеорологии как самостоятельной науки в довоенные годы, мы не можем не упомянуть двух фундаментальных работ Карла Густава Россби [140] и Ильи Афанасьевича Кибеля [44], оказавших решающее влияние на развитие численных методов прогноза погоды. В этих работах в уравнениях прогноза погоды был выделен малый параметр, с помощью которого можно было проводить обоснованные упрощения исходных уравнений (а И.А.Кибель и сделал это).

В конце двадцатых годов вышла также и фундаментальная работа Куранта, Фридрихса и Леви, установившая ограничения на выбор пространственных и временных шагов при численном решении уравнений математической физики [89].

В 1946 году Джон фон Нойман собрал в Принстоне небольшую группу молодых ученых (ведущим в этой груп-

не был Дж.Чарни), перед которой была поставлена задача численного прогноза погоды. Одновременно Нойман разработал и проект создания соответствующей вычислительной машины. Первый численный прогноз, который несомненно был успешным, был сделан этой группой с использованием баротропной модели в 1950 году [84].

Чтобы перейти к более сложным бароклинным моделям потребовался принципиальный шаг, связанный с формулированием квазигеострофического приближения, который был сделан почти одновременно Дж.Чарни [83] и Александром Михайловичем Обуховым [55].

В эти же годы появились первые (ставшие классическими) работы, посвященные исследованию устойчивости по Ляпунову зонально-симметричных атмосферных потоков: Чарни [82] и Иди [99]. Эти работы показали, что при разумных значениях параметров атмосферные потоки являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям начальных данных.

Эрик Иди был первым метеорологом, кто осознал фундаментальную сторону своего открытия [100]. В этой работе он написал: "Мы никогда не знаем, какие малые возмущения могут существовать ниже определенных границ ошибки. Так как возмущения могут расти с экспоненциальной скоростью, границы ошибки в прогностическом (конечном) состоянии будут расти экспоненциально с ростом времени прогноза и эта ошибка неизбежна независимо от метода прогнозирования. Если мы хотим собрать всю информацию о развитии процесса внутри этого интервала, мы должны рассмотреть свойства множества или ансамбля всех возможных траекторий (аналогично ансамблю Гиббса в статистической механике). Таким образом, долгосрочное прогнозирование является по существу частью статистической физики в самом широком смысле: как вопрос, так и ответ должны быть в терминах вероятностей".

Обратимся теперь непосредственно к развитию теории устойчивости движения (устойчивости решений систем уравнений), поскольку эта история в своем роде уникальна. Дело в том, что для конечномерных систем практически от начала до конца теория была разработана одним ученым – Александром Михайловичем Ляпуновым. В 1892 году он опубликовал свой знаменитый труд "Общая задача об устойчивости движения". Конечно, вклад других ученых в развитие теории велик, но совершенно не сравним с вкладом Ляпунова. Большинство терминов в теории устойчивости связано с именем Ляпунова – первый и второй методы Ляпунова, показатели Ляпунова, уравнения Ляпунова и т.д. и т.п.

Ранние исследования устойчивости гидродинамических движений связаны с именами Рэля, Орра и Зоммерфельда (см. [48]). Однако все результаты этих работ получены на так называемом физическом уровне.

Итак, после формулирования квазигеострофического приближения встала задача реализации его в виде численной схемы прогноза погоды. Такие реализации были построены в 1952 году Н.И.Булеевым и Г.И.Марчуком (работа переиздана в 1958 году в Трудах института физики атмосферы, вып. 2, стр. 66-105). Метод был основан на построении функции Грина для тенденции геопотенциала и был реализован С.Л.Белоусовым в виде оперативной схемы прогноза погоды в Гидрометцентре СССР.

Уже в эти годы пришло осознание того, что неустойчивость атмосферных потоков по отношению к ошибкам начальных данных приводит к ограничению времени полезного прогноза (см. [147]). Ясно, что аналогичные ограничения следовало ожидать и от ошибок, содержащихся в упрощенных уравнениях, поэтому в начале 60-х годов была сформулирована проблема создания численной схемы прогноза погоды на основе полных уравнений гидротермодинамики

атмосферы с учетом всех значимых неадиабатических факторов.

На первых этапах решения этой проблемы центральной задачей была разработка эффективных численных методов решения гиперболических нелинейных уравнений. Уместно напомнить, что в начале 60-х годов вычислительные машины обладали производительностью в несколько тысяч операций в секунду с оперативной памятью в несколько тысяч слов (ламповая ЭВМ М-20, одна из лучших в те годы, имела производительность 20000 операций в секунду с оперативной памятью в 4096 слов). Здесь следует сказать, что метеорологами-вычислителями в эти годы был получен целый ряд выдающихся результатов, ставших достоянием мировой вычислительной общественности лишь спустя десятилетия. Это касается в первую очередь проблемы построения разностных схем для нелинейных гиперболических уравнений. Например, в 1959 году Норман Филлипс открыл явление нелинейной неустойчивости-ложного каскада энергии от коротких волн в длинные [135].

В 1966 году вышла фундаментальная работа А.Аракавы, в которой он предложил метод построения разностной схемы для уравнений двумерной несжимаемой жидкости, обладающей двумя квадратичными инвариантами [70]. Согласно теории Крейкнана о спектрах энергии и энстрофии в двумерной жидкости, в такой конструкции ложного каскада энергии в сторону коротких волн быть не может.

Кирк Брайен в 1966 году предложил метод конечных объемов (в современной терминологии) [80]. В середине 60-х годов Гурий Иванович Марчук предложил для решения уравнений гидротермодинамики атмосферы абсолютно устойчивые неявные схемы, основанные на методе расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным [50]. Этот метод был положен в основу разработанной в ВЦ СО АН СССР численной схемы прогноза погоды

по полным уравнениям, внедренной затем в оперативную практику Западно-Сибирского УГМС. Здесь следует остановиться на методах решения гиперболических уравнений, решение которых обладает большими пространственными градиентами. Проблема в первую очередь связана с переносом влажности и облачности – полей, ответственных за фазовые превращения и, следовательно, за источники нагревания в атмосфере. Исторически эта проблема усиленно изучалась в задачах газовой динамики при описании ударных волн. С этой точки зрения классической стала работа С.К.Годунова, показавшего, что в классе линейных разностных схем для уравнения переноса невозможно построить монотонную схему с порядком аппроксимации выше первого [14]. В этой связи мне хочется отметить работу Обухова А.М. [56], по-видимому, незамеченной в среде математиков-вычислителей. В этой работе фактически (но не на теоремном уровне!) был получен тот же результат.

В дальнейшем была разработана целая наука создания нелинейных монотонных разностных схем для линейных гиперболических уравнений, обладающих высоким порядком точности, и целый класс схем, близких к монотонным.

В начале 60-х произошло еще два революционных события, по существу определивших дальнейшее развитие рассматриваемых научных направлений. Первое – это революция в вычислительной технике, переход на полупроводниковую схемотехнику. Второе – это открытие Эдвардом Лоренцом странного аттрактора [126]. На открытии Лоренца мы остановимся подробнее позже, сейчас же только отметим, что оно сильно стимулировало изучение скорости роста начальных возмущений в моделях прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы. Кстати, в истории этого открытия также прослеживается тот же синдром – долгое время оно было достоянием только метеорологической научной среды.

Последнее замечание, касающееся методов решения уравнений динамики атмосферы, относится к так называемому спектральному методу – методу Галеркина, в котором в качестве базисных функций используются сферические гармоники. В 60-х годах он был неконкурентноспособным по сравнению с разностными методами из-за большого количества арифметических операций и использовался только в моделях малой размерности, однако, после открытия Орзагом спектрально-сеточного преобразования, он занял ведущее место при конструировании моделей прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы [130].

В конце 60-х начале 70-х годов в результате большой серии численных экспериментов было выработано представление, что предел "детерминированной" предсказуемости составляет величину порядка двух недель (некоторые оценки давали три недели) и на повестку дня вышла задача создания модели среднесрочного прогноза погоды (1-7 дней). Базой создания таких моделей должны были стать быстро развивающаяся вычислительная техника, развитие наблюдательной сети – большие надежды возлагались на спутниковые наблюдения и, естественно, научные разработки параметризаций процессов подсеточных масштабов, объективного анализа данных наблюдений и др. Эта программа наиболее ярко была осуществлена в созданном в 1975 году Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды. Основным результатом этой работы, выполненной под руководством Леннарта Бенгтсона, была разработка высокой технологии – системы четырехмерного усвоения данных, позволившей вывести прогностическую систему Европейского Центра на первое место в мире. Важно отметить, что решение этой проблемы было возможно только на основе результатов Первого глобального эксперимента, которые позволили определять качество модели – ее способность эффективно усваивать асинхронные данные.

Параллельно с этой центральной задачей большие усилия тратились на проблему моделирования общей циркуляции атмосферы и климата, проблему долгосрочного прогноза (что предсказуемо за пределом предсказуемости?) и проблему предсказуемости изменений климата. Все эти проблемы, естественно, имели и имеют широкое поле пересечений.

Первую численную модель общей циркуляции атмосферы на основе квазигеострофических уравнений (двуслойная модель) построил Норман Филлипс [134]. В начале 60-х годов Джозеф Смагоринский, возглавив вновь образованную в Принстоне Лабораторию геофизической гидродинамики, сформулировал программу последовательного изучения роли различных неадиабатических факторов в формировании общей циркуляции атмосферы с помощью численных моделей, основанных на полных уравнениях гидротермодинамики [146].

Одновременно началась разработка моделей общей циркуляции океана, и на основе этих моделей совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана, которая должна была стать основой глобальной климатической модели. В Советском Союзе такая программа была сформулирована в начале 70-х годов в Вычислительном центре СО АН СССР (Г.И.Марчук) и успешно реализовывалась в течение последних 20 лет сначала в ВЦ, а затем в Институте вычислительной математики РАН. Особо следует остановиться на проблеме прогноза изменений климата под влиянием антропогенной деятельности человека, в частности, под влиянием увеличения концентрации углекислого газа в атмосфере. Главным инициатором изучения этой проблемы был Михаил Иванович Будыко, который на основе простых балансных моделей радиационных потоков дал оценку увеличения глобальноосредненной поверхностной температуры при удвоении концентрации углекислого газа в атмосфере ($+3.5^{\circ}\text{C}$) [4].

Основополагающий вклад в изучение этой проблемы внесла группа сотрудников уже упомянутой нами Лаборатории геофизической гидродинамики, руководимая Суки Манабе. Здесь уместно сделать одно отступление. М.И.Будыко, не являясь специалистом в области численного моделирования общей циркуляции атмосферы и океана, верил, что все глобальные климатические трехмерные модели должны дать примерно одинаковый результат по чувствительности на удвоение концентрации углекислого газа. Он был сильно разочарован, когда это оказалось не так, и его вера в численное моделирование резко пошатнулось. Однако, с научной точки зрения, этот результат высветил фундаментальную проблему в теории климата – проблему чувствительности климата к малым внешним воздействиям и, следовательно, проблему идентификации климатических моделей по чувствительности. Другими словами эту проблему можно сформулировать следующим образом: что и с какой точностью должна воспроизводить климатическая модель, чтобы ее чувствительность была близка к чувствительности реальной климатической системы? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо было формализовать эту проблему на основе теории диссипативных динамических систем. Такая попытка была осуществлена в 90-е годы в Институте вычислительной математики РАН В.П.Дымниковым с сотрудниками [32, 95, 37, 98, 96]. Результатом работы стало формулирование методов построения операторов отклика климатической системы на малые внешние воздействия. Ключевым моментом этого подхода было исследование структуры аттракторов климатических моделей и их устойчивости.

Обратимся теперь к проблеме долгосрочного прогноза погоды. Эта проблема включает в себя две принципиальные задачи – проблему предсказуемости первого рода, которая, строго говоря, была формализована лишь в послед-

ние годы, и проблему предсказуемости второго рода, которая заключается в том, что выясняется роль краевых (по отношению к атмосфере) условий в выделении предсказуемого сигнала. Наиболее конструктивными в этом смысле были два предложения, сделанные в середине 70-х и начале 80-х годов. Оба предложения касались роли океана в формировании короткопериодных колебаний климата (на внутрисезонных и межгодовых временных масштабах). Первое предложение было выдвинуто Г.И.Марчуком [53, 128]. Его идея заключалась в том, что за короткопериодные колебания климата ответственны определенные зоны океана средних широт, названные им энергоактивными зонами Мирового океана. Для изучения этой гипотезы была организована в СССР специальная программа "Разрезы". Второе предложение было связано с исследованием роли тропиков Тихого океана в формировании межгодовых колебаний климата, более узко – связи феномена Эль-Ниньо с колебаниями климата в средних широтах. Для изучения этого феномена была сформирована в 1985 году международная программа ТОГА, которая привела к разработке численных схем прогноза этого явления и разработке совместных моделей атмосферы и тропического океана. Отметим, что принципиальное значение в понимании этой проблемы сыграла работа Хоскинса и Кароли [112].

Следует еще раз подчеркнуть, что развитие моделей прогноза погоды и климата напрямую стимулировалось развитием вычислительной техники. Три революции в вычислительной технике, происшедшие в последние 30 лет – переход на интегральные схемы, создание машин с конвейерными вычислениями и создание параллельных вычислительных систем с быстрой коммуникацией привели к разработке высоких вычислительных и информационных технологий в проблеме прогноза погоды. В основе этих технологий лежат методы решения трех задач – непосредственно зада-

чи прогноза погоды, задачи инициализации начальных данных (ликвидация шока гравитационных волн в начальный момент времени) и задачи четырехмерного усвоения данных. Решение проблемы предсказуемости ищется с помощью использования в начальный момент времени некоторого распределения ошибок начальных данных, т.е. решения не одной прогностической задачи, а серии прогностических задач. Сама идея использования метода Монте-Карло для решения метеорологических задач восходит к работам Эпштейна [101]. Этот метод идеально ложится на структуру параллельных вычислительных систем. Если говорить о конечной научной и технологической цели, то она заключается в создании прогностической системы, способной усваивать всю доступную асинхронную информацию, давая синхронные срезы состояния климатической системы и прогноз ее состояния на будущее.

Введение 2. Некоторые математические понятия и определения

Ключевыми проблемами динамической метеорологии (как части геофизической гидродинамики) является прогноз погоды и прогноз изменений климата. Ясно, что сколько-нибудь полезное обсуждение проблем прогноза погоды и климата может быть только в рамках строгих определений этих понятий. В дальнейшем мы будем пользоваться такими понятиями как динамическая система, траектория, аттрактор, мера и некоторыми другими. Поэтому прежде чем перейти к непосредственному изложению содержания книги мы определим эти понятия.

Мы будем предполагать, что существует некая идеальная модель динамики атмосферы, описываемая системой уравнений с частными производными:

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u \in U \quad (1)$$

Пространство U , которому принадлежит решение этой системы $u(t)$, называется фазовым пространством.

Мы будем для простоты считать, что система (1) автономна, так что в разрешенном виде она имеет вид

$$u(t) = S_t u_0$$

где S_t – обладает полугрупповым свойством [1]:

$$S_{t+\tau} = S_t \cdot S_\tau.$$

Само решение $u(t)$ мы будем называть траекторией системы (1) в пространстве U .

Будем считать пространство U нормированным с нормой $\|\cdot\|$ и метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Приведем несколько определений.

Определение 1.

Решение $u(t)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что из $\|u_0 - u_{10}\| < \delta$ следует $\|u(t) - u_1(t)\| < \varepsilon \forall t > 0$, где u_1 есть решение системы:

$$\frac{du_1}{dt} = F(u_1), \quad u_1|_{t=0} = u_{10}.$$

(Отметим, что выбираемые нами нормы обусловлены теоремой существования решения $u(t)$).

Все дополнительные определения, касающиеся устойчивости по Ляпунову, можно найти в книге [2].

Определение 2.

Решение $u(t)$ системы (1) называется устойчивым по отношению к постоянно действующим возмущениям δF , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что из $\|\delta F\| < \delta$, следует, что $\|u_1(t) - u(t)\| < \varepsilon \forall t > 0$, где $u_1(t)$ есть решение возмущенного уравнения:

$$\frac{du_i}{dt} = F(u_1) + \delta F(u_1), \quad u_1|_{t=0} = u_0.$$

Пусть в пространстве U задано некоторое множество A .

Определение 3.

Расстоянием от точки x до множества A называется число

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Определение 4.

ε – окрестностью множества A называется множество

$$Q_\varepsilon(A) = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}.$$

Определение 5.

Расстоянием между множествами A и B будем называть число

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b).$$

Операция $dist$ обладает следующими свойствами:

1. $dist(A, B) \neq dist(B, A)$.
2. $dist(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$.
3. если $dist(A, B) < \varepsilon$, то $A \subset O_\varepsilon(B)$.

Определение 6.

Хаусдорфовым расстоянием между множествами A и B называется число

$$dist_H(A, B) = \max\{dist(A, B), dist(B, A)\}.$$

Хаусдорфово расстояние обладает всеми свойствами метрики, т.е. симметрично, удовлетворяет неравенству треугольника и обращается в ноль тогда и только тогда, когда $A = B$.

Определение 7.

Множество $B_\alpha \subset U$ называется поглощающим, если для любого ограниченного множества $B \subset U$ найдется $T(B)$ такое, что

$$S_t B \subset B_\alpha \quad \forall t \geq T(B).$$

Другими словами, любое ограниченное множество пространства U рано или поздно под действием оператора S_t втянется в поглощающее множество и останется в нем навсегда.

Определение 8.

Систему (1) будем называть диссипативной, если она имеет поглощающее множество.

Определение 9.

Множество $A \subset U$ называется глобальным аттрактором полугруппы $S_t, t \geq 0$, если:

- 1) A – компактно,
- 2) A – строго инвариантно, то есть $S_t A = A$,
- 3) A притягивает каждое ограниченное множество $B \subset U$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon, B)$ такое, что $S_t B \subset O_\varepsilon(A), \forall t \geq T(\varepsilon, B)$.

Таким образом, глобальный аттрактор обладает двумя характеристиками: притяжением и инвариантностью. Если в определении аттрактора упор делать на свойство притяжения, то среди притягивающих множеств аттрактор будет минимальным притягивающим множеством. Если же упор делать на инвариантность аттрактора, то среди всех инвариантных множеств глобальный аттрактор будет максимальным.

Это означает, что глобальный аттрактор может включать в себя локальные аттракторы, область притяжения которых есть только некоторое подмножество из пространства U . Динамику системы мы можем также разбить на два класса – притяжение к аттрактору и динамику на аттракторе. При этом время притяжения к аттрактору играет фундаментальную роль, определяющую корректность поставленной задачи. На этой проблеме мы остановимся ниже.

Фактически аттрактор диссипативной системы можно найти по формуле:

$$A = \bigcap_{t>0} S_t(B_\alpha),$$

где B_α – поглощающее множество.

Если B_α компактное множество (например, замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве), то A всегда непусто. Другими словами, для диссипативных конечномерных систем существование аттрактора является фактом почти тривиальным. Важно подчеркнуть, что если пространство U , в котором действует отображение S_t , связно, то A – связное множество.

Перейдем теперь к определению размерности аттрактора. Поскольку аттрактор – множество, как правило, негладкое и часто фрактальное, то понятие размерности не является тривиальным.

Приведем определение хаусдорфовой и фрактальной размерности множеств.

Пусть U – компактное множество в метрическом пространстве X . Покроем это множество шарами $B_{r_j}(x_j)$ радиуса $r_j < \varepsilon$ с центрами в точках $x_j \in U$. Полученное покрытие обозначим через $v(\varepsilon)$. Очевидно,

$$U \subseteq v(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{M(\varepsilon, v)} B_{r_j}(x_j).$$

Составим выражение

$$\mu_X(U, \varepsilon, v) = \sum_{j=1}^{M(\varepsilon, v)} r_j^d,$$

где d больше или равно некоторого параметра.

Это выражение определяет "объем" множества v , состоящего из шаров радиуса $r_j \leq \varepsilon$ размерности d , покрывающих U . Теперь из всех покрытий множества U d -мерными шарами радиуса $r_j \leq \varepsilon$ выберем покрытие, содержащее наименьшее число указанных шаров.

Пусть

$$\mu_X(U, d, \varepsilon) = \inf_v \mu_X(U, \varepsilon, v) = \inf_v \sum_{j=1}^M r_j^d = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} r_j^d.$$

Хаусдорфовой мерой размерности d множества U называется число

$$\mu_X(U, d) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_X(U, d, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} r_j^d.$$

Наименьшее d , при котором этот ряд сходится (при прочих равных условиях) называется хаусдорфовой размерностью множества U .

$$d_H \equiv \mu_X(U) = \{d : \inf_d \mu_X(U, d) < \infty\}.$$

Если $r_i = \varepsilon$ для всех шаров, то мы приходим к понятию фрактальной размерности. В этом случае будем иметь

$$\mu_X(U, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon \cdot \varepsilon^d.$$

Имеем

$$\ln \mu_X(U, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln N_\varepsilon + d \ln \varepsilon),$$

и, следовательно, поскольку $\mu_X(U)$ – конечная величина

$$d_F = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon}.$$

Из самого построения следует, что

$$d_H \leq d_F.$$

Размерность аттрактора конечномерной диссипативной системы можно определить, используя понятие показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова являются важнейшей характеристикой при исследовании устойчивости траектории $u(t)$ по Ляпунову. Для их вычисления наряду с системой (1) рассмотрим систему в вариациях. (Для простоты будем рассматривать конечномерный случай.)

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u', \quad u'|_{t=0} = u'_0. \quad (2)$$

$\frac{\partial F}{\partial u} \equiv A$ есть матрица Якоби.

Систему (2) можно записать с помощью разрешающего оператора $L(t)$:

$$u' = L(t)u'_0.$$

При определенных условиях эргодичности (на определении эргодичности мы остановимся позже) показатели Ляпунова согласно эргодической мультипликативной теории Оселедцеца [57] можно определить следующим образом:

$$\mu_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \lambda_k(L^*(t)L(t)), \quad (3)$$

где λ_k – собственные числа матрицы L^*L .

Смысл такого определения очевиден: показатели Ляпунова μ_k определяют экспоненциальный рост (или затухание) линейно-независимых компонент решения u' при бесконечно малых вариациях u'_0 . (Подробное обсуждение смысла показателей Ляпунова можно найти в [64].)

На аттракторе объём фазового пространства ”растягивается” вдоль направлений, соответствующих положительным показателям, и ”сжимается” вдоль направлений, соответствующих отрицательным показателям.

Все ”положительные” направления должны принадлежать аттрактору, следовательно, размерность аттрактора

должна быть больше числа положительных показателей Ляпунова. Поскольку в среднем фазовый объём на аттракторе должен сохраняться, то оценку размерности сверху можно получить, например, с помощью формулы Каплана-Йорке:

$$d_j = j + |\mu_{j+1}|^{-1} \sum_{k=1}^j \mu_k,$$

где число j определяется из условия:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j \geq 0,$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j + \mu_{j+1} < 0$$

(все показатели μ_j упорядочены по убыванию).

Как уже указывалось в предисловии, целью данной книги является исследование устойчивости и предсказуемости не только траектории системы (1) (прогноз погоды), но и устойчивости и предсказуемости климата.

Напомним, что общепринятым определением климата является следующее:

Определение 10.

Климат есть ансамбль состояний, проходимый климатической системой за достаточно большой промежуток времени.

Поскольку ансамбль состояний – это множество состояний с заданной на нем мерой, то кажется совершенно необходимым остановиться на определении меры.

Теория меры является естественным обобщением таких понятий как площадь и объём на множества достаточно сложной структуры. Так же как геометрическому объекту приписывается число, называемое его площадью или объёмом, так и определённое множество можно приписать число, которое называется мерой. Если множество есть некото-

рая геометрическая фигура, то её площадь или объём и мера есть одно и то же. Множества, которым по некоторому правилу можно приписать меру, называются измеримыми. Совокупность измеримых множеств образует систему множеств, которая называется σ -алгеброй, а сама мера рассматривается как функция, заданная на этой системе множеств и ставящая в соответствие каждому множеству из этой системы число – меру этого множества.

Напомним определение σ -алгебры.

Определение 11.

Пусть X – произвольное множество. Система подмножеств Σ множества X называется σ -алгеброй, если выполняются следующие условия:

- 1) $X \in \Sigma$
- 2) Если $A \in \Sigma$, то $X - A \in \Sigma$
- 3) Если $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, \dots$, то $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

Определение 12.

Функция μ , определенная на подмножествах системы Σ , называется конечной счётно-аддитивной мерой, если:

1. μ принимает действительные неотрицательные значения на множествах системы Σ , т.е.

$$\mu(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Sigma.$$

2. Функция μ счётно-аддитивна, т.е. для любой последовательности попарно непересекающихся множеств ω_j из Σ имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \omega_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\omega_j), \quad \omega_j \in \Sigma, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

3. $\mu(X) < \infty$.

Число $\mu(\omega)$ называется мерой множества ω . Если $\mu(X) = 1$, то мера μ называется нормированной или вероятностной.

Определение 13.

Мера μ называется инвариантной относительно преобразования S_t , если

$$\mu(A) = \mu(S_t A) \quad \forall A \in \sigma.$$

Понятие инвариантной меры для нас является очень важным, поскольку оно принципиально в определении потенциальной предсказуемости траекторий системы (1).

В дальнейшем при изучении предсказуемости мы будем исследовать в основном модели крупномасштабных процессов, которые являются диссипативными и обладают конечномерным аттрактором. Мы будем также всегда предполагать, что траектория системы находится на её аттракторе. Поскольку аттрактор – компактное множество по определению, то согласно теореме Боголюбова-Крылова [68] на нём имеется по крайней мере одна инвариантная мера. Если эта мера эргодическая (а это условие также часто будет встречаться в наших рассуждениях), то она единственна.

Определение 14.

Пусть задана система (X, σ, μ, S_t) (X можно рассматривать как всё фазовое пространство или как аттрактор динамической системы S_t).

Динамическая система называется эргодической по отношению к мере μ , если X нельзя представить в виде двух непересекающихся инвариантных множеств положительной меры, т.е. невозможно равенство $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, $A = S_t A$, $B = S_t B$.

Таким образом, под климатом модели (1) мы будем понимать её аттрактор как множество и инвариантную меру, заданную на нём.

Напомним, что если динамика на аттракторе эргодична, то типичная траектория всюду плотна на нём, а мера всякого подмножества, принадлежащего аттрактору, будет совпадать со временем, которое проводит траектория на этом подмножестве [69]. Из этого следует, что временное среднее по типичной траектории для эргодической системы совпадает со средним по мере, что часто в физике принимают за определение эргодичности.

Остановимся ещё на одной важной теореме, дающей основания исследовать характеристики неустойчивости атмосферных процессов по реальным данным.

Теорема о возвращаемости (Пуанкаре)

Пусть (X, σ, μ, S_t) – динамическая система с инвариантной нормированной мерой μ . Пусть $A \in \sigma$ и $\mu(A) > 0$ ($\mu(X) = 1$). Тогда всегда найдётся такое $t = t^*$, что

$$\mu(A \cap S_{t^*} A) > 0.$$

Следует заметить, что если $\mu(A)$ малое число, то t^* как правило настолько большое, что эта теорема имеет скорее философское значение, чем практическое.

Глава 1

Крупномасштабная динамика атмосферы

§ 1. Определение погоды и климата. Основные уравнения и законы сохранения

Описание крупномасштабной динамики атмосферы начнем с определений погоды и климата. Под погодой мы будем понимать состояние атмосферы в фиксированный момент времени.

Климатом будем называть статистический ансамбль состояний, проходимый атмосферой за достаточно большой промежуток времени T .

Выбор этого периода весьма проблематичен, принятым в настоящее время периодом является $T \sim 30$ лет.

Коротко остановимся на источниках энергии, ответственных за формирование крупномасштабной циркуляции.

Основным источником энергии является, несомненно, поток солнечной энергии. На верхнюю границу атмосферы приходит поток $I_0 \simeq 1368 \div 1377 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

На единицу поверхности в среднем приходится

$$I_0 \frac{\pi a^2}{4\pi a^2} = \frac{1}{4} I_0 \simeq 350 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

Отметим, что геотермический поток составляет величину $\sim 0.05 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

Расчёты показывают, что в кинетическую энергию атмосферных движений переходит только $3.5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, т.е. атмосферу можно рассматривать как тепловую машину с КПД порядка 1%.

Нулевой уровень описания атмосферы как термодинамической системы – это глобальный баланс уходящей и приходящей радиации на верхней границе атмосферы:

$$\frac{I_0}{4}(1 - \alpha) = \delta\sigma T^4. \quad (1)$$

δ – коэффициент серости ($\delta \sim 0.95$),

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ (постоянная Стефана-Больцмана),

α – альbedo системы, $\alpha \cong 0.33$.

Рассчитанная из этого уравнения температура равна $255\text{K}(-18^\circ\text{C})$.

Известно, что средняя температура поверхности океана $\sim 288\text{K}(+15^\circ\text{C})$ $\Delta T = 33\text{K}$ – это следствие "парникового" эффекта атмосферы.

Так как альbedo системы $\alpha \sim 0.3$, то в атмосферу поступает $\sim 245 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Из этой величины до поверхности Земли (и поглощается поверхностью) доходит примерно $2/3$, т.е. $163 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ (данные Будыко [4]).

Следовательно, примерно $82 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ поглощается в атмосфере. Из этих расчетов следует вывод, что атмосфера греется в основном снизу, в отличие от океана, который греется сверху. В этом фундаментальное отличие этих двух сред.

Движущей силой атмосферных движений является дифференциальное нагревание поверхности Земли. Таким образом, задача описания природы атмосферной циркуляции заключается в том, чтобы понять, как дифференциальное нагревание на вращающейся Земле приводит к наблюдаемой циркуляции. Мы будем исследовать природу этой циркуляции на основе уравнений гидротермодинамики атмосферы.

Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= Q, \\ p &= \rho R T \end{aligned} \quad (2)$$

В системе (2) \vec{u} – вектор скорости, $\vec{u} = (u, v, w)^T$, $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, ρ – плотность атмосферы, p – давление, \vec{F} – поверхностные силы (силы трения), R – газовая постоянная, \vec{g} – массовые силы, в нашем случае это сила тяжести: $\vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2 \vec{R}_1$, где \vec{g}_0 – гравитационная сила, $\Omega^2 \vec{R}_1$ – центробежная сила, \vec{R}_1 – проекция \vec{r} на плоскость, перпендикулярную оси вращения. В нижних 25 км максимальный угол между \vec{g} и \vec{R} составляет 0.2° , а величина \vec{g} меняется не более чем на 1%. Поэтому в большинстве задач можно считать, что Земля – это сфероид, и сила тяжести направлена к центру сферы по радиусу.

Пусть

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

(x, y, z – локальная декартова система координат).

Выпишем систему уравнений (2) в сферической системе координат: λ – долгота, φ – широта, r – радиус. Метрические соотношения будут иметь вид:

$$dx = r \cos \varphi d\lambda, \quad dy = r d\varphi, \quad dz = dr.$$

Отсюда

$$u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt} = \frac{dz}{dt}.$$

Уравнения для u, v, w будут иметь вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv}{r} \operatorname{tg} \varphi - \frac{uw}{r} + 2\Omega \sin \varphi v - 2\Omega \cos \varphi w - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho} F_\lambda,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2}{r} \operatorname{tg} \varphi - \frac{vw}{r} - 2\Omega \sin \varphi u - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} F_\varphi,$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{r} u^2 + \frac{1}{r} v^2 + 2\Omega \cos \varphi u - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} F_z,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0, \quad (3)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q, \quad p = \rho RT,$$

$$\nabla \cdot \rho \vec{u} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \rho u r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho v r \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \rho w r^2 \cos \varphi \right).$$

Законы сохранения

1. Закон сохранения полного углового момента.

Полный момент зонального количества движения относительно оси вращения имеет вид:

$$M \equiv r u \cos \varphi + \Omega r^2 \cos^2 \varphi.$$

Нетрудно проверить, что имеет место равенство:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + r \cos \varphi \frac{F_\lambda}{\rho} \quad (4)$$

Умножая уравнение (4) на ρ и используя уравнение неразрывности, получаем:

$$\frac{\partial \rho M}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} \rho M = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} + r \cos \varphi F_\lambda. \quad (5)$$

Проинтегрируем уравнение (5) по объёму, занятому атмосферой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho M dv + \iiint_v \nabla \cdot \vec{u} \rho M dv = \\ = \iiint_v r \cos \varphi F_\lambda dv - \iiint_v \frac{\partial p}{\partial \lambda} dv. \end{aligned}$$

В качестве краевых условий по λ выбирается условие периодичности всех функций и производных от них, условие по φ : $\eta \cos \varphi \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$. Чтобы не усложнять проблему условием при $r \rightarrow \infty$, мы будем в дальнейшем предполагать, что вертикальная протяженность атмосферы конечна, и она много меньше радиуса Земли, так что множитель r^2 можно везде заменить на a^2 , где a – радиус Земли.

На верхней границе атмосферы мы также полагаем, что энергия атмосферных движений стремится к 0:

$$\rho(u^2 + v^2 + w^2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow H$$

(H – верхняя граница атмосферы).

На твердой поверхности Земли ставим условие непротекания $w = 0$ при $r = a$. Используя эти условия, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho M dv = \iiint_v a \cos \varphi F_\lambda dv. \quad (6)$$

Равенство (6) является фундаментальным соотношением для объяснения возникновения пассатов в тропической области.

Действительно, пусть

$$F_\lambda = -\frac{\partial \tau_\lambda}{\partial z} \quad (z = r - a),$$

и мы считаем радиус Земли постоянным.

Пусть

$$\tau_\lambda = -k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Используя аэродинамическую формулу, запишем при $r = a$ τ_λ в следующем виде:

$$\tau_\lambda = -c_d |u| u.$$

Тогда уравнение (6) может быть записано в виде (при условии, что $k = 0$ при $r = H$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho M dv = - \iint_S c_d |u| u a^2 \cos \phi d\lambda d\varphi. \quad (7)$$

Если мы предположим, что в атмосфере нет постоянного накопления момента количества движения, то

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho M dv = \frac{1}{T} \iiint \rho M dv \Big|_0^T \rightarrow 0, \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы получим, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \iint_S c_d |u| u a^2 \cos \phi d\lambda d\varphi \approx 0$$

при достаточно больших T .

Отсюда следует, что скорость u в пограничном слое атмосферы Земли должна быть знакопеременной.

2. Закон сохранения полной энергии

Определим составляющие полной энергии на единицу массы следующим образом:

$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ – кинетическая энергия,

$\Phi = gz$ – потенциальная энергия, $I = c_v T$ – внутренняя энергия (c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме).

Уравнение для кинетической энергии имеет вид:

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot \frac{\vec{F}}{\rho} - gw,$$

Уравнение для потенциальной энергии:

$$\frac{d\Phi}{dt} = gw.$$

Уравнение для внутренней энергии:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} + Q.$$

Складывая эти три уравнения, получаем:

$$\frac{d}{dt}(K + \Phi + I) = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{F}}{\rho} + Q. \quad (8)$$

Умножая это уравнение на ρ и используя уравнение неразрывности, нетрудно получить уравнение баланса полной энергии атмосферных движений.

§ 2. Уравнение гидростатики и примитивные уравнения. p -система координат

Под крупномасштабными процессами мы будем понимать процессы с характерным горизонтальным пространственным масштабом $L \sim 10^6$ м, вертикальным масштабом $H \sim 10$ км и временным масштабом $T \sim 1$ суток. Отсюда $\bar{u} \sim \frac{L}{T} \sim 10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $\bar{w} \sim \frac{H}{T} \sim 10^{-1} \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ (на самом деле характерный масштаб вертикальной скорости на порядок меньше).

Простой анализ показывает, что в третьем уравнении системы (3)§1 все члены кроме $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ много меньше g . Таким образом, для крупномасштабных атмосферных процессов с высокой точностью выполняется гидростатический баланс:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \quad (1)$$

Гидростатическое соотношение фильтрует вертикальное распространение звуковых волн и исключает необходимость задания начальных условий для w .

В результате горизонтальных движений воздуха поле давления и плотности перестраивается таким образом, что гидростатическое соотношение может быть нарушено. Это нарушение должно мгновенно "исправляться" полем вертикальных движений, что в свою очередь означает, что для определения w должно существовать диагностическое уравнение. Действительно, дифференцируя уравнение состояния по времени вдоль траектории, получим:

$$\frac{dp}{dt} = RT \frac{d\rho}{dt} + R\rho \frac{dT}{dt}.$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u},$$

из уравнения притока тепла:

$$c_p \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q.$$

Таким образом, можно получить уравнение для давления:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{1-\gamma} \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \rho Q,$$

где $\gamma = \frac{R}{c_p}$. Далее, интегрируя уравнение гидростатики по z от ∞ до z , получим:

$$p = - \int_{\infty}^z \rho g dz \quad (p = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty).$$

Продифференцируем последнее уравнение по t . Получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int_{\infty}^z \frac{\partial \rho}{\partial t} g dz = \int_{\infty}^z g \nabla \cdot \rho \vec{u} dz.$$

Исключая $\frac{\partial p}{\partial t}$ из уравнения для давления, получим искомое уравнение, связывающее w с остальными переменными, которое говорит о том, что w должно быть таким, чтобы существовало гидростатическое равновесие.

Однако, при гидростатическом равновесии нарушаются законы сохранения. Чтобы они снова выполнялись, необходимо сделать следующее:

1. Во всех уравнениях системы (3)§1 выбросить члены с w ($\frac{d}{dt}$ и оператор ∇ , естественно, определяются в трехмерном пространстве).

2. В определении кинетической энергии положить

$$K = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

3. Вместо r поставить a – радиус Земли.

Тогда мы приходим к так называемой системе примитивных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{a} + 2\Omega \sin \varphi v - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho} F_{\lambda}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a} - 2\Omega \sin \varphi u - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} F_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad p = R\rho T \quad (2)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

(Здесь $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial w}{\partial z}$).

p-система координат

Гидростатическое соотношение позволяет ввести так называемую p -систему координат.

Поскольку $\rho > 0$, то p есть монотонная функция z , и мы вместо вертикальной координаты z можем использовать давление p .

Будем для простоты обозначений в качестве исходной использовать декартову систему координат (x, y, z) . Наша задача – получить систему уравнений в координатах (x, y, p) .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_z &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_z &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z \quad (3) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Какие преимущества мы получаем, используя p -систему координат?

Рассмотрим член $\frac{1}{\rho} \nabla p$ в системе (2)§1. Поскольку из (3) следует, что $(\nabla p)_z = -\frac{\partial p}{\partial z} (\nabla z)_p$, то $\frac{1}{\rho} (\nabla p)_z = (\nabla g z)_p$.

Вводя новую функцию $\Phi = gz$ (геопотенциал), мы получаем, что

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p)_z = \nabla\Phi. \quad (4)$$

Это означает, что нелинейный член $\frac{1}{\rho}\nabla p$ превращается в линейный – $\nabla\Phi$.

Уравнение гидростатики:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$$

должно быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial p} &= -\frac{1}{g\rho}, \quad \text{или} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p} \end{aligned} \quad (5)$$

Но наиболее яркое преимущество p -системы можно увидеть из формы записи уравнения неразрывности.

В z -системе координат уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_z \cdot \rho\vec{u} = 0 \quad (6)$$

Поскольку из уравнения гидростатики следует, что

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z},$$

а

$$\nabla_z \cdot \vec{u} = \nabla_z^h \cdot \vec{u} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

где ∇_z^h – оператор градиента по горизонтальным переменным, \vec{u} – вектор (u, v) , то уравнение (6) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho \nabla_z^h \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla_z^h \rho = 0. \quad (7)$$

Из (3) следует, что

$$\nabla_z^h \cdot \vec{u} = \nabla_p^h \cdot \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial p} \cdot \nabla_z^h p.$$

Далее,

$$\vec{u} \cdot \nabla_z^h \rho = -\frac{1}{g} \vec{u} \cdot \nabla_z^h \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{u} \cdot \nabla_z^h p) + \frac{1}{g} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \nabla_z^h p.$$

Следовательно, уравнение (7) может быть переписано в виде

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla_z^h p + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho \nabla_p^h \cdot \vec{u} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial p} \cdot \nabla_z^h p - \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial p} \cdot \nabla_z^h p = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \nabla_p^h \cdot \vec{u} = 0. \quad (8)$$

В p -системе координат аналогом вертикальной скорости является $\tau \equiv \frac{dp}{dt}$. Таким образом, уравнение неразрывности в p -системе может быть записано в виде

$$\nabla_p \cdot \vec{u} = 0, \quad (9)$$

т.е. атмосфера в p -системе формально становится несжимаемой жидкостью.

Совершенно очевидно, что сжимаемость должна где-то проявиться, и она проявляется в краевых условиях. Как уже обсуждалось в предыдущих параграфах, на нижней границе атмосферы нужно ставить условие непротекания. На нижней границе давление является функцией координат и времени, следовательно, требуется еще одно эволюционное уравнение для поверхностного давления, при выводе которого надо использовать условие непротекания. Чтобы избежать этого недостатка, можно перейти к σ -системе, $\sigma = \frac{p}{p_*}$, где p_* – поверхностное давление, но в этом случае уравнение неразрывности снова становится эволюционным. Детали этих преобразований можно найти, например в [54].

§ 3. Эффекты вращения. Уравнение для квазигеострофического вихря

Рассмотрим примитивные уравнения движения в p -системе координат.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -l\vec{k} \times \vec{u} - \nabla\Phi + \vec{F}, \quad l = 2\Omega \sin \varphi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}.$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad p = \rho RT,$$

здесь \vec{k} – единичный вектор нормали к горизонтальной плоскости, l – параметр Кориолиса, Ω – угловая скорость вращения Земли.

Рассмотрим движения с масштабом L . Пусть средняя скорость частицы есть u . Тогда время, за которое частица проходит расстояние L , будет $t = L/u$; мы можем утверждать, что эффекты вращения будут незначительными, если $t \ll \frac{1}{2\Omega}$, или $\frac{L}{u} \ll \frac{1}{2\Omega}$. Эффект вращения будет существенным, если $\frac{L}{u} \gg \frac{1}{2\Omega}$ или $\frac{u}{2\Omega L} \ll 1$. Слева стоит безразмерное число, называемое числом Россби: $\varepsilon = \frac{u}{2\Omega L}$.

Если определить среднюю скорость из условия $K = \frac{m\bar{u}^2}{2}$, где K – полная кинетическая энергия атмосферной циркуляции, то $\bar{u} \sim 15 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

Пусть

$$L \approx 10^6 \text{ м}, \quad 2\Omega \approx 10^{-4} \frac{1}{\text{сек}}$$

и для средних широт получим

$$\varepsilon = \frac{15}{10^6 \cdot 10^{-4}} \approx 0.15.$$

Другими словами, для таких масштабов, которые мы определили как крупномасштабные, вращение очень существенно. Сделанный вывод не означает, что на Земле для получения влияния вращения нужны большие масштабы. Например, в Гольфстриме $L \approx 10^2$ км, но $\bar{u} \sim 0.1$ м/сек, и число

Россби будет равно

$$\varepsilon = \frac{10^{-1}}{10^{-4} \cdot 10^5} = 10^{-2}.$$

Фактически, малость числа Россби означает, что силы инерции малы по сравнению с кориолисовыми силами.

Действительно, в уравнениях движения при обезразмеривании на масштабы L , \bar{u} имеем (в отсутствие сил вязкости):

$$\varepsilon \frac{d\bar{u}}{dt} = -l\vec{k} \times \bar{u} - \nabla\Phi,$$

т.е. с точностью до ε мы имеем так называемые геострофические соотношения:

$$l\vec{k} \times \vec{u} = -\nabla\Phi \quad \text{в } p\text{-системе}$$

$$l\vec{k} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad \text{в } z\text{-системе.}$$

Отсюда имеем

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (1)$$

или

$$u = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Соотношения в (1) означают, что ветер в средних широтах дует вдоль изобар, оставляя повышенное давление справа в северном полушарии ($l > 0$) и слева в южном полушарии ($l < 0$).

Из геострофических соотношений будет следовать уравнение термического ветра, если мы продифференцируем геострофические соотношения по p :

$$l\vec{k} \times \frac{\partial\vec{u}}{\partial p} = -\nabla \frac{\partial\Phi}{\partial p} = \frac{R}{p} \nabla T,$$

(если воспользуемся уравнением гидростатики) или

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{pl} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R}{pl} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Из этого соотношения следует, что ветер в обоих полушариях должен расти с высотой.

Однако, следует сразу заметить, что геострофические соотношения являются диагностическими и не могут служить основой для исследования изменений (динамики) процесса. Динамика процесса идет через малые агеострофические компоненты. Подходящее уравнение для этого можно получить, беря операцию вихря в уравнении движения.

Получим уравнение квазигеострофического вихря в p -координатах. В качестве горизонтальных координат выберем для простоты декартовы координаты. Выберем приближение β -плоскости. (Плоскость, на которой фиксируется $\beta \equiv \frac{\partial l}{\partial y} = \text{const}$ и $l_0 = \text{const}$.) Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - lv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} + lu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, & \frac{dT}{dt} - \frac{RT\tau}{c_p p} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T + \tau \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT\tau}{c_p p} = 0.$$

Пусть $T = \bar{T}(p) + T'(x, y, t, p)$, $\Phi = \bar{\Phi}(p) + \Phi'(x, y, t, p)$, так что

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} = -\frac{R\bar{T}}{p}, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \frac{R\bar{T}}{pg} \equiv \bar{\gamma} \frac{R\bar{T}}{pg}.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T' + \tau \frac{\partial T'}{\partial p} + \left(\bar{\gamma} \frac{R\bar{T}}{pg} - \frac{RT}{c_p p} \right) \tau = 0$$

или, полагая $T' \ll \bar{T}$, получим

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T' + \tau \frac{\partial T'}{\partial p} - \frac{R\bar{T}}{pg}(\gamma_a - \bar{\gamma})\tau = 0,$$

т.к. $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$ — адиабатический градиент температуры.

Первые два уравнения также запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u + \tau \frac{\partial u}{\partial p} - lv &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla v + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + lu &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

От этих двух уравнений берем операцию вихря, т.е. получаем уравнение для вертикальной компоненты вихря. (Эта компонента является главной в силу нашего предыдущего анализа о порядке вертикальной скорости (см. §1).)

Пусть

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial l}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $\frac{dp}{dt} \sim w \frac{\partial p}{\partial z} = -grw$, т.е. $\tau \sim -grw$, то в последнем уравнении мы можем опустить члены с τ .

Полагая $\Omega = \omega + l$, будем иметь:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega \frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

В уравнении для T' также опустим член $\tau \frac{\partial T'}{\partial p}$. Т.к. $\frac{\partial \Phi'}{\partial p} = \frac{RT'}{p}$, то получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + \vec{u} \cdot \nabla \frac{p}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + \frac{R\bar{T}}{pg}(\gamma_a - \bar{\gamma})\tau = 0. \quad (5)$$

Умножим и разделим последний член этого уравнения на l_0 и введём обозначение:

$$m^2 \equiv \frac{p^2 g l_0}{R^2 \bar{T} (\gamma_a - \bar{\gamma})}.$$

Продифференцируем уравнение (5) по p . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} \left(m^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) + \vec{u} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial p} \left(m^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) + \\ + m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = -l_0 \frac{\partial \tau}{\partial p}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если принять условие геострофичности для u и v , то последний член в левой части уравнения обратится в 0. Следовательно, с хорошей точностью мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} \left(m^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) + \vec{u} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial p} \left(m^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right) = -l_0 \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (7)$$

Вернемся к уравнению для вертикальной компоненты вихря

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega \frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

Поскольку

$$\Omega = l + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

где

$$l \approx 10^{-4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \sim 2 \frac{\partial u}{\partial y} \sim 2 \frac{\bar{u}}{L} \sim 2 \cdot 10^{-5},$$

то вместо Ω в правой части можно положить l_0 . Складывая эти два уравнения, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla q = 0 \quad q = \Omega + \frac{\partial}{\partial p} \left(m^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right).$$

Если в уравнении для q положить

$$u = -\frac{1}{l_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{l_0} \frac{\partial \Phi'}{\partial x},$$

то можно ввести функцию тока $\psi = \Phi'/l_0$. Тогда

$$q = \Delta\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} \left(\tilde{m}^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right), \quad \tilde{m}^2 \equiv m^2 l_0 = \frac{p^2 g l_0^2}{R^2 \bar{T} (\gamma_a - \bar{\gamma})}$$

и уравнение для q имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0. \quad (8)$$

Возникает вопрос о краевых условиях по p . Наверху можно положить $pT' \rightarrow 0$, при $p \rightarrow 0$, т.е. $p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$. Внизу мы должны использовать кинематическое условие $w = 0$ в уравнении притока тепла на поверхности $z = 0$. Уравнение притока тепла на этой поверхности есть:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right|_{p=p_*} + J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)_{p=p_*} + \frac{1}{m^2} \frac{dp}{dt} = 0, \quad (9)$$

где p_* – приземное давление.

В простейшем случае мы будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p} + J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = 0 \quad \text{при} \quad p = p_*. \quad (10)$$

Полученные уравнения показывают, что в некотором смысле квазигеострофические потоки аналогичны двумерным потокам, т.е. передача энергии по спектру в них должна осуществляться по аналогичным законам.

Введем еще один очень важный параметр, называемый радиусом деформации Россби.

Это масштаб длины, на котором силы плавучести играют такую же роль, как и силы Кориолиса. Масштаб очень важен при изучении бароклининой неустойчивости.

Прежде всего определим частоту Брента-Вяйсяля:

$$N^2 = -g \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \right).$$

c – скорость звука; $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=const}$, S – энтропия.

Тогда

$$m^2 = l_0 \left(\frac{pg}{RTN} \right)^2.$$

Рассмотрим изотермический случай: $\bar{T}(p) = \tilde{T} = const$.
Здесь $\frac{R\tilde{T}}{g} = H$ – высота однородной атмосферы, которая определяется как высота, на которой в изотермической атмосфере гидростатическое давление (или плотность) падают в e -раз.

$$p = R\tilde{T}\rho; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -gp; \quad \rho = \frac{p}{R\tilde{T}}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{gp}{R\tilde{T}};$$

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{R\tilde{T}}}; \quad R\tilde{T} = gH, \Rightarrow H = \frac{R\tilde{T}}{g}.$$

Для атмосферы $H \approx 8\text{км}$ при $\tilde{T} \approx 255\text{К}$.

Величина $L_R = \frac{HN}{l_0}$ называется масштабом Россби.

В атмосфере

$$N/l_0 \approx 100, \text{ т.к.}$$

$$l_0 \sim 10^{-4} \frac{1}{\text{сек}}, \quad N \approx 10^{-2} \frac{1}{\text{сек}}.$$

Таким образом

$$L_R = \frac{HN}{l_0} = 8 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 800\text{км}.$$

Масштаб Россби дает основание ввести понятие крупного масштаба следующим образом. Движения называются крупномасштабными, если $L > L_R$.

Ясно, что поскольку масштаб Россби определяется через равный вклад сил плавучести и Кориолиса, то при $L > L_R$ сила плавучести несущественна, т.е. несущественна стратификация, а это значит, что процессы почти баротропны (или квазибаротропны). Следовательно, крупные масштабы квазибаротропны.

Фактически, мы для каждой бароклинной моды имеем свой масштаб. Если рассмотреть задачу на собственные значения

$$\frac{l_0^2}{H^2 N^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left(\frac{T'}{\tilde{T}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p} = \lambda \psi,$$

то

$$L_R^i = \frac{HN}{l_0 \lambda_i}.$$

Для уравнений мелкой воды, которые можно записать в форме закона сохранения,

$$\frac{d}{dt} \frac{\omega + l}{H} = 0,$$

где H – глубина воды, масштаб Россби-Обухова имеет вид:

$$L_R = \frac{\sqrt{gH}}{l_0}.$$

Линеаризуем уравнение (8) относительно стационарного решения

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \text{const}, \quad \psi = \bar{u}y + \psi'.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \psi' + \frac{\partial}{\partial p} \hat{m}^2 \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) + \\ & + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta \psi' + \frac{\partial}{\partial p} \hat{m}^2 \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\beta = \frac{\partial l}{\partial y}$, которое мы полагаем постоянным.

Рассмотрим проблему на собственные значения

$$\frac{\partial}{\partial p} \hat{m}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = -\lambda_i \varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} \Big|_{p=p_1, p_2} = 0.$$

Пусть

$$\psi' = \sum \psi_i(x, y, t) \varphi_i(p).$$

Тогда для ψ'_i имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \psi'_i - \frac{1}{(L_R^i)^2} \psi'_i \right) + \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'_i}{\partial x} + \left(\beta - \frac{\bar{u}}{(L_R^i)^2} \right) \frac{\partial \psi'_i}{\partial x} = 0,$$

Фактически $\frac{1}{(L_R^i)^2}$ входит как эффект сжимаемости, т.к. для двумерной несжимаемой атмосферы мы имеем уравнение с $L_R^i = \infty$.

Рассмотрим для простоты этот случай. Пусть

$$\psi_i = e^{i(kx + ly - \sigma t)}$$

– бегущие волны. Тогда дисперсионное соотношение будет иметь вид:

$$\sigma = k \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + l^2} \right),$$

а для сжимаемой атмосферы:

$$\sigma = k \left(\bar{u} - \frac{\beta - \frac{\bar{u}}{(L_R^i)^2}}{k^2 + l^2} \right) + \frac{1}{(L_R^i)^2}.$$

Это дисперсионное соотношение волн Россби. Их свойство – движение на запад по отношению к потоку. Фазовые скорости волн Россби при $L_R^i = \infty$ задаются соотношением

$$c_\Phi = \frac{\sigma}{k} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + l^2},$$

групповые скорости –

$$c_{g_x} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + l^2} + \frac{2\beta k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad c_{g_y} = \frac{2\beta k l}{(k^2 + l^2)^2}.$$

§ 4. Стационарные волны Россби. Горизонтальное и вертикальное распространение стационарных волн Россби

Рассмотрим класс стационарных волн:

$$\sigma = 0, \quad \bar{u} - \beta/(k^2 + l^2) = 0.$$

Перечислим некоторые свойства этого класса:

1. Стационарные волны могут быть только в западном потоке ($\bar{u} = 0$ – критическая широта).
2. Групповые скорости:

$$c_{g_x} = \frac{2\beta k^2}{(k^2 + l^2)^2},$$

$$c_{g_y} = \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2}.$$

Если $k > 0$, $l > 0$, то энергия волн распространяется на северо-восток.

3. Для каждого \bar{u} существует полное волновое число, при котором волны могут быть стационарны.

$$K_S^2 = k^2 + l^2 = \bar{u}/\beta.$$

Что происходит, если это равенство нарушается? Рассмотрим уравнение, где $\bar{u} = \bar{u}(y)$ – некоторая функция y .

Линеаризованное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \equiv \bar{\beta}.$$

Для стационарной волны $q' = q'(y)e^{ikx}$, $\sigma = 0$ и поскольку мы изучаем устойчивые волны, то уравнение для ψ' будет иметь вид

$$\bar{u} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} - k^2 \psi' \right) + \bar{\beta} \psi' = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\bar{\beta}}{\bar{u}} \right) \psi'.$$

Пусть источник волн расположен на какой-то широте. Обозначая $\frac{\bar{\beta}}{\bar{u}}$ через K_S^2 , уравнение для ψ' перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} - (k^2 - K_S^2) \psi' = 0. \quad (1)$$

Если $k^2 < K_S^2$, уравнение (1) имеет волновое решение. Если $k^2 > K_S^2$, то мы имеем решения с экспоненциальным затуханием по y (волны захватываются), $\bar{u} = 0$ есть критическая широта, при $\bar{u} < 0$ – волновых решений нет, нет и стационарных волн.

Как же распространяются волны от источника? Поскольку для стационарных волн $k^2 + l^2 = K_S^2 = \bar{\beta}/\bar{u}$, то

$$l^2 = K_S^2 - k^2, \quad l = \pm \sqrt{K_S^2 - k^2}.$$

Образуются два луча на север и на юг, с локальной групповой скоростью

$$c_{gv} = \pm \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2}.$$

Рассмотрим волны Россби в медленно меняющейся среде на сфере [112]. Здесь удобно рассмотреть меркаторскую проекцию:

$$x = \alpha \lambda, \quad y = \alpha \ln((1 + \sin \varphi) / \cos \varphi)$$

$$\frac{1}{\alpha \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\cos \varphi = \operatorname{sech}(y/\alpha), \quad \sin \varphi = \tanh(y/\alpha).$$

Если у нас есть зональная скорость

$$\bar{u} = \frac{a}{\cos \varphi} \frac{d\lambda}{dt}, \quad \text{то} \quad \bar{u}_M = \frac{dx}{dt} = \frac{\bar{u}}{\cos \varphi},$$

то есть эта скорость пропорциональна угловой скорости. Линеаризованное уравнение (11) в сферической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{1}{\cos \varphi} \left\{ \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(2\Omega \sin \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} \right) \right\} = 0.$$

В меркаторской проекции

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_M \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \beta_M \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

где

$$\beta_M = \frac{2\Omega}{a} \cos^2 \varphi - \frac{d}{dy} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d}{dy} (\cos^2 \varphi \bar{u}_M).$$

Дисперсионное соотношение для плоских волн при постоянных β_M, \bar{u}_M

$$\sigma = \bar{u}_M k - \frac{\beta_M k}{k^2 + l^2}.$$

Компоненты групповой скорости

$$U_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{\sigma}{k} + \frac{2\beta_M k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad V_g = \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{2\beta_M k l}{(k^2 + l^2)^2}.$$

Так как σ не зависит от x и t , то $\sigma = const$ вдоль луча и $k = const$ вдоль луча.

Пусть $\sigma = 0$. Тогда луч дается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_g}{U_g} = \frac{l}{k}.$$

Так как $\sigma = 0$, то $k^2 + l^2 = K_S^2 = \frac{\beta_M}{\bar{u}_M}$. Модуль групповой скорости будет равен

$$|C_g| = \sqrt{U_g^2 + V_g^2} = \frac{2\beta_M k}{(k^2 + l^2)^2} \sqrt{k^2 + l^2} = \frac{2\bar{u}_M k}{K_S},$$

т.е. групповая скорость равна примерно удвоенной скорости потока вдоль луча.

Действительно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{k}, \quad 2\bar{u} \cos \varphi = 2\bar{u} \frac{k}{K_S}.$$

Рассмотрим теперь более тщательно поведение решения уравнения для стационарных волн. Имеем:

$$\Delta \varphi + K_S^2 \varphi = 0 \quad \varphi = P(y) e^{ikx},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (K_S^2 - k^2)P = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + l^2(y)P = 0,$$

т.к.

$$K_S^2 = l^2 + k^2, \quad \frac{\beta_M}{\bar{u}} = K_S^2(y).$$

Пусть $P(y) = C \exp(if(y))$. Следуя WKВ приближению, получаем:

$$f(y) = \int_0^y l(y) dy + \frac{1}{2} i \ln l(y).$$

Отсюда

$$P(y) = Cl^{-1/2} \exp \left(i \int_0^y l(y) dy \right), \quad \varphi = Cl^{-1/2} \exp(ikx),$$

т.е. амплитуда растет как $(\sqrt{l})^{-1}$, если \bar{u} нарастает с y .

Это верно, если

$$\left| \frac{dl^{-1}}{dy} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{l^2} \frac{dl}{dy} \right| < 1.$$

Точка $l = 0$ есть точка поворота луча. WKВ-приближение здесь неверно. Здесь решением будет Эйри-функция. При

$\bar{u} = 0$ луч становится меридиональным и групповая скорость равна 0, т.к. $c_g = 2\bar{u}k/K_S$. WKВ-приближение опять неверно, но если ввести малую вязкость, то можно показать, что в линейном диссипативном случае энергия луча поглощается на критическом уровне $\bar{u} = 0$.

Простой пример: супервращение.

Пусть

$$\bar{u}_M = a\bar{\omega}.$$

Тогда

$$\beta_M = \frac{2 \cos^2 \varphi}{a} (\Omega + \bar{\omega})$$

$$K_S^2 = \frac{\beta_M}{\bar{u}_M} = \frac{2 \cos^2 \varphi (\bar{\Omega} + \bar{\omega})}{a^2 \bar{\omega}} = (\varepsilon a)^{-2} \cos^2 \varphi.$$

$$K_S = \frac{\cos \varphi}{\varepsilon a}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\bar{\omega}}{2(\bar{\Omega} + \bar{\omega})}.$$

Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l}{k} = \frac{\sqrt{K_S^2 - k^2}}{k} = \sqrt{\frac{K_S^2}{k^2} - 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{k^2 \varepsilon^2 a^2} - 1}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y},$$

то

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos \varphi \frac{dy}{dx}.$$

Итак, имеем

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos \varphi \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{k^2 \varepsilon^2 a^2} - 1}.$$

Решение этого уравнения есть

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \sin(\lambda - \lambda_0), \quad \cos \alpha = \varepsilon a k$$

это есть уравнение большого круга, проходящего через $\lambda = \lambda_0$ и $\varphi = 0$ и достигающего широты α , где $K_S = k$. Групповая скорость при этом вдоль луча ($\frac{dy}{dx}$) есть

$$c_g = \frac{2\bar{u}_M k}{K_S}.$$

Эта теория была решающим фактором в объяснении карт односточечных корреляций на сфере и построении теории отклика в северном полушарии на событие Эль-Ниньо.

Поскольку

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos \varphi \frac{dy}{dx},$$

а c_g вдоль $\frac{dy}{dx}$ равна $\frac{2\bar{u}_M k}{K_S}$, то c_g вдоль луча на сфере будет

$$\hat{c}_g = 2a\omega k \varepsilon a,$$

то есть скорость распространения энергии вдоль луча на сфере постоянна.

Вертикальное распространение стационарных волн

Рассмотрим уравнение для квазигеострофического потенциального вихря на β плоскости:

$$q = \Delta\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad (1)$$

линеаризованное относительно постоянного по x, y, p потока \bar{u} , при условии, что $m^2 = \text{const}$. Имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \beta = 0, \quad (\bar{v} = 0),$$

причем \bar{q} не зависит от x, y . Пусть

$$\psi = \psi(p) e^{i(kx + ly - \omega t)}$$

Тогда

$$(\bar{u}k - \omega) \left(-(k^2 + l^2)\psi + \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + k\beta\psi = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \left[\frac{\beta k}{\bar{u}k - \omega} - (k^2 + l^2) \right] \psi = 0.$$

Обозначим

$$m^2 \left[\frac{\beta k}{\bar{u}k - \omega} - (k^2 + l^2) \right] = n_1^2$$

так, что

$$\frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} + n_1^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Введем новые переменные

$$\xi = -\ln \frac{p}{p_0}$$

(ξ меняется от 0 до ∞ , когда p меняется от p_0 до 0).

В новых координатах уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + n_1^2 \psi = 0.$$

Теперь сделаем замену переменных

$$\psi = e^{\xi/2} \psi_1$$

и для функции ψ_1 будем иметь

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + (u_1^2 - 1/4) \psi_1 = 0.$$

Если $n_1^2 - \frac{1}{4} = n^2$, то

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + n^2 \psi_1 = 0.$$

Это уравнение допускает волновое решение, когда $n^2 > 0$. Если волны стационарны ($\sigma = 0$), то мы имеем соотношение:

$$\left(\frac{\beta}{\bar{u}} - k^2 - l^2\right) m^2 - \frac{1}{4} > 0.$$

Отсюда получится соотношение на \bar{u} , при котором возможно распространение волн:

$$0 < \bar{u} < \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{1}{4m^2}}.$$

Величина

$$u_c = \frac{\beta}{k^2 + l^2 + \frac{1}{4m^2}}$$

называется критической скоростью Россби.

Из последнего соотношения видно, что если предположить, что волны в стратосферу из тропосферы распространяются от поверхности Земли, где есть источники стационарных волн (орография и градиенты температуры материк-суша), то летом волны распространяться не могут ($\bar{u} < 0$), зимой – тоже (при больших скоростях). Следовательно, максимальное распространение волн – поздней осенью.

§ 5. Взаимодействие вихрей со средним потоком. Теоремы "неускорения"

В данном параграфе мы рассмотрим очень важную с точки зрения моделирования атмосферной циркуляции задачу взаимодействия волн и вихрей со средним зонально-симметричным потоком. Основные уравнения запишем в p -системе координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\
\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Theta}{\partial p} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad \Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} &= -\frac{p}{R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \frac{\partial \Phi}{\partial p}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Перепишем предпоследнее уравнение в терминах $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sigma \tau = 0,$$

где $\sigma = -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} \frac{\partial \Theta}{\partial p} = -\frac{1}{\rho \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$.

Будем считать, что $\sigma = const$. Линеаризуем (1) относительно зонально-симметричного потока и рассмотрим уравнение для стационарных волн:

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + lv', \\
\bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial y} - lv', \\
\bar{u} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x \partial p} + v' \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y \partial p} + \sigma \tau' &= 0, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial p} &= 0 \\
\bar{v} = 0 \quad \bar{\tau} = 0 \quad \bar{u} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} &= -\frac{R\bar{T}}{p}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение для Φ' можно переписать в следующем виде:

$$\bar{u} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x \partial p} - v' l \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} + \sigma \tau' = 0.$$

Умножим первое уравнение (2) на u' , второе – на v' , третье на $\frac{\partial \Phi'}{\partial p}$, четвертое – на Φ' и сложим.

Полагая $E' = \frac{u'^2 + v'^2}{2}$, будем иметь

$$\bar{u} \frac{\partial E'}{\partial x} + u' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi' u'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi' v'}{\partial y} + \Phi' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right)$$

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)^2 \right] - \frac{v' l}{\sigma} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} + \tau \frac{\partial \Phi'}{\partial p} = 0$$

$$\Phi' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \Phi' \frac{\partial \tau'}{\partial p} = 0.$$

Пусть $\vartheta' = E' + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \right)^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \vartheta' + u' \Phi') + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi' v') + \frac{\partial}{\partial p} (\Phi' \tau') = \\ = -v' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{v' l}{\sigma} \frac{\partial \Phi'}{\partial p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) можно трактовать следующим образом: слева стоит дивергенция потока волновой энергии

$$\operatorname{div} \bar{u} \vartheta' + \operatorname{div} \bar{u}' \Phi' = B.$$

Напомним, что $\bar{v}, \bar{\tau} = 0$. Справа стоят источники волновой энергии: баротропные и бароклинные $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \sim \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)$.

Осредним уравнение (3) по x . Получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \overline{\Phi' v'} + \frac{\partial}{\partial p} \overline{\Phi' \tau'} = -\overline{v' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v' \overline{\frac{\partial \Phi'}{\partial p} l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \quad (4)$$

Вычислим потоки волновой энергии $\overline{\Phi' v'}$ и $\overline{\Phi' \tau'}$. Первое уравнение системы (2) перепишем в следующем виде (форма Громеки):

$$\frac{\partial}{\partial x} (u' \bar{u} + \Phi') = \left(l - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) v'.$$

Умножим это уравнение на $u'\bar{u} + \Phi'$ и осредним по x .
Получим

$$\left(l - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \overline{v'(u'\bar{u} + \Phi')} = 0$$

или

$$\overline{v'u'\bar{u}} = -\overline{\Phi'v'},$$

т.е. при $\bar{u} > 0$ поток импульса противоположен потоку волновой энергии (потенциальной). Далее, умножим третье уравнение (2) на Φ' и поделим на σ . После осреднения по x получим:

$$\overline{\tau'\Phi'} = \frac{\overline{\Phi'v'}}{\sigma} l \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} - \frac{\bar{u}}{\sigma} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right) \Phi'}.$$

Рассмотрим геострофический поток: $v' = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi'}{\partial x}$, тогда первый член в правой части обратится в нуль, а второй примет следующий вид:

$$\overline{\tau'\Phi'} = \frac{\bar{u}l}{\sigma} \overline{v' \frac{\partial \Phi'}{\partial p}}$$

т.к. $\frac{\partial \Phi'}{\partial p} \sim -T'$, то знак вертикального переноса энергии и меридионального потока тепла также противоположны.

Далее обозначим:

$$-\overline{u'v'} = Y \quad \frac{l}{\sigma} \overline{v' \frac{\partial \Phi'}{\partial p}} = Z$$

Тогда

$$\overline{\Phi'v'} = \bar{u}Y$$

$$\overline{\Phi'\tau'} = \bar{u}Z.$$

и уравнение (4) переписется в виде:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

Вектор \vec{F} с компонентами (Y, Z) есть поток Элиассена-Пальма и (5) есть формулировка теоремы: для невязкого квазигеострофического потока и стационарных волн дивергенция потока Элиассена-Пальма равна нулю [67].

Этот результат для баротропных потоков мы получили ранее: $\frac{\partial u'v'}{\partial y} = 0$.

Поскольку дивергенция (5) равна нулю, то можно ввести функцию тока

$$Y = \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad Z = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

так что изолинии функции ψ дадут графическое представление потока энергии (Рис.1):

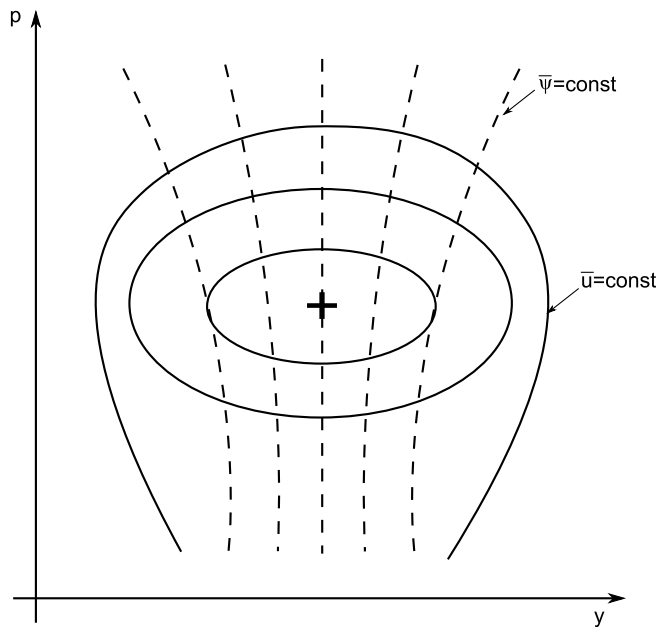


Рис. 1. Графическое представление потока энергии

Тогда поток энергии будет идти в трубках, ограниченных изолиниями ψ , увеличиваясь с увеличением \bar{u} . Если энергия

течет в сторону возрастающего \bar{u} , то поток энергии дивергентен, и, следовательно, волновая энергия пополняется за счет \bar{u} , если, наоборот, поток течет в сторону меньших \bar{u} , то волновая энергия преобразуется в энергию зонального потока. Кроме того, отметим, что $\bar{u} = 0$ есть критическая линия, за которую поток энергии проникнуть не может.

Рассмотрим теперь взаимодействие вихрей со средним потоком для нелинейного случая, и покажем, что и в этом случае поток Элиассена-Пальма играет фундаментальную роль.

Пусть атмосферный поток описывается уравнением для квазигеострофического потенциального вихря, т.е.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Пусть $q = \bar{q} + q'$, $\bar{v} = 0$ в силу геострофической функции тока.

Уравнение для зонально-осредненного потока будет иметь вид:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} = 0.$$

Т.к.

$$q' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{l\Theta'}{\frac{\partial \Theta}{\partial p}},$$

то

$$\begin{aligned} q'v' &= v' \frac{\partial v'}{\partial x} - v' \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial}{\partial p} \frac{l\Theta'}{\frac{\partial \Theta}{\partial p}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x} - \frac{\partial u'v'}{\partial y} + u' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{l}{\frac{\partial \Theta}{\partial p}} v' \Theta' - \frac{l}{\frac{\partial \Theta}{\partial p}} \Theta' \frac{\partial v'}{\partial p}. \end{aligned}$$

Но $\frac{\partial v'}{\partial p} \sim \frac{\partial \Theta'}{\partial x}$, следовательно, осредняя предыдущее равенство по x , получим

$$\overline{q'v'} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{l}{\frac{\partial \Theta}{\partial p}} \overline{v'\Theta'}.$$

Так как

$$\Theta' = T' \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} < 0, \quad T' = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial p},$$

то

$$q'v' = \operatorname{div} \vec{F},$$

где \vec{F} – вектор потока Элиассена-Пальма.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{F}. \quad (6)$$

Если $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$, то $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0$.

Если $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0$, то $\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{F} = 0$, $\operatorname{div} \vec{F} = \text{const}$, но $\operatorname{div} \vec{F} = v'q'$, и если на границе $v'q' = 0$, то $\text{const} \equiv 0$.

Это есть доказательство знаменитой теоремы Чарни-Дразина о неускорении зонального потока (об отсутствии взаимодействия вихрей с зональным потоком) [85]:

Перейдем теперь к анализу взаимодействия осредненных по времени полей с вихрями.

Эта проблема, вообще говоря, несколько искусственна, поскольку не дает, в отличие от зонального осреднения, разделения масштабов пространственных, однако, она имеет смысл для временного разделения масштабов. Итак, для простоты будем рассматривать баротропное уравнение вихря:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$q = \Delta \psi + l, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Осредним это уравнение по некоторому временному интервалу

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{q'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q'v'}}{\partial y} = 0$$

Здесь

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q dt, \quad q = \bar{q} + q', \quad \bar{q}' = 0, \quad \bar{u}' = 0, \quad \bar{v}' = 0.$$

Таким образом, мы имеем

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{q'v'} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{q'u'}.$$

Рассмотрим отдельно члены правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} q'v' &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) v' \right] = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'^2}{2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u'v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} u' \frac{\partial v'}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v'^2}{2} - \frac{u'^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} u'v' \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} q'u' &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) u' = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v'u'}{\partial x} - v' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{u'^2}{2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u'v' + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{u'^2}{2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u'v' + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v'^2}{2} - \frac{u'^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Суммируя $\frac{\partial}{\partial y} q'v'$ и $\frac{\partial}{\partial x} q'u'$, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \overline{q'v'} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{q'u'} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{(v'^2 - u'^2)} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} \right].$$

Следуя [113], введем вектор \vec{E} с компонентами $\overline{v'^2 - u'^2}$, $-\overline{u'v'}$. Тогда уравнение для осредненных величин будет иметь вид:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y} \nabla \vec{E} \quad (7)$$

Это уравнение, хотя и имеет более сложную структуру по сравнению с (6), весьма полезно для диагноза физических механизмов формирования низкочастотной изменчивости атмосферных процессов.

Глава 2

Устойчивость потоков двумерной несжимаемой атмосферы

§ 1. Уравнения динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости. Интегральные инварианты

Как уже отмечалось во введении, исследование устойчивости крупномасштабных атмосферных потоков мы начнем с простейшей задачи двумерной баротропной атмосферы. Это совершенно оправдано, так как крупномасштабные процессы квазидвумерны. Такой подход позволяет выделить в чистом виде эффекты и роль баротропной неустойчивости в формировании низкочастотной изменчивости атмосферных движений. Напомним, что под баротропной неустойчивостью мы понимаем процесс формирования неустойчивых возмущений, когда источником их энергии является кинетическая энергия основного потока. Для демонстрации классических результатов (которые, впрочем, без особого труда распространяются на уравнения двумерной атмосферы) в первых параграфах данной главы будет рассмотрена задача исследования устойчивости движений двумерной идеальной несжимаемой жидкости в некоторых идеализированных областях.

В качестве основной задачи в данном параграфе будем рассматривать уравнение двумерной несжимаемой жидкости. Для простоты динамику двумерной несжимаемой жидкости (в данном параграфе – идеальной) рассмотрим в периодическом канале с условием непротекания на границах канала. В инвариантной форме уравнения двумерной идеальной несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

В декартовой системе координат система уравнений будет иметь вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Здесь u, v – компоненты скорости, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$ – индивидуальная производная, $\rho_0 = \text{const}$ – постоянная плотность, p – давление.

Граничные условия

$$u, v, p(x, y, t) = u, v, p(x + L_x, y, t)$$

(условие периодичности по x), $v = 0$ при $y = y_1, y_2$.

Так как жидкость баротропна, то на замкнутых границах можно выписать условие сохранения циркуляции

$$\int_{L_1} u dx = C_1, \quad \int_{L_2} u dx = C_2. \quad (2)$$

Условие несжимаемости (третье уравнение системы (1)) позволяет ввести функцию тока:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (3)$$

при этом в предположении гладкости u и v уравнение несжимаемости будет удовлетворяться тождественно.

Поскольку жидкость двумерна, то мы имеем только одну (вертикальную) компоненту завихренности

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Используя (3), получим

$$\omega = \Delta\psi. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что уравнение для ω будет иметь вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Уравнение (5) означает, что ω есть лагранжев инвариант. Лагранжевым инвариантом будет и любая гладкая функция от $\omega \rightarrow F(\omega)$

$$\frac{dF(\omega)}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial t} + u\frac{\partial F(\omega)}{\partial x} + v\frac{\partial F(\omega)}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

В силу условия бездивергентности потока уравнение (6) может быть записано в так называемой дивергентной форме:

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial t} + \frac{\partial F(\omega)u}{\partial x} + \frac{\partial F(\omega)v}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Интегрируя (7) по всей области (каналу) D и используя граничные условия, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D F(\omega) dD = 0. \quad (8)$$

Соотношение (8) означает, что для системы (6) существует бесконечное множество интегральных инвариантов.

Умножая первое уравнение системы (1) на u , второе на v и складывая, получим уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad \text{где } E = \int_D \frac{u^2 + v^2}{2} dD. \quad (9)$$

Пусть $\psi, u, v, \omega \in \Phi$, где Φ – некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\eta, \psi) = \int_D \eta \psi dD.$$

Тогда, используя представление (3), уравнение для ω можно записать в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) = 0,$$

где

$$J(\psi, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

а интегральные соотношения (8) и (9) в виде

$$(F(\Delta \psi), 1) = C_3, \quad -(\Delta \psi, \psi) = C_4.$$

Действительно, поскольку

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2, \quad v^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{то } \iint \Delta\psi\psi dD &= \iint \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\psi dxdy + \iint \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\psi dxdy = \\ &= - \iint \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdy + \iint \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy - \\ &- \iint \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}dxdy = - \iint (u^2 + v^2)dxdy + \int_x \left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx. \end{aligned}$$

В силу краевых условий: ψ на границе есть константа, $\int_x \frac{\partial\psi}{\partial y}|_{y=y_1, y_2} dx$ есть также константа – последний интеграл не зависит от времени и, таким образом, наше представление энергии верно.

Получим несколько свойств якобиана, выполняющихся при заданных краевых условиях:

1. $J(\psi, \psi) = 0$, это свойство выполняется тождественно;
2. $J(\psi, \eta) = -J(\eta, \psi)$ – свойство кососимметричности;
3. $\iint J(\psi, \omega)\psi dD = 0$ – свойство ортогональности;
4. $\iint J(\psi, \omega)\omega dD = 0$ – свойство ортогональности

Первые два свойства очевидны. Третье соотношение следует из закона сохранения энергии, четвертое – из закона сохранения квадрата вихря (энстрофии). Действительно,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0.$$

Умножая это уравнение скалярно на ω , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\omega, \omega)}{2} + (J(\psi, \omega), \omega) = 0.$$

Можно выписать еще законы сохранения импульса в терминах ω . Например:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega, y) = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\omega, y) &= \frac{\partial}{\partial t} \iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) y dD = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint \left(-\frac{\partial u}{\partial y} y \right) dD = \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint (-u) dD + \int_x uy \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx \right] = 0. \end{aligned}$$

Итак, мы имеем бесконечный набор законов сохранения, которые должны быть связаны с определёнными симметриями исходной системы уравнений. Возникает фундаментальный вопрос: в какой степени эти законы сохранения определяют поведение решения исходной задачи, и в частности его устойчивость? Для ответа на этот вопрос мы должны сначала понять, с какими видами симметрии связан наш набор законов сохранения.

Мы знаем, что закон сохранения энергии определяется инвариантностью относительно сдвигов по времени, импульса – однородностью пространства, момента импульса – изотропностью пространства. Понимание, что бесконечное количество инвариантов в баротропной жидкости связано с ”вмороженностью” вихря в частицу, то есть с вихрем как лагранжевым инвариантом, кажется очевидным, однако соответствующая группа симметрий совершенно не очевидна. Недавно стало понятным, что эти инварианты связаны с инвариантностью системы относительно перестановок лагранжевых частиц в начальный момент времени, то есть эти инварианты не несут в себе какой-то физической ”нагрузки”.

Тем не менее само свойство ”вмороженности” вихря в частицу даёт возможность получить дополнительные ограничения на поведение жидкости в канале, и в частности, получить конкретные условия устойчивости двумерных потоков. Для понимания этого рассмотрим два квадратических инварианта: энергию и энстрофию (с точностью до множителя

1/2):

$$E = -(\psi, \Delta\psi), \quad \Omega = (\Delta\psi, \Delta\psi).$$

Рассмотрим далее проблему на собственные значения для оператора Лапласа

$$\Delta\psi_i = -\lambda_i\psi_i \quad (10)$$

с краевым условием периодичности по x и условиями $\psi_i = 0$ при $y = y_1, y_2$. Решение нашей исходной задачи удовлетворяет краевым условиям

$$\psi|_{y=y_1} = C_1, \quad \psi|_{y=y_2} = C_2.$$

C_1 мы можем положить равным нулю, не снижая общности, так как функция ψ определена в задаче с точностью до константы. Константа C_2 определяет интегральный расход

$$\iint u dx dy = - \iint \frac{\partial\psi}{\partial y} dx dy = \int_x \psi|_{y=y_2} dx = -C_2 L_x.$$

Для простоты будем рассматривать потоки с интегральным расходом, равным нулю, чтобы иметь возможность рассматривать спектральную задачу (10) как порождающую полную систему $\{\psi_i\}$ для представления ψ в виде ряда

$$\psi = \sum \alpha_i \psi_i.$$

(В противном случае мы должны в качестве второго краевого условия принять $\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{y=y_2} = 0$.)

Поскольку все λ_i в нашем случае неотрицательны, а ψ_i ортогональны, то мы имеем представление

$$E = \sum \lambda_i \alpha_i^2, \quad \Omega = \sum \lambda_i^2 \alpha_i^2.$$

Так как E и Ω – инварианты, то инвариантом будет и величина

$$\bar{\lambda} = \frac{\Omega}{E} = \frac{\sum \lambda_i^2 \alpha_i^2}{\sum \lambda_i \alpha_i^2}.$$

Обозначим через E_i величину $\lambda_i \alpha_i^2$. Очевидно, что E_i есть энергия, приходящаяся на подпространство, натянутое на ψ_i . Следовательно,

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum \lambda_i E_i}{\sum E_i}$$

есть взвешенное по энергии среднее волновое число (квадрат действительного волнового числа, если учесть представление λ_i через волновое число k_i), которое является также интегральным инвариантом. Отсюда следует, что энергия в системе не может перераспределяться по волновым числам произвольно – если она идёт от движений с малыми волновыми числами к движениям с большими волновыми числами, то должно наблюдаться и обратное движение энергии.

Рассмотрим уравнение (1) с малой величиной диссипации (например, будем считать, что в системе есть молекулярная малая постоянная диссипация, так что мы должны рассматривать двумерное уравнение Навье-Стокса)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \varepsilon \Delta \omega.$$

Уравнение для Ω будет иметь вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 2\varepsilon(\Delta \omega, \omega) = -2\varepsilon(\nabla \omega, \nabla \omega).$$

Уравнение для энергии имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -2\varepsilon(\Delta \omega, \psi) = -2\varepsilon(\omega, \omega) = -2\varepsilon \Omega.$$

Если мы выберем ε очень малым, то в силу ограниченности Ω диссипацию энергии можно считать очень малой, то есть энергия будет почти сохраняться очень долгое время, в то время как диссипация энтропии может быть не

малой в силу больших градиентов завихренности. Если диссипация происходит на малых масштабах (соответствующих большим волновым числам), а приток энергии идёт на средних масштабах, то мы будем наблюдать каскад завихренности от средних волновых чисел к большим (каскад энергии при этом будет мал).

Другими словами, распределение энергии по спектру в инерционном интервале – там, где нет внешнего притока энергии и нет существенной диссипации энтропии, будет определяться не потоком энергии, а потоком завихренности. Эта правдоподобная гипотеза подтверждается прямыми численными расчётами. Из соображений размерности следует, что наклон кривой зависимости энергии от волнового числа в этом диапазоне должен иметь вид $\sim k^{-3}$ (а не $k^{-5/3}$, как в обычной трёхмерной изотропной турбулентности Колмогорова).

§ 2. Устойчивость линейного приближения. Инварианты уравнения в вариациях

Традиционно исследование устойчивости по Ляпунову решений гидродинамических задач проводится с помощью линеаризации исходной системы уравнений. Этот метод даёт достаточные условия неустойчивости, поскольку можно всегда выбрать такое малое возмущение начальных данных, что линейное уравнение даст хорошее приближение на каком угодно большом наперёд заданном промежутке времени. В то же время условия устойчивости, получаемые в такой форме, есть только необходимые условия, но не достаточные.

Первый вопрос, который мы далее исследуем, заключается в исследовании преобразований интегральных инвариантов, существующих для нелинейных уравнений, в инварианты, возникающие при процедуре линеаризации. Исследу-

ем эту проблему в общем случае нелинейной системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + K(u) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (1)$$

имеющей множество инвариантов

$$I_i(u) = C_i(u_0), \quad \frac{\partial I_i}{\partial t} = 0.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство решений (1) вида $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$. Пусть нелинейный оператор $K(u)$ дифференцируем по Гато. Это означает, что существует производная

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} K(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = A(u) \cdot v.$$

Линеаризованное уравнение (уравнение в вариациях), следовательно, будет иметь вид, который получается дифференцированием уравнения (1) по ε (полагая $u_\varepsilon = u + \varepsilon v$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(u) \cdot v = 0. \quad (2)$$

Ясно, что интегралы $I_i(u + \varepsilon v) = C_i(\varepsilon, u_0, v_0)$ не зависят от времени.

Пусть I_i дифференцируем по Гато, то есть существует производная Гато от I_i по ε :

$$\left. \frac{dI_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = (G_i(u), v), \quad (3)$$

(поскольку производная Гато есть линейный функционал по v , то он представим в виде скалярного произведения (3)). $G_i(u)$ называется градиентом функционала I_i . Поскольку I_i не зависит от t , то $(G_i(u), v)$ также не зависит от t , то есть $(G_i(u), v)$ есть интегральный инвариант. Таким образом, справедливо следующее утверждение, принадлежащее П.Лаксу [123]:

Утверждение. Пусть $u(t)$ есть решение (1), $v(t)$ есть решение линеаризованного уравнения (2) (уравнения в вариациях) и пусть $I(u)$ – интеграл уравнения (1), а $G(u)$ – градиент I . Тогда форма $(G(u), v)$ есть интеграл движения (не зависит от t).

Итак, уравнение в вариациях имеет такое же количество инвариантов, что и исходное нелинейное уравнение.

Рассмотрим в качестве примера уравнение двумерной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0. \quad (4)$$

Линеаризованное уравнение (уравнение в вариациях) будет в этом случае иметь вид

$$\frac{\partial \delta \omega}{\partial t} + J(\delta \psi, \omega) + J(\psi, \delta \omega) = 0, \quad (5)$$

где $\delta \psi = \Delta^{-1} \delta \omega$, $\psi = \Delta^{-1} \omega$. Рассмотрим снова два интеграла системы (4)

$$\frac{(\omega, \omega)}{2} = \Omega, \quad -\frac{(\Delta^{-1} \omega, \omega)}{2} = E$$

(энтропия и энергия). Очевидно, что градиент Ω есть ω . Действительно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} (\omega + \varepsilon \delta \omega, \omega + \varepsilon \delta \omega) \Big|_{\varepsilon=0} = (\omega, \delta \omega).$$

Таким образом, $(\omega, \delta \omega)$ есть инвариант (не зависит от времени). Это означает, что если $\delta \omega$ в начальный момент времени ортогонально ω , то $\delta \omega$ остаётся ортогонально $\omega(t)$ в любой момент времени. Более того, поскольку $\|\omega(t)\|$ ограничено, то если в любой момент времени $\delta \omega(t)$ экспоненциально растёт или экспоненциально убывает, то экспоненциально растущая (убывающая) компонента должна принадлежать подпространству, ортогональному $\omega(t)$.

Рассмотрим теперь интеграл энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta^{-1}(\omega + \varepsilon\delta\omega), \omega + \varepsilon\delta\omega) &= \frac{1}{2}\{(\Delta^{-1}\omega, \omega) + \\ &+ \varepsilon(\Delta^{-1}\delta\omega, \omega) + \varepsilon(\Delta^{-1}\omega, \delta\omega) + \varepsilon^2(\Delta^{-1}\delta\omega, \delta\omega)\}. \end{aligned}$$

Если оператор Δ^{-1} симметричный (мы рассматриваем соответствующие краевые условия), то градиент функционала энергии есть $(\Delta^{-1}\omega, \delta\omega)$. Поскольку $\psi = \Delta^{-1}\omega$, то $(\psi, \delta\omega)$ есть инвариант. Это означает, что все утверждения, высказанные выше относительно ω , справедливы и относительно $\psi = \Delta^{-1}\omega$.

Перейдем теперь к рассмотрению классической задачи об устойчивости стационарных решений системы (4), зависящих только от y . Из определения якобиана следует, что $\bar{\omega} = \bar{\omega}(y)$ есть решение (4). Уравнение в вариациях удобно записать в виде

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi' + \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

где $\bar{u} = -\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}$. Обозначим для краткости записи $\Delta\psi'$ через ω' . Умножим уравнение (6) на $v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}$. Получим

$$\frac{\partial\omega'v'}{\partial t} - \omega'\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\omega'v'}{\partial x} - \bar{u}\omega'\frac{\partial v'}{\partial x} = -v'^2\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial\omega'v'}{\partial t} - \omega'\left(\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \bar{u}\frac{\partial\omega'v'}{\partial x} = -v'^2\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y}. \quad (7)$$

Заметим, что $\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x} \simeq \frac{dv'}{dt} = a'$ – возмущение ускорения частицы. Проинтегрируем уравнение (7) по области D . Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \omega'v' dD - \int_D \omega'a' dD = - \int_D v'^2 \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y} dD.$$

Нетрудно показать, что $\int_D \omega' v' dD = 0$. Действительно,

$$\int_D \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) v' dD = \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x} dD -$$

$$- \int_D \left(\frac{\partial u' v'}{\partial y} - u' \frac{\partial v'}{\partial y} \right) dD = - \int_D u' \frac{\partial u'}{\partial x} dD = - \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x} dD = 0.$$

Таким образом, верно соотношение

$$\int_D \omega' a' dD = \int_D v'^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} dD. \quad (8)$$

Предположим, что частица перемещается на δy . На уровне $y + \delta y$ завихренность частицы есть завихренность основного потока $\bar{\omega}(y + \delta y)$ и возмущения завихренности ω' . В силу закона сохранения вихря должно выполняться равенство

$$\bar{\omega}(y + \delta y) + \omega' = \bar{\omega}(y).$$

Так как

$$\bar{\omega}(y + \delta y) \simeq \bar{\omega}(y) + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \delta y,$$

то $\omega' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \delta y$. Поскольку $\delta y = v' \delta t$, то

$$\omega' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} v' \delta t. \quad (9)$$

Пусть $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$. Тогда при $v' > 0$, $\omega' < 0$ и из соотношения (8) следует, что $a' < 0$ и частица начнёт замедляться (ускорение направлено в сторону, противоположную скорости). Такой же результат будет, если $v' < 0$. Таким образом, условие $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$ представляется условием устойчивости движения. Справедливость этого предположения мы докажем позже.

Поскольку мы показали, что $\int_D \omega' v' dD = 0$, то из (9) следует, что в линейном приближении при $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$ имеет место

$$\int_D \frac{\omega'^2}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}} dD = \text{const.}$$

Обращение $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ в ноль хотя бы в одной точке есть условие, необходимое для неустойчивости. Оно означает, что в системе возможны перемещения частиц, не вызывающие возвращающей силы. Приведём ещё одно доказательство этого утверждения, принадлежащее Рэлею. Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$\psi' = \varphi(y) e^{ik(x-ct)}.$$

Условие комплексности фазовой скорости (c) – есть условие неустойчивости решения. Отметим, что в силу крайних условий, сформулированных в §1, это решение автоматически удовлетворяет полученным нами инвариантам при $k \neq 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial x} &= ik\psi', & \frac{\partial \psi'}{\partial t} &= -ikc\psi', \\ \Delta \psi' &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi \right) e^{ik(x-ct)}, \end{aligned}$$

то из (6) будем иметь

$$ik(\bar{u} - c) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi \right] e^{ik(x-ct)} + ik\varphi e^{ik(x-ct)} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0$$

или для $k \neq 0$

$$(\bar{u} - c) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi \right] = -\varphi \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}. \quad (10)$$

Предположим, что $c \neq \bar{u}$ (фазовая скорость волны не совпадает со скоростью основного потока). Тогда можно записать

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi = -\frac{\varphi \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u} - c}.$$

Проинтегрируем это выражение по y от y_1 до y_2 , умножив предварительно на φ^* . Из условия $\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$ при y_1, y_2 следует, что при $k \neq 0$ $\varphi = 0$ при y_1, y_2 . (Следовательно, и $\varphi^* = 0$ при y_1, y_2 .) Получим

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \varphi^* - k^2 |\varphi|^2 \right) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u} - c} dy,$$

или

$$- \int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{\bar{u} - c} dy. \quad (11)$$

Умножим теперь числитель и знаменатель подинтегральной функции правой части соотношения (11) на $\bar{u} - c^*$. Будем иметь

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} (\bar{u} - c^*)}{|\bar{u} - c|^2} dy. \quad (12)$$

Пусть $c^* = c_r - ic_i$. Приравнивая мнимые части в соотношении (12), получим

$$ic_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{|\varphi|^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}{|\bar{u} - c|^2} dy = 0. \quad (13)$$

Если $c_i \neq 0$, то $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ обязано обращаться в нуль на интервале (y_1, y_2) . Это и есть знаменитое утверждение Рэлея.

Неравенство нулю c_i означает, что мы имеем экспоненциально растущую и экспоненциально затухающую моды. При этом, очевидно, наше предположение, что $\bar{u} - c \neq 0$, верно.

Найдём интервал возможных значений реальной части фазовой скорости c . Это важно, поскольку если c_r лежит вне интервала изменения $\bar{u} \in [\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}]$, то операция деления, которую мы производили выше, всегда законна. Если $c_i \neq 0$, то функция $\eta = \frac{\varphi}{\bar{u} - c}$ будет регулярной. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varphi &= \eta(\bar{u} - c), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= (\bar{u} - c) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \eta, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= (\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \eta.\end{aligned}\tag{14}$$

Подставляя (14) в (10) и имея в виду, что $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$, получим

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \eta - k^2 (\bar{u} - c) \eta = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \eta,$$

или

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - k^2 (\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \eta = 0.\tag{15}$$

Умножим уравнение (15) на $(\bar{u} - c)$ и приведём его к виду

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - k^2 (\bar{u} - c)^2 \eta = 0.\tag{16}$$

Умножив (16) на η^* и проинтегрировав по y от y_1 до y_2 , получим

$$-\int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c)^2 \left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 dy - \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c)^2 k^2 |\eta|^2 dy = 0.$$

Мнимая часть этого уравнения приводит к равенству

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} (\bar{u} - c_r) \left(\left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\eta|^2 \right) dy = 0$$

или при $c_i \neq 0$

$$c_r = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left(\left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\eta|^2 \right) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|^2 + k^2 |\eta|^2 \right) dy}.$$

Отсюда следует, что $\bar{u}_{\min} \leq c_r \leq \bar{u}_{\max}$, то есть c_r принадлежит интервалу $[\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}]$.

§ 3. Достаточные условия устойчивости стационарных потоков

Рассмотрим снова уравнение для ω в форме

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0. \quad (1)$$

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, дают основание надеяться на то, что если решение задачи (1) $\bar{\omega} = \bar{\omega}(y)$ (функция, зависящая только от y) и $\bar{\omega}$ — монотонная функция y (для определённости будем считать, что $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$), то такое решение устойчиво по Ляпунову. Приведём доказательство этого утверждения, принадлежащее Т.Шеферду [143].

Поскольку $\bar{\omega}(y)$ есть монотонная функция y , то можно определить функцию, ей обратную — $Y(\bar{\omega})$, монотонно зависящую от $\bar{\omega}$. Пусть

$$A(\bar{\omega}, \omega') = - \int_0^{\omega'} \{Y(\bar{\omega} + \omega'') - Y(\bar{\omega})\} d\omega''. \quad (2)$$

Заметим, что функция $A(\bar{\omega}, \omega')$ знакопостоянная в силу монотонности $Y(\omega)$. Далее, если ω' мало, то

$$A(\bar{\omega}, \omega') = -\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \frac{\omega'^2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{\omega'^2}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}}.$$

Именно в терминах этой функции нами была исследована устойчивость решения $\bar{\omega}(y)$ на основе линеаризованной системы уравнений.

Уравнение для $A(\bar{\omega}, \omega')$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} A(\bar{\omega}, \omega') = \frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial \omega'} \frac{d\omega'}{dt}. \quad (3)$$

Имеем

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}.$$

Здесь мы, как обычно, рассматриваем уравнение (1) при возмущенных начальных данных, полагая

$$\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad \psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega' = \Delta \psi'.$$

Далее

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}} = -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}) + \omega' \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \omega'} = -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}).$$

Справедливость второго уравнения в (4) очевидна. Первое уравнение получается из следующей цепочки равенств:

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \int_0^{\omega'} Y(\bar{\omega} + \omega'') d\omega'' + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \omega' =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \int_{\bar{\omega}}^{\bar{\omega}+\omega'} Y(\eta) d\eta + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \omega' = -Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \omega'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(\bar{\omega}, \omega') &= (-Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega}) + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \omega') \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \\ &+ (-Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega})) \frac{d\omega'}{dt} = \\ &= (-Y(\bar{\omega} + \omega') + Y(\bar{\omega})) \left[\frac{d\omega'}{dt} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right] + \omega' \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 1, \quad \frac{d\omega'}{dt} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} A(\bar{\omega}, \omega') = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \omega' \equiv v' \omega'.$$

Далее

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} + \frac{\partial Av}{\partial y}.$$

Мы также показали в предыдущих лекциях, что

$$\iint \omega' v' dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy = 0,$$

то есть $\iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy$ - инвариант движения. Из существования этого инварианта уже нетрудно установить оценки для ω' в норме

$$\|\omega'\| = (\omega', \omega')^{1/2}.$$

Из гладкости функции $Y(\omega)$ следует, что

$$Y(\bar{\omega} + \omega'') - Y(\bar{\omega}) = \frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}(\Theta)\omega'',$$

где

$$\Theta \in [\bar{\omega}, \bar{\omega} + \omega''].$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\min} \iint \frac{\omega'^2}{2} dx dy &\leq \left| \iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\max} \iint \frac{\omega'^2}{2} dx dy. \end{aligned}$$

В силу инвариантности $\iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\min} \iint \frac{\omega'^2}{2} dx dy &\leq \left| \iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy \right| = \\ &= \left| \iint A(\bar{\omega}, \omega') dx dy \right|_{t=0} \leq \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\max} \iint \frac{\omega'^2}{2} dx dy \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\iint \frac{\omega'^2}{2} dx dy \equiv \frac{1}{2} \|\omega'\|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\max}}{\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\omega}}\right)_{\min}} \|\omega'\|_{t=0}^2. \quad (5)$$

Это неравенство означает устойчивость решения $\bar{\omega} = \bar{\omega}(y)$ при $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} > 0$.

§ 4. Преобразование энергии и устойчивость. Оценки энергии насыщения

Рассмотрим уравнение, описывающее динамику двумерной несжимаемой жидкости, в форме лагранжевого закона сохранения вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Пусть $\bar{\omega}, \bar{u}, \bar{v}$ – стационарное решение этого уравнения, устойчивость которого мы исследуем, и пусть

$$\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v'.$$

Уравнение для ω' будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \omega'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Будем для простоты считать, что

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\omega} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

так что уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} = 0.$$

Поскольку $\omega' = \Delta \psi', u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$, то это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + J(\psi', \Delta \psi') = 0. \quad (3)$$

В предыдущих лекциях мы показали, что энергия возмущений может быть представлена в виде скалярного произведения

$$E' = -(\Delta \psi', \psi')/2.$$

Поскольку $(J(\psi', \Delta \psi'), \psi') = 0$ (см. §1), то мы получим уравнение для энергии возмущений

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \iint \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} \psi' dx dy + \iint \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} dx dy. \quad (4)$$

Последний интеграл в уравнении (4) равен нулю в силу условия периодичности по x . Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\iint \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} \psi' dx dy = - \iint \bar{u} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial^2 y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial y} v' dx dy = \iint \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} (u' v') dx dy - \\
&\quad - \iint \bar{u} u' \frac{\partial v'}{\partial y} dx dy = \iint \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} (u' v') dx dy. \quad (5)
\end{aligned}$$

Интеграл $\iint \bar{u} u' \frac{\partial v'}{\partial y} dx dy = 0$, поскольку $\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial u'}{\partial x}$. Итак, окончательно соотношение (5) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \int_y \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} dy, \quad (6)$$

где черта сверху означает знак усреднения по x .

Поскольку величина $\overline{u' v'} = -\bar{\tau}$ есть "напряжение трения", то скорость изменения энергии возмущений может быть записана в следующей форме:

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = - \int_y \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} dy = \int_y \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy.$$

Эти равенства есть представления взаимодействия между средним потоком и возмущениями. Если энергия передаётся от среднего потока возмущением, то $\frac{\partial E'}{\partial t} > 0$, и наоборот.

Возникает вопрос: чем ограничена энергия возмущений?

Прежде чем перейти к исследованию этого вопроса, покажем, что в системе всегда выполняется "принцип Ле Шателье": возмущения, нарастая, должны снимать источник их роста. Действительно, в лекции 2 мы получили соотношение

$$\omega' \equiv q' = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} v' \delta t.$$

Умножим левую и правую части этого равенства на v' и проинтегрируем по x . Получим

$$\overline{q' v'} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \overline{v'^2} \delta t. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что если градиент завихренности основного потока есть источник возмущений, то поток завихренности направлен всегда так, чтобы уменьшить этот градиент.

Вернемся теперь к решению поставленного выше вопроса. Очевидно, что из закона сохранения энстрофии следует, что

$$\|\bar{\omega} + \omega'\|_t = \|\bar{\omega} + \omega'\|_{t=0}.$$

(будем считать, что $\bar{\omega}$ есть функция только y). Разобьем ω' на две компоненты: зонально-симметричную $[\omega']$ и волновую ω'' . Зонально-симметричная компонента есть функция только y , а для волновой компоненты справедливо соотношение

$$[\omega''] = 0,$$

где $[\cdot]$ есть знак осреднения вдоль x .

Итак, в силу закона сохранения энстрофии имеем

$$\|\bar{\omega} + [\omega'] + \omega''\|^2 = \|\bar{\omega} + \omega'\|_{t=0}^2.$$

Поскольку

$$(\bar{\omega} + [\omega'], \omega'') = 0,$$

то

$$\|\bar{\omega} + [\omega']\|^2 + \|\omega''\|^2 = \|\bar{\omega}\|^2 + \|\omega'\|_{t=0}^2 + 2(\bar{\omega}, \omega')_{t=0}. \quad (8)$$

Если считать, что в начальный момент времени $(\bar{\omega}, \omega') = 0$ и $\|\omega'\|_{t=0}^2$ мало, то мы получаем тривиальную оценку:

$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2.$$

Эта оценка может быть улучшена несколькими способами. Из (8) имеем

$$\|\omega''\|^2 = \|\bar{\omega}\|^2 - \|\bar{\omega} + [\omega']\|^2.$$

Поставим следующую вариационную задачу. Мы располагаем законом сохранения энтропии и законом сохранения импульса. Очевидно, что

$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2 - \min \|\bar{\omega} + [\omega']\|^2. \quad (9)$$

Будем искать минимум зонально-осреднённой величины ω при условии, что $\iint \omega y dx dy$ есть инвариант. В двойном интеграле можно оставить только интеграл по y от зонально-осреднённой величины, так как интеграл по x от "волновой" компоненты (ω'') есть нуль. Задача решается с помощью множителей Лагранжа.

Имеем

$$F \equiv (\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + \lambda \{(\tilde{\omega}, y) - C\}, \quad (10)$$

где под $\tilde{\omega}$ понимается зонально-осреднённая компонента ω , (\cdot, \cdot) есть интеграл по y , λ – множитель Лагранжа, C – константа, определяемая начальными условиями.

Для нахождения $\min F$ проварьируем (10). Получим

$$(\delta\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) + (\tilde{\omega}, \delta\tilde{\omega}) + \lambda(\delta\omega, y) = 0,$$

или

$$(2\tilde{\omega} + \lambda y, \delta\tilde{\omega}) = 0.$$

В силу произвольности $\delta\tilde{\omega}$ будем иметь

$$\tilde{\omega} = -\frac{\lambda y}{2}.$$

Отсюда $(\tilde{\omega}, y) = -\frac{\lambda}{2}(y, y)$, $(\tilde{\omega}, y)^2 = \frac{\lambda^2}{4}(y, y)^2$, $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{\lambda^2}{4}(y, y)$ и, следовательно,

$$(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{(\tilde{\omega}, y)^2}{(y, y)} \equiv \frac{C^2}{(y, y)}. \quad (11)$$

Таким образом, минимальная зонально-симметричная энтропия есть $C^2/(y, y)$, и мы получаем оценку

$$\|\omega''\|^2 \leq \|\bar{\omega}\|^2 - \frac{C^2}{(y, y)}. \quad (12)$$

§ 5. Связки интегралов в исследовании устойчивости

При исследовании данной задачи мы будем считать, что динамика двумерной несжимаемой жидкости происходит на двумерном торе (периодичность по обоим направлениям). Причина этого заключается в том, что операторы Δ (Лапласа) и ∇ (градиента) становятся симметричным и кососимметричным соответственно и коммутативными, что существенно облегчает выкладки. Итак, рассмотрим снова уравнение переноса вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) допускает бесконечное количество инвариантов типа

$$\int_D F(\omega) dD = \text{const},$$

где $F(\omega)$ – гладкое отображение и интеграл энергии

$$E = -(\psi, \Delta \psi)/2,$$

который в силу периодических краевых условий можно переписать в виде

$$E = (\nabla \psi \cdot \nabla \psi)/2.$$

В этом выражении скалярное произведение (\cdot) вычисляется в пространстве двумерных вектор-функций.

Образует "связку" интегралов, которая, очевидно, также будет инвариантом

$$I = E + \iint F(\omega) dD. \quad (2)$$

Доказательство устойчивости решения $\bar{\omega}$ задачи (1) основывается том, что находятся условия, при которых функционал I , являющийся инвариантом, имеет минимум. Этот

метод был предложен Арнольдом [1]. В конечномерном случае для этого достаточно показать, что первая вариация функционала должна обращаться в нуль, а вторая вариация должна быть больше нуля. Однако для бесконечномерного случая это не так. Тем не менее, мы сейчас получим условия, при которых первая вариация функционала I обращается в нуль, а вторая будет больше нуля. Для системы уравнений, описывающей динамику двумерной жидкости на вращающейся сфере, показано, что эти условия являются достаточными для устойчивости по Ляпунову решения $\bar{\omega}$ (см. [64]).

Итак, найдём первую вариацию функционала I (в предположении, что $\psi = \bar{\psi} + \delta\psi$, где $\bar{\psi}$ – исследуемое решение)

$$\delta I = \int_D \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \delta\psi dD + \int_D \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} \delta\omega dD. \quad (3)$$

Поскольку

$$\int_D \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \delta\psi dD = - \int_D \bar{\psi} \Delta \delta\psi dD,$$

а

$$\Delta \delta\psi = \delta\omega,$$

то

$$\delta I = \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} - \bar{\psi} \right) \delta\omega dD.$$

Для того чтобы первая вариация обращалась в нуль, достаточно, чтобы

$$\bar{\psi} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}}.$$

Вторая вариация функционала есть

$$\delta^2 I = \int_D \frac{\nabla \delta\psi \cdot \nabla \delta\psi}{2} dD + \int_D \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} \frac{\delta\omega^2}{2} dD. \quad (4)$$

Чтобы эта вариация была положительной, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} > 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\psi}}},$$

то это условие переходит в условие

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\psi}} > 0. \quad (5)$$

Уравнение $\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0$, очевидно, допускает решение $\bar{\omega} = G(\bar{\psi})$, где $G(\bar{\psi})$ — гладкое отображение. Таким образом, если мы исследуем устойчивость решения

$$\bar{\omega} = G(\bar{\psi})$$

и для этого решения выполняется условие

$$\frac{\partial G(\bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} > 0,$$

то первая вариация функционала I обращается в нуль, а вторая — больше нуля при соответствующем выборе функции F при построении этого функционала.

Положительность второй вариации может быть и при отрицательных значениях $\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2}$. Для этого нам нужно удовлетворить условию

$$\int_D \frac{\nabla \delta \psi \cdot \nabla \delta \psi}{2} dD + \int_D \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} \frac{\delta \omega^2}{2} dD > 0.$$

Поскольку

$$\int_D \nabla \delta \psi \cdot \nabla \delta \psi dD = - \int_D \Delta \delta \psi \delta \psi dD \quad (6)$$

и оператор Δ на подпространстве, ортогональном константе (там, где мы ищем решение) отрицательно определен, а

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\omega}^2} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\omega}},$$

то нам нужно, чтобы минимум выражения (6) был больше, чем $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\omega}}$.

Минимум (6) достигается на собственной функции оператора Лапласа, соответствующей минимальному по модулю собственному числу λ_{\min} . Таким образом, условие положительности второй вариации примет вид

$$|\lambda_{\min}| > \left| \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\omega}} \right|.$$

Покажем теперь, что на торе вообще невозможно построить решение $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$, для которого бы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} > 0.$$

Рассмотрим выражение для энтропии $\Omega \equiv (\bar{\omega}, \bar{\omega})$. Поскольку $\bar{\omega} = F(\bar{\psi})$, $\bar{\omega} = \Delta \bar{\psi}$, то $(\Delta \bar{\psi}, F(\bar{\psi})) = (\bar{\omega}, \bar{\omega}) > 0$. В силу того что $\Delta = \nabla^2$, а на торе ∇ – кососимметрический оператор, будем иметь

$$(\Delta \bar{\psi}, F(\bar{\psi})) = -(\nabla \bar{\psi} \cdot \nabla F(\bar{\psi})) = -\left(\nabla \bar{\psi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} \nabla \bar{\psi} \right) > 0,$$

или

$$-\int_D \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} |\nabla \bar{\psi}|^2 dD > 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что $\frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}}$ не может быть величиной положительной.

§ 6. Динамика двумерной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

Уравнение двумерной несжимаемой идеальной жидкости в инвариантной форме представляет из себя лагранжев закон сохранения вихря:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0. \quad (1)$$

На вращающейся сфере вихрь частиц будет складываться из относительного вихря (вихря относительно вращающейся системы координат) и вихря самого вращающегося тела $\vec{\Omega}_0$, который, как известно, равен удвоенной угловой скорости твёрдого тела

$$\vec{\Omega}_0 = 2\vec{\Omega}_b$$

($\vec{\Omega}_b$ – угловая скорость тела).

Поскольку для двумерной жидкости ненулевой компонентой будет только вертикальная компонента вихря, то

$$\Omega = \omega + l,$$

где ω – вертикальная компонента относительной завихренности, а l – соответствующая компонента удвоенной угловой скорости вращающейся системы координат.

В сферической системе координат (сфера радиуса $a = 1$)

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \lambda \in [0, 2\pi],$$

где φ – широта, λ – долгота, метрика определяется естественным образом:

$$dx = \cos \varphi d\lambda, \quad dy = d\varphi$$

и полная производная будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Уравнение неразрывности для двумерной несжимаемой жидкости будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right] = 0. \quad (2)$$

Следовательно, из (2) u и v можно выразить через функцию тока:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}.$$

Вертикальная компонента завихренности может быть представлена следующей формулой:

$$\omega = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \equiv \Delta \psi. \quad (3)$$

Формула (3) есть формула для "двумерного" лапласиана на сфере. Нетрудно также видеть, что

$$l = 2\Omega_b \sin \varphi,$$

если ось вращения системы координат проходит через полюсы с $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, уравнение для абсолютной завихренности $\Omega = \omega + l$ в сферической системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u}{\cos \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + v \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + v \frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0. \quad (4)$$

Поскольку $\omega = \Delta \psi$, $u = -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, $v = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial l}{\partial \varphi} = 2\Omega_b \cos \varphi$, то уравнение (4) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) + 2\Omega_b \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad (5)$$

где якобиан J определяется естественным образом:

$$J(\psi, \eta) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \right). \quad (6)$$

Мы будем рассматривать решения уравнения (5) на пространстве функций, удовлетворяющих условию периодичности по λ и условию ограниченности на полюсах

$$\eta \cos \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow \pm \pi/2.$$

Если ввести скалярное произведение в этом пространстве следующим образом:

$$(\psi, \eta) = \iint \psi \eta \cos \varphi d\lambda d\varphi,$$

то нетрудно проверить, что якобиан $J(\psi, \Delta\psi)$ будет удовлетворять следующим соотношениям: $(J, \psi) = 0$, $(J, \Delta\psi) = 0$. Очевидно также, что $J(\eta, \eta) = 0$.

Ясно, что $J(\psi, \Delta\psi)$ будет обращаться в нуль также для функций, удовлетворяющих соотношению

$$\Delta\psi = F(\psi),$$

где F есть некоторое гладкое отображение. В частности, функция F может быть линейной, и мы приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\Delta\psi = -\lambda\psi. \quad (7)$$

Функции, удовлетворяющие (7) и сформулированным выше "граничным" условиям, называются сферическими гармониками. Остановимся более подробно на их свойствах, поскольку это нам понадобится в дальнейшем.

Итак, сферические гармоники должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \right) = -\lambda_n Y_n. \quad (8)$$

Известно, что в уравнении (8)

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

($Y_0 = \text{const}$).

Если искать Y_n в виде

$$Y_n = \tilde{P}(\varphi)e^{im\lambda},$$

то уравнение для $\tilde{P}(\varphi)$ может быть записано в виде

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{P}(\varphi)}{\partial \varphi} \right) - \frac{m^2}{\cos^2 \varphi} \tilde{P}(\varphi) + n(n+1) \tilde{P}(\varphi) = 0. \quad (9)$$

Можно сделать две замены переменных:

$$\Theta = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \cos \Theta = z.$$

Тогда в терминах координаты z уравнение (9) примет вид

$$(1 - z^2) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial P}{\partial z} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right\} P = 0, \quad (10)$$

$$z \in [-1, 1].$$

Решениями уравнения (10) будут присоединенные полиномы Лежандра $P_n^m(z)$ (n – степень, m – порядок функции).

Присоединенные полиномы Лежандра при фиксированном m образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 P_n^{|m|}(\mu) P_k^{|m|}(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}, & \text{если } k = n. \end{cases}$$

Сферические гармоники образуют полную ортогональную систему функций в пространстве регулярных функций на сфере (периодичность по λ и ограниченность на полюсах).

Если m – произвольные целые числа, то для каждого n существует $2n + 1$ независимых сферических гармоник степени n . Таким образом, оператор Лапласа на сфере индуцирует разбиение всего пространства на инвариантные подпространства H_n размерности $2n + 1$.

Вернемся теперь к исходному уравнению (5). Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi = Y_n e^{i\sigma t}.$$

Поскольку

$$\Delta Y_n = -(n + 1)n Y_n,$$

то будем иметь

$$-(n + 1)ni\sigma Y_n + 2\Omega_b im Y_n = 0, \quad \text{или}$$

$$\sigma = \frac{2\Omega_b m}{n(n + 1)}. \quad (11)$$

Так как

$$Y_n = P_n^m(\varphi) e^{im\lambda},$$

то решение ψ может быть представлено в виде

$$\psi = P_n^m(\varphi) e^{im\left(\lambda + \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}t\right)} = Y_n\left(\varphi, \lambda + \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}t\right).$$

Мы видим, что нелинейное уравнение вихря на сфере допускает точные решения в виде сферических гармоник, бегущих с постоянной фазовой скоростью $c = \frac{2\Omega_b}{n(n+1)}$ на "запад", если $\Omega_b > 0$.

Напомним, что этот уникальный тип волн был открыт в атмосфере Россби и Блиновой и носит их имена (волны Россби-Блиновой).

§ 7. Устойчивость стационарных решений уравнений, описывающих динамику двумерной атмосферы

Для уравнения вихря на вращающейся сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = 0 \quad (1)$$

стационарные решения, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$J(\psi, \omega + l) = 0.$$

Якобиан будет обращаться в нуль, если абсолютный вихрь есть гладкая функция от функции тока:

$$\omega + l = F(\psi). \quad (2)$$

Умножим уравнение (2) скалярно на ω . Получим

$$(F(\psi), \omega) = (\omega, \omega) + (l, \omega).$$

Поскольку $\omega = \nabla \cdot \nabla \psi$, то справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (F(\psi), \omega) &= (F(\psi), \nabla \cdot \nabla \psi) = -(\nabla F(\psi), \nabla \psi) = \\ &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \nabla \psi, \nabla \psi \right) \equiv -\iint \frac{\partial F}{\partial \psi} |\nabla \psi|^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

Естественно, что вся эта цепочка равенств справедлива только тогда, когда $\omega, \psi, \nabla \psi$ принадлежат пространству регулярных (ограниченных на сфере вместе со своими производными) функций. Далее,

$$\begin{aligned} (l, \omega) &= \iint \Delta \psi 2\Omega_b \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda = \\ &= \iint \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) 2\Omega_b \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda = \end{aligned}$$

$$= - \iint \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} 2\Omega_b \cos \varphi d\varphi d\lambda = \iint 2\Omega_b (u \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi d\lambda. \quad (3)$$

Поскольку $u \cos \varphi \equiv M$ есть момент количества движения относительно оси вращения, то окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} - \iint \frac{\partial F}{\partial \psi} |\nabla \psi|^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda &= \iint \omega^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda + \\ &+ \iint 2\Omega_b M \cos \varphi d\varphi d\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Не существует стационарного решения (2), принадлежащего пространству регулярных функций на сфере и удовлетворяющего условиям положительности $\frac{\partial F}{\partial \psi}$ и положительности углового момента. (Мы всегда считаем, что $\Omega_b > 0$.)

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда $F(\psi)$ – линейная функция. Имеем

$$\Delta \psi + 2\Omega_b \sin \varphi = \lambda \psi.$$

Если ψ есть функция только φ , то уравнение будет иметь вид

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + 2\Omega_b \sin \varphi = \lambda \psi. \quad (5)$$

Очевидно, что решением (5) будет сферическая гармоника Y_n^0 с $n = 1, m = 0$, то есть

$$\psi = Y_1^0 = A \sin \varphi. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$-2A \sin \varphi + 2\Omega_b \sin \varphi = A\lambda \sin \varphi,$$

или

$$\lambda = -2 + \frac{2\Omega_b}{A}.$$

При $A > 0$ для этого решения угловой момент будет отрицательным. Действительно,

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -A \cos\varphi < 0 \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

хотя при этом λ может быть и положительным, если Ω_b достаточно большое.

Пусть $A < 0, \lambda < 0$. Решение $\psi = A \sin\varphi, \quad u = -A \cos\varphi$ будет описывать твёрдое вращение. Исследуем устойчивость этого решения. Пусть $\omega = \bar{\omega} + \omega', \quad \psi = \bar{\psi} + \psi'$. Тогда уравнение для возмущений будет иметь вид

$$\frac{\partial\omega'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \omega') + J(\psi', \bar{\omega}) + 2\Omega_b \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} + J(\psi', \omega') = 0. \quad (7)$$

Умножим (7) скалярно на ω' . Получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\omega', \omega')}{\partial t} + (J(\psi', \bar{\omega}), \omega') + 2\Omega_b \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}, \omega'\right) = 0. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}, \omega'\right) = \iint \Delta\psi' \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} \cos\varphi d\varphi d\lambda = 0,$$

или

$$\iint \left[\frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\cos\varphi \frac{\partial\psi'}{\partial\varphi} \right) \right] \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} \cos\varphi d\varphi d\lambda = 0$$

Очевидно, что первый член равен нулю в силу условий периодичности. Имеем

$$\iint \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\cos\varphi \frac{\partial\psi'}{\partial\varphi} \right) d\varphi d\lambda = -\iint \cos\varphi \frac{\partial\psi'}{\partial\varphi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{\partial\psi'}{\partial\varphi} d\varphi d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} \right)^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda = 0.$$

Поскольку $\Delta \bar{\psi} = \bar{\omega} = -2\bar{\psi}$ ($n = 1, m = 0$), то

$$(J(\psi', \bar{\omega}), \omega') = (J(\omega', \psi'), \bar{\omega}) = (J(\bar{\omega}, \omega'), \psi') = -2(J(\bar{\psi}, \omega'), \psi'),$$

и, следовательно, уравнение (8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \|\omega'\|^2}{\partial t} \frac{1}{4} - (J(\bar{\psi}, \omega'), \psi') = 0.$$

Теперь умножим скалярно (7) на ψ' . Будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\omega', \psi') + (J(\bar{\psi}, \omega'), \psi') = 0. \quad (9)$$

При этом члены $\left(\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}, \psi' \right) = 0$ в силу условий периодичности.

Складывая его с уравнением (8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\|\omega'\|^2 + 2(\omega', \psi')}{2} \right) = 0.$$

Поскольку $(\omega', \psi') = -(\nabla \psi', \nabla \psi')$, то можно заключить, что в данном случае величина

$$\|\omega'\|^2 - 2(\nabla \psi', \nabla \psi')$$

есть интеграл движения. Если мы докажем, что он всегда одного знака, то его можно принять за норму, и устойчивость твёрдого вращения доказана.

Пусть $\psi' = \sum \alpha_i Y_i$, то есть ψ' разложена в ряд по сферическим гармоникам. Тогда

$$\|\omega'\|^2 = (\omega', \omega') = \sum \lambda_i^2 \alpha_i^2 (Y_i, Y_i),$$

$$(\psi', \omega') = \sum \lambda_i \alpha_i^2 (Y_i, Y_i) = - \sum |\lambda_i| E_i = - \sum \tilde{E}_i,$$

так как λ_i – отрицательные числа вида $-n(n+1)$. Следовательно, все $\tilde{E}_i > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{\|\omega'\|^2}{-(\omega', \psi')} \geq \min |\lambda_i| = 2,$$

и равенство достигается, если $Y_i \in H_1$, где H_1 – подпространство, натянутое на сферические гармоники, соответствующие $n = 1$. Это подпространство имеет размерность $2n + 1 = 3$. Следовательно, мы должны исследовать поведение коэффициентов Фурье разложения ψ' только на этом подпространстве.

Поскольку на подпространстве H_1 : $\bar{\omega} = -2\bar{\psi}$, $\omega' = -2\psi'$, то уравнение для возмущений будет

$$-2\frac{\partial\psi'}{\partial t} - 2J(\bar{\psi}, \psi') - 2J(\psi', \bar{\psi}) + 2\Omega_b\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} - 2J(\psi', \psi') = 0.$$

Отсюда следует, что ψ' удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \Omega_b\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = 0,$$

то есть ψ' будет бегущей волной Россби-Блиновой с постоянной амплитудой, что доказывает устойчивость по Ляпунову твёрдого вращения. Доказательство устойчивости твёрдого вращения можно получить и другим путём, например из вариационного принципа, используя связку интегралов энергии и момента количества движения.

Поставим такую задачу: при заданном моменте количества движения найти движение, обладающее минимальной энергией. Имеем

$$E = -(\psi, \Delta\psi) \equiv - \iint \Delta\psi\psi \cos\varphi d\varphi d\lambda,$$

$$M = - \iint \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \cos\varphi \cos\varphi d\varphi d\lambda.$$

Для решения задачи используем метод множителей Лагранжа. Пусть

$$I = E + \tilde{\lambda}(M - C),$$

где $C = \text{const}$, а $\tilde{\lambda}$ – множитель Лагранжа.

Проварьируем функционал I по ψ и приравняем первую вариацию к нулю. Получим

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta E + \tilde{\lambda} \delta M = \\ &= - \iint \Delta \delta \psi \psi \cos \varphi d\varphi d\lambda - \iint \Delta \psi \delta \psi \cos \varphi d\varphi d\lambda - \\ &\quad - \tilde{\lambda} \iint \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta \psi \cos^2 \varphi d\varphi d\lambda = 0. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора Лапласа на сфере будем иметь

$$\begin{aligned} \delta E &= -2 \iint \Delta \psi \delta \psi \cos \varphi d\varphi d\lambda, \\ \delta M &= \iint \delta \psi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos^2 \varphi d\varphi d\lambda = -2 \iint \delta \psi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\delta \psi$ получим

$$\Delta \psi + \tilde{\lambda} \sin \varphi = 0,$$

или

$$\psi = -2 \sin \varphi, \quad \tilde{\lambda} = 2.$$

Поскольку неустойчивые возмущения принадлежат подпространству, ортогональному $\bar{\psi}$, то эти возмущения ψ не могут изменить угловой момент. Следовательно, энергия возмущений не может расти за счёт энергии основного движения, так как в противном случае это бы означало, что существует другое движение, обладающее минимальной энергией и имеющее тот же угловой момент (суммарная энергия есть инвариант). В этом доказательстве, конечно, предполагается, что нулевая первая вариация и положительная вторая вариация обеспечивают минимум функционала.

§ 8. Галёркинские приближения. Инварианты

Структура инвариантных подпространств, генерируемых оператором Лапласа на сфере (подпространств, натянутых на соответствующие сферические функции), устроена так, что в координатной плоскости (m, n) множество сферических гармоник с индексом m, n будет ограничено прямыми $|m| = n$, как показано на рисунке 2.

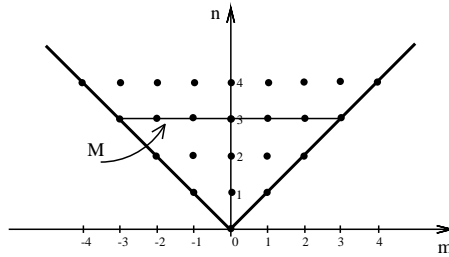


Рис. 2. Область M в пространстве индексов (m, n)

Обозначим все множество точек с координатами (m, n) через M_∞ . Некоторое конечное множество $M \subset M_\infty$, сохраняющее свойство симметрии, назовём усечением. Если мы используем для решения уравнения вихря на сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega_b \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\omega = \Delta \psi,$$

метод Галёркина, в котором в качестве базисных функций используются сферические гармоники, то естественным усечением может быть использование всех сферических функций, для которых $n \leq N$, где N – заданное число. Такое усечение называется треугольным. Возможны, конечно, и другие усечения. Задачей данной лекции будет доказательство того, что при любом усечении усеченная система (система

галёркинских приближений) будет обладать двумя квадратичными инвариантами – аналогами энергии и энстрофии.

Введём в рассмотрение волновой вектор $\vec{\alpha} = (m_\alpha, n_\alpha)^T$ и его сопряженный $\vec{\alpha}^* = (-m_\alpha, n_\alpha)^T$. Коэффициенты Фурье разложения функций по сферическим гармоникам f_{nm} будем обозначать через f_α . Пусть

$$\psi = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} Y_{\alpha}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по конечному множеству α . Тогда

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \equiv \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}, \quad (2)$$

где векторы \vec{V}_{α} – так называемые "тороидальные" векторы, по которым может быть разложено произвольное соленоидальное векторное поле.

Рассмотрим разложение якобиана по сферическим гармоникам. Пусть

$$J(\psi, \omega) = \sum_{\gamma} J_{\gamma}(\psi, \omega) Y_{\gamma}.$$

Тогда

$$J_{\gamma}(\psi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_S J(\psi, \omega) \bar{Y}_{\gamma} dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{V}(\psi) \cdot \nabla \omega \bar{Y}_{\gamma} dS \quad (3)$$

$$(dS = \cos \varphi d\varphi d\lambda).$$

В формуле (3) \bar{Y}_{γ} – функции, сопряженные Y_{γ} . Пусть

$$\omega = \sum_{\beta} \omega_{\beta} Y_{\beta}.$$

Тогда

$$J_\gamma = \sum_\beta \omega_\beta \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma \vec{V} \cdot \nabla Y_\beta dS \equiv \sum_\beta \omega_\beta M_{\beta\gamma},$$

где

$$M_{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma \vec{V} \cdot \nabla Y_\beta dS. \quad (4)$$

Проводя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} M_{\beta\gamma} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma \vec{V} \cdot \nabla Y_\beta dS = \frac{1}{4\pi} \int_S Y_\gamma \nabla \cdot (\vec{V} Y_\beta) dS = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S Y_\beta \vec{V} \cdot \nabla \bar{Y}_\gamma dS = -M_{\gamma\beta}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Формула (5) означает, что матрица, элементами которой являются $M_{\beta\gamma}$, косоэрмитова. Подставляя в (5) выражение для \vec{V}

$$\vec{V} = \sum_\alpha \psi_\alpha \vec{V}_\alpha,$$

получим

$$\begin{aligned} M_{\beta\gamma} &= \sum_\alpha \psi_\alpha \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma \vec{V}_\alpha \cdot \nabla Y_\beta dS = \\ &= \sum_\alpha \psi_\alpha \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma [\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\beta dS, \end{aligned} \quad (6)$$

где символ $[\cdot]$ обозначает поворот вектор-аргумента на 90° по часовой стрелке, то есть $[\vec{V}] = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$. Введём обозначение

$$L_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_\gamma [\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\beta dS. \quad (7)$$

Тогда выражение для J_γ может быть представлено в виде

$$J_\gamma(\psi, \omega) = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \omega_{\beta} \psi_{\alpha} L_{\beta\gamma\alpha}.$$

Это есть искомое представление коэффициента Фурье нелинейной функции переноса через коэффициенты Фурье вихря ω и функции тока ψ . Выражение (8) есть билинейная форма для каждого γ , $L_{\beta\gamma\alpha}$ – её коэффициенты, которые назовём коэффициентами взаимности. Пусть

$$\Omega^2 = (\omega, \omega)_N \equiv \sum_{\gamma} |\omega_{\gamma}|^2.$$

Ω^2 есть аналог энтропии при некотором симметричном усечении. По определению ω_{γ} имеем

$$\frac{d}{dt} |\omega|^2 = \omega_{\gamma} \frac{d\omega_{\gamma}^*}{dt} + \omega_{\gamma}^* \frac{d\omega_{\gamma}}{dt},$$

а из уравнения вихря следует, что

$$\frac{d\omega_{\gamma}}{dt} + J_{\gamma} + 2\Omega_b i m_{\gamma} \psi_{\gamma} = 0.$$

Так как $\omega = \Delta\psi$, то $\omega_{\gamma} = -c_{\gamma}\psi_{\gamma}$ и, следовательно,

$$\frac{d\omega_{\gamma}}{dt} + J_{\gamma} - \frac{2m_{\gamma}i\Omega_b}{c_{\gamma}}\omega_{\gamma} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d\omega_{\gamma}^*}{dt} + J_{\gamma}^* + \frac{2m_{\gamma}i\Omega_b}{c_{\gamma}}\omega_{\gamma}^* = 0.$$

Умножая первое уравнение (8) на ω_{γ}^* , второе – на ω_{γ} и складывая, получим

$$\frac{d}{dt} |\omega_{\gamma}|^2 + \omega_{\gamma}^* J_{\gamma} + \omega_{\gamma} J_{\gamma}^* = 0.$$

Далее

$$J_\gamma = \sum_\beta \omega_\beta M_{\beta\gamma}, \quad J_\gamma^* = \sum_\beta \omega_\beta^* M_{\beta\gamma}^*.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} |\omega_\gamma|^2 + \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) = 0. \quad (9)$$

Суммируя по γ , получим

$$\frac{d}{dt} \sum_\gamma |\omega_\gamma|^2 + \sum_\gamma \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) = 0. \quad (10)$$

Но мы показали, что

$$M_{\beta\gamma} = -M_{\gamma\beta}^*.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_\gamma \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} + \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\beta\gamma}^*) &= \sum_\gamma \sum_\beta (\omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} - \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\gamma\beta}) = \\ &= \sum_\gamma \sum_\beta \omega_\gamma^* \omega_\beta M_{\beta\gamma} - \sum_\gamma \sum_\beta \omega_\beta^* \omega_\gamma M_{\gamma\beta}. \end{aligned}$$

Меняя во второй сумме γ на β , получаем, что обе суммы тождественны, и следовательно,

$$\frac{d}{dt} \sum_\gamma |\omega_\gamma|^2 = 0. \quad (11)$$

Покажем теперь, что конечномерный аналог энергии также сохраняется. Поскольку

$$E = -(\psi, \omega) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \omega dS$$

и

$$\omega = \sum_{\gamma} \omega_{\gamma} Y_{\gamma}, \quad \omega_{\gamma} = -c_{\gamma} \psi_{\gamma},$$

то

$$E = \sum_{\gamma} \frac{1}{c_{\gamma}} |\omega_{\gamma}|^2.$$

Умножим уравнение (9) на $\frac{1}{c_{\gamma}}$ и просуммируем. Получим

$$\sum_{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{c_{\gamma}} |\omega_{\gamma}|^2 + \sum_{\gamma} \sum_{\beta} c_{\gamma}^{-1} (\omega_{\gamma}^* \omega_{\beta} M_{\beta\gamma} - \omega_{\beta}^* \omega_{\gamma} M_{\gamma\beta}) = 0.$$

Так как

$$M_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} L_{\beta\gamma\alpha} = - \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{-1} \omega_{\alpha} L_{\beta\gamma\alpha},$$

$$M_{\gamma\beta} = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} L_{\alpha\gamma\beta} = - \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{-1} \omega_{\alpha} L_{\alpha\gamma\beta},$$

то

$$\sum_{\gamma} \frac{d}{dt} \frac{1}{c_{\gamma}} |\omega_{\gamma}|^2 = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} \sum_{\alpha} c_{\gamma}^{-1} c_{\alpha}^{-1} (\omega_{\gamma}^* \omega_{\beta} \omega_{\alpha} L_{\beta\gamma\alpha} - \omega_{\beta}^* \omega_{\gamma} \omega_{\alpha} L_{\gamma\beta\alpha}).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\gamma} \sum_{\beta} \sum_{\alpha} c_{\gamma}^{-1} c_{\alpha}^{-1} \omega_{\beta}^* \omega_{\gamma} \omega_{\alpha} L_{\gamma\beta\alpha} \equiv A.$$

Если мы поменяем (переобозначим) γ на α в этой сумме, то очевидно, что сумма не поменяется, то есть

$$A = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} c_{\gamma}^{-1} c_{\alpha}^{-1} \omega_{\beta}^* \omega_{\gamma} \omega_{\alpha} L_{\alpha\beta\gamma}.$$

Но

$$L_{\gamma\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int_S \bar{Y}_{\beta} [\nabla Y_{\alpha}] \cdot \nabla Y_{\gamma} dS,$$

причем

$$[\nabla Y_\alpha] \cdot \nabla Y_\gamma \equiv J(Y_\gamma, Y_\alpha).$$

Поскольку якобиан – функция антисимметричная, то $J(Y_\gamma, Y_\alpha) = -J(Y_\alpha, Y_\gamma)$, и следовательно,

$$L_{\alpha\beta\gamma} = -L_{\gamma\beta\alpha}.$$

Итак, мы имеем $A = -A$, то есть $A = 0$. Так как $A = 0$, то и $A^* = 0$, и, следовательно, мы показали, что при симметричном усечении энергия есть также инвариант.

§ 9. Симметрии показателей Ляпунова

Пусть мы имеем некоторую конечномерную (галёркинскую) аппроксимацию уравнения вихря на сфере, которую запишем в виде

$$\frac{d\omega_i}{dt} = Q_i(\omega), \quad (1)$$

$$\omega_i|_{t=0} = \omega_{i0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Линеаризуем систему относительно решения $\omega(t)$. Соответствующую линеаризованную систему запишем в виде

$$\frac{d\omega'}{dt} = A(\omega)\omega', \quad \omega'|_{t=0} = \omega'_0 \quad (2)$$

(ω' – вектор в N -мерном пространстве). Вводя понятие разрешающего оператора $L(t)$, систему (2) можно записать следующим образом:

$$\omega'(t) = L(t)\omega'_0. \quad (3)$$

Согласно эргодической мультипликативной теореме Оселедца [57] показатели Ляпунова системы (1) можно определить следующим образом:

$$\mu_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \lambda_k(L^*(t)L(t)). \quad (4)$$

Ясно, что матрица $L(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dL(t)}{dt} = A(\omega)L(t), \quad L(0) = E,$$

E – тождественная матрица.

Предположим, что наша система (1) имеет гамильтонову структуру (при этом, конечно, N – чётно). Известно, что для гамильтоновых систем выполняется следующее соотношение [2]:

$$L^*(t)JL(t) = J, \quad (5)$$

где J – так называемая симплектическая единица:

$$J = \begin{Bmatrix} O & E \\ -E & O \end{Bmatrix}.$$

Заметим, что J – ортогональная кососимметрическая матрица, так что

$$J = -J^T = -J^{-1}.$$

Из (5) следует, что

$$L^*(t) = JL^{-1}(t)J^{-1}$$

(J – матрица невырожденная), и

$$L(t) = J^{-1}(L^*(t))^{-1}J.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L^*(t)L(t) &= JL^{-1}(t)J^{-1}J^{-1}(L^*(t))^{-1}J = \\ &= JL^{-1}(t)(-E)(L^*(t))^{-1}(-J^{-1}) = J(L^*(t)L(t))^{-1}J^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что спектры L^*L и $(L^*L)^{-1}$ совпадают, и поскольку собственные числа матрицы $(L^*L)^{-1}$ и матрицы L^*L связаны соотношением

$$\lambda(L^*L)^{-1} = \frac{1}{\lambda(L^*L)},$$

то это означает, что спектры матриц L^*L и $(L^*L)^{-1}$ должны состоять из пар $(\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i})$.

Таким образом, показатели Ляпунова системы (1) будут расположены симметрично относительно нуля. Поскольку свойство симметрии не зависит от t , то будут симметрично расположены и так называемые локальные показатели Ляпунова, вычисленные по формуле (4) при фиксированном t .

Предположим теперь, что наша система (1) может быть приведена к гамильтоновой форме с помощью некоторого невырожденного (в общем случае нелинейного) преобразования

$$\omega = F(\eta)$$

с невырожденной матрицей Якоби

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \eta} \right\} \equiv Y.$$

Решения линеаризованных задач для ω и η должны быть связаны соотношением

$$\omega' = Y(\eta)\eta'.$$

Это означает, что и фундаментальные решения линеаризованных систем будут связаны соотношением

$$\omega'_i = Y\eta'_i, \quad \text{или} \quad \eta'_i = Y^{-1}\omega'_i.$$

Мы знаем, что показатели Ляпунова определяются через нормы фундаментальных решений. Для приведённой системы будем иметь

$$\lambda_i(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\eta'_i\|}{\|\eta'_{i0}\|}.$$

Вычислим показатели Ляпунова для исходной системы:

$$\sigma_i(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\omega'_i\|}{\|\omega'_{i0}\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y\eta'_i\|}{\|Y\eta'_{i0}\|} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y\|\|\eta'_i\|}{\|Y\|\|\eta'_{i0}\|}.$$

Если норма $\|Y\|$ ограничена константой, то

$$\sigma_i(\omega) \leq \lambda_i(\eta).$$

С другой стороны,

$$\lambda_i(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y^{-1}\omega'_i\|}{\|\eta'_{i0}\|} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|Y^{-1}\|\|\omega'_i\|}{\|Y^{-1}\omega'_{i0}\|} \leq \sigma_i(\omega),$$

если ограничена норма $\|Y^{-1}\|$. Следовательно, $\sigma_i = \lambda_i$.

Заметим, что мы можем говорить только о симметрии глобальных показателей Ляпунова в исходной системе уравнений. Это заключение будет неверным относительно локальных показателей.

Рассмотрим далее конечномерную аппроксимацию уравнения вихря на сфере с диссипацией (в форме рэлеевского трения) и внешним форсингом, не зависящим от времени:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = Q_i(\omega) - \alpha\omega_i + f_i, \quad (7)$$

$$\omega_i|_{t=0} = \omega_{i0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \alpha = \text{const.}$$

В работе [93] было показано, что если $Q_i(\omega)$ есть каноническая гамильтонова форма, то показатели Ляпунова, упорядоченные по убыванию, удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$\sigma_i + \sigma_{N+1-i} = -2\alpha. \quad (8)$$

Это же соотношение оказывается справедливым, если $Q(\omega)$ может быть приведено к канонической гамильтоновой форме с помощью невырожденного нелинейного преобразования [36].

§ 10. Уравнения двумерной вязкой несжимаемой жидкости. Теорема об устойчивости стационарных решений

Уравнения Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\vec{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

В двумерном случае (как и в случае невязкой жидкости) мы можем ввести функцию тока, определив через неё компоненты вектора скорости и вертикальную компоненту завихренности. В декартовой системе координат будем иметь

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\omega = \Delta\psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В терминах функции тока уравнение (1) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta\psi) = \mu\Delta^2\psi. \quad (2)$$

Если рассматривать уравнение (2) в периодическом канале, то по координате x , как и раньше, в качестве краевых условий можно использовать условие периодичности функции ψ и всех её производных, а на вертикальных границах канала мы уже должны ставить условия прилипания $u, v = 0$ при $y = y_1, y_2$. В терминах функции тока эти условия будут иметь вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = y_1, y_2.$$

Исторически в гидродинамике для исследования устойчивости стационарных решений уравнения (2) использовалось линейное приближение. В частности, уравнение (2) имеет решение, которое называется течением Пуазейля, которое зависит только от координаты y . (Напомним, что в невязком случае любая гладкая функция, зависящая только от координаты y , есть стационарное решение уравнений динамики двумерной жидкости.) Уравнения Навье-Стокса для $u = u(y)$ в естественных переменных будут иметь вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Из второго уравнения системы (3) следует, что $p = p(x)$. Из первого уравнения системы (3) в силу независимости u от x и p от y получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda y + a, \quad u = \frac{\lambda y^2}{2} + ay + b.$$

Если ширина канала есть h и $u = 0$ при $y = 0$ и $y = h$, то

$$u = \frac{\lambda}{2}(y - h)y,$$

$$\text{или } u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h)y.$$

Чтобы u было больше нуля, необходимо, чтобы $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$. Пусть

$$\psi = \bar{\psi}(y)$$

и
$$u = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \bar{u}(y).$$

Будем искать решение (2) в виде $\psi = \bar{\psi} + \psi'$.

Линеаризованное относительно $\bar{\psi}$ уравнение (2) будет иметь вид

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Delta \bar{\psi}}{\partial y} = \mu \Delta^2 \psi'. \quad (4)$$

Решение (4) будем искать в виде

$$\psi' = \varphi(y) e^{ik(x-ct)}.$$

Уравнение для $\varphi(y)$ будет иметь вид

$$\mu \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^4 \varphi \right) = ik \left[(\bar{u} - c) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k^2 \varphi \right) - \varphi \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right]. \quad (5)$$

Это так называемое уравнение Орра-Зоммерфельда. Мы не будем заниматься исследованием методов его решения, поскольку нашей главной задачей будет исследование устойчивости решений системы уравнений, описывающей динамику вязкой жидкости на вращающейся сфере. Принципиальное отличие здесь заключается в том, что сфера есть многообразие без края. Рассматривая на сфере вязкую жидкость, мы в принципе можем иметь так называемый невязкий предел, устремляя μ к нулю. В случае наличия твёрдых границ (стенок) мы этого сделать не можем, так как для вязкого случая из-за условия прилипания на границах происходит образование пограничных слоев и при $\mu \rightarrow 0$ градиент скорости у границ должен нарастать. В этом случае вязкость становится источником неустойчивости.

Первая задача, которую мы должны решить, – это задача о возможности использования линейного приближения в случае вязкой жидкости для исследования устойчивости и неустойчивости основного потока.

Итак, система уравнений вязкой несжимаемой атмосферы, которую мы будем исследовать, имеет вид

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + l) - \mu \Delta^2 \psi = f, \quad (6)$$

где функция f от времени не зависит. Стационарное решение $\bar{\psi}$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi} + l) - \mu\Delta^2\bar{\psi} = f. \quad (7)$$

Будем считать, что $\Delta\bar{\psi} \in C^1(S)$, то есть является непрерывно-дифференцируемой функцией. Перепишем уравнение (2) в отклонениях от стационарного решения

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \Delta\psi') + J(\psi', \Delta\bar{\psi} + l) + J(\psi', \Delta\psi') - \mu\Delta^2\psi' = 0. \quad (8)$$

Если $\Delta\psi' = \omega'$, $\psi' = \Delta^{-1}\omega'$, то (8) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial t} + A(\bar{\omega})\omega' = B(\omega'), \quad (9)$$

где $A(\omega)$ – линейный оператор

$$A(\bar{\omega})\omega' = J(\Delta^{-1}\bar{\omega}, \omega') + J(\Delta^{-1}\omega', \bar{\omega} + l) - \mu\Delta\omega',$$

а $B(\omega')$ – оператор нелинейный

$$B(\omega') = -J(\Delta^{-1}\omega', \omega').$$

Нам необходимо сформулировать условия, при которых нулевое решение системы (9) устойчиво или неустойчиво. Особенность задачи заключается прежде всего в том, что нам необходимо выбрать пространства, в которых мы должны формулировать те или иные утверждения. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть спектр оператора A содержится в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re}\lambda(A) > \lambda_0 > 0.$$

Тогда стационарное решение $\bar{\omega} = 0$ системы (6) асимптотически устойчиво в $W_p^k(S)$, $p > 1$, $k \geq 1$. Если имеются точки

спектра оператора A , расположенные в левой полуплоскости, то это решение неустойчиво.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы ввиду громоздкости (это доказательство можно найти в [27]), отметим только, что подобное утверждение можно сформулировать и для других типов пространств. Для пространства Соболева $W_p^k(S)$, $p > 1$, $k \geq 1$, можно также показать, что оператор A – секториальный и его спектр содержится в области, определяемой неравенствами

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 2\mu - \beta_0,$$

$$\operatorname{Im} \lambda \leq \alpha_0 \sqrt{\frac{\operatorname{Re} \lambda + \beta_0}{\mu}} + \beta_0 + \Omega_b,$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_S |\nabla(\Delta \bar{\psi})|,$$

$$\alpha_0 = \max_S |\nabla \bar{\psi}|.$$

Следствием этих оценок является следующее утверждение.

Утверждение 2. Если $\frac{1}{\sqrt{2}} \max |\nabla(\Delta \bar{\psi})| \leq C < 2\mu$, то решение $\bar{\psi}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

§ 11. Теоремы устойчивости решений по линейному приближению. Сходимость галёркинских приближений для собственных чисел и показателей Ляпунова

В §10 было сформулировано утверждение о применимости линейного приближения для исследования устойчивости динамики вязкой несжимаемой двумерной жидкости. В настоящем параграфе, следуя работам [25, 26, 60], мы изложим некоторые теоремы о спектре линеаризованного оператора

и конечномерной аппроксимации этого спектра при аппроксимации исходной спектральной задачи с помощью метода Галёркина. (Результаты были получены Ю.Н.Скибой.)

Итак, рассмотрим снова систему уравнений динамики двумерной жидкости на сфере S :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) - \mu \Delta \omega = f, \quad (1)$$

где $\omega = \Delta \psi$. Стационарное решение $\bar{\psi}$ системы (1) удовлетворяет уравнению

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega} + l) - \mu \Delta \bar{\omega} = f. \quad (2)$$

Пусть $\psi' = \psi - \bar{\psi}$, $\omega' = \omega - \bar{\omega}$.

Перепишем уравнение (1) в терминах ψ' и ω' :

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \omega') + J(\psi', \bar{\omega} + l) + J(\psi', \omega') - \mu \Delta \omega' = 0 \quad (3)$$

Введём обозначение:

$$J(\bar{\psi}, \omega') + J(\Delta^1 \omega', \bar{\omega} + l) - \mu \Delta \omega' \equiv A(\bar{\omega}) \omega'.$$

Тогда линейное приближение уравнения (3) запишется в виде

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + A(\bar{\omega}) \omega' = 0 \quad (4)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть основное решение $\bar{\psi}, \bar{\omega}$ такое, что $|\nabla \bar{\psi}|$ и $|\nabla \bar{\omega}|$ есть ограниченные функции на сфере. Тогда дифференциальный оператор $A : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$ с областью определения $D(A) = H_0^2$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр, состоящий из не более чем счётного множества изолированных собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой в бесконечности.

Отсюда следует, что число собственных чисел с отрицательной вещественной частью, ответственных за неустойчивость решения $\bar{\psi}$ может быть только конечным.

Другими словами, неустойчивое многообразие окрестности $\bar{\psi}$ может иметь только конечную размерность.

Аппроксимация этого конечного числа собственных значений и этого неустойчивого многообразия конечной размерности есть главная задача при численном решении проблемы на собственные значения.

Эта задача оптимальным образом решается с помощью метода Галёркина, где в качестве базисных функций используются сферические гармоники $\{Y_\alpha\}$.

Для представления функций из $L^2(S)$ используется треугольное усечение рядов Фурье. Пусть

$$\bar{\psi} = \sum_{\beta=1}^N \bar{\psi}_\beta Y_\beta, \quad \bar{\omega} = \sum_{\beta=1}^N \bar{\omega}_\beta Y_\beta.$$

Элементы конечномерной матрицы A_N , аппроксимирующей исходный линейный оператор A , будут определяться следующим образом:

$$(A_N)_{\alpha\beta} = (AY_\alpha, Y_\beta).$$

Полагая $\Omega_N^1 = \sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha Y_\alpha$, приходим к спектральной задаче

$$A_N \psi_N^{(i)} = -\lambda_i \psi_N^{(i)} \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть стационарный поток $\bar{\psi}$ — достаточно гладкая функция, такая что

$$\nabla(\Delta\bar{\psi} + l) \in Lip(\alpha), \quad 0 < \alpha < 2.$$

Тогда с ростом номера N усечения рядов каждое изолированное собственное значение оператора A кратности S аппроксимируется собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_S$ (среди которых могут быть одинаковые) оператора A_N , так что для $N > N_0$ имеют место неравенства:

$$\max_{1 \leq i \leq S} |\lambda - \lambda_i^N| \leq CN^{-\alpha}.$$

Соответствующее собственное подпространство оператора A аппроксимируется прямой суммой обобщенных собственных подпространств собственных значений $\lambda_1^N, \dots, \lambda_S^N$ оператора A_N .

Более общие аппроксимационные теоремы можно найти в работе [60].

Поскольку реальные части собственных чисел определяют глобальные показатели Ляпунова в случае стационарных решений, то вышеприведенные теоремы автоматически переносятся в данном случае и на показатели Ляпунова. Для нестационарных решений такие теоремы автору неизвестны, поэтому ниже мы приведём некоторые результаты численных экспериментов по исследованию сходимости глобальных показателей Ляпунова для нестационарных решений уравнения баротропного вихря [96].

Уравнение (1) было записано в сферической системе координат с краевыми условиями на экваторе $\psi = 0$ и $\omega = 0$ и решение искалось на множестве функций, антисимметричных относительно экватора.

Если в качестве единицы времени взять $1/\Omega$, а единицы длины R , где Ω и R – это угловая скорость и радиус Земли, то параметр μ в модели был равен $2 \cdot 10^{-4}$, что в размерном виде составляет $\mu = 5.6 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{сек}$. В модель вводилось также рэлеевское трение $\alpha \Delta \psi$ с $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-2}$, что соответствует характерному времени диссипации 14 дней.

Правая часть уравнения (1) вычислялась по формуле.

$$f = J(\psi_c, \Delta \psi_c + l + h) + \alpha \Delta \psi_c - \mu \Delta^2 \psi_c,$$

Таблица 1

размерность	28	36	55	78	120	178	210
усечение	T7	T8	T10	T12	T15	T18	T20
размерность	276	325	378	465	528	630	
усечение	T23	T25	T27	T30	T32	T35	

где ψ_c и h проекции среднемесячной январской функции тока на 200 мб поверхности и топографии на подпространство, натянутое на сферические гармоники с треугольным усечением $n \leq 7$.

В качестве схемы по времени использовалась схема Мацуно. Показатели Ляпунова вычислялись согласно алгоритму, приведенному в Приложении, а размерность аттрактора модели по формуле Каплана-Йорке [117].

В таблице 1 приведена размерность подпространств, при которых вычислялось решение задачи.

На рис. 3а приведена зависимость размерности аттрактора модели и числа положительных показателей Ляпунова в зависимости от размерности фазового пространства, в котором рассчитывалось решение модели, а на рис. 3б – положительный показатель Ляпунова как функция размерности.

Из этих графиков видно, что имеет место сходимость к величинам 20, 9 и 0,045 соответственно, т.е. мы можем предположить, что размерность аттрактора дифференциальной модели согласно оценке Каплана-Йорке порядка 20, а сумма положительных показателей Ляпунова (Колмогоровская энтропия) равна 9.

Отметим, что сходимость этих характеристик не является монотонной, что можно объяснить следующим образом. При малых разрешениях в модели диссипация происходит в основном в пограничном слое при малых преобразованиях энергии из основного потока в возмущения. С увеличением разрешения преобразование энергии увеличивается, дости-

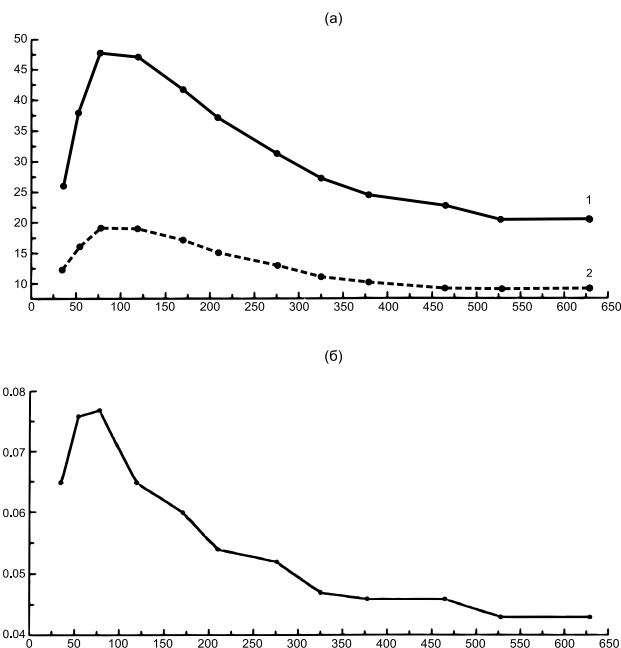


Рис. 3. (а) Размерность аттрактора (кривая 1) и число положительных показателей Ляпунова (кривая 2) как функция размерности фазового пространства, (б) Максимальный показатель Ляпунова как функция размерности фазового пространства

гая максимума при $T = 12$ [96]. Дальнейшее увеличение разрешения приводит лишь к стоку энергии в малые масштабы и ее диссипации.

§ 12. Аттракторы уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением (6) §10:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f \quad (1)$$

с начальным условием

$$\omega|_{t=0} = \omega_0$$

на сфере единичного радиуса, где правая часть f не зависит от времени, $l = 2\Omega \sin \varphi$, так что уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega + f. \quad (2)$$

В предыдущих параграфах мы показали, что

$$\iint_S \Delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} dS = 0.$$

Умножая (2) скалярно на ω , получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\omega, \omega)}{\partial t} = \mu (\Delta \omega, \omega) + (f, \omega),$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\omega, \omega)}{\partial t} = -\mu (\nabla \omega, \nabla \omega) + (f, \omega). \quad (3)$$

Ясно, что если $f \equiv 0$, то $\|\omega\|^2 \equiv (\omega, \omega)$ будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$, то есть нуль будет предельным множеством уравнения (1), если $f \equiv 0$. (Как мы договорились ранее, мы рассматриваем динамику на подпространстве, ортогональном константе.) Поскольку $\|\omega\|^2$ есть функция Ляпунова в этом случае, то нуль будет асимптотически устойчивым решением уравнения (1) при $f \equiv 0$. Задача заключается в том, чтобы понять, какие предельные множества возникают при $f \neq 0$ и как формулировать определения их устойчивости.

Покажем, что система (1) диссипативна. В качестве фазового пространства будем рассматривать гильбертово пространство H . Умножая уравнение (1) скалярно на ω , получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \|\omega\|^2}{\partial t} = \mu (\Delta \omega, \omega) + (f, \omega). \quad (4)$$

Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$(f, \omega) \leq \|f\| \|\omega\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\|f\|^2}{\varepsilon} + \varepsilon \|\omega\|^2 \right),$$

$$(\Delta\omega, \omega) \leq \lambda_{\max}(\Delta)(\omega, \omega) = -2\|\omega\|^2,$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|^2 \leq -2\mu \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\|f\|^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|\omega\|^2,$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|^2 \leq -2 \left(\mu - \frac{\varepsilon}{4} \right) \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\|f\|^2}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Положим $\varepsilon = 2\mu$. Неравенство (5) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|^2 \leq -2\mu \|\omega\|^2 + \frac{\|f\|^2}{2\mu}. \quad (6)$$

Отсюда

$$\|\omega\|^2 \leq \|\omega_0\|^2 e^{-2\mu t} + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2} (1 - e^{-2\mu t}). \quad (7)$$

Действительно, выражение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\omega\|^2 e^{2\mu t} \leq \frac{\|f\|^2}{2\mu} e^{2\mu t}.$$

Интегрируя это выражение от нуля до t , получим неравенство (7).

Выберем $T(\delta)$ таким, чтобы

$$e^{-2\mu T(\delta)} < \delta.$$

Тогда

$$\|\omega\|^2 \leq \|\omega_0\|^2 \delta + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}.$$

Если $\|\omega_0\| < R$, то поглощающее множество будет определяться неравенством

$$\|\omega\|^2 \leq R^2\delta + \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}.$$

Полагая $R^2\delta < \frac{\|f\|^2}{4\mu^2}$, будем иметь

$$\delta < \frac{\|f\|^2}{4R^2\mu^2},$$

или

$$T(\delta) > \frac{1}{2\mu} \ln \frac{4R^2\mu^2}{\|f\|^2}.$$

Таким образом, для каждого R мы определили время T , при котором траектория попадёт в поглощающее множество, определяемое неравенством

$$\|\omega\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\mu^2}, \quad (8)$$

и, следовательно, показали, что динамическая система, описываемая уравнением (1), диссипативна.

Если записать систему (1) с помощью разрешающего оператора S_t в виде

$$\omega(t) = S_t\omega_0,$$

где S_t есть полугруппа при условии, что f не зависит от времени, то можно сформулировать утверждение, доказанное в [1].

Утверждение 1. Полугруппа S_t (1) обладает глобальным аттрактором A в пространстве H_0^2 . Аттрактор A является компактным связным множеством в H_0^2 .

Здесь под пространством H_0^2 понимается пространство функций, определенных на единичной сфере с нормой

$$\|f\|_{H_0^2} = \left(\sum_{n=1} \sum_{|m| \leq n} \lambda_n^2 f_{mn}^2 \right)^{1/2},$$

где λ_n – собственные числа оператора Лапласа на сфере, а f_{mn} – коэффициенты Фурье разложения функции f в ряд по сферическим гармоникам.

Первый вопрос, на который нужно ответить, – какова размерность этого аттрактора?

В настоящее время получены различные оценки различных размерностей аттрактора A системы (1). Все они имеют вид

$$d(A) \leq C_1 G^{2/3} (C_2 + \ln G)^{1/3}, \quad (9)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – константы (для различных определений размерностей они различны), а G – обобщенное число Грассгофа

$$G = \frac{\|f\|}{2\mu^2}.$$

Из формулы (9) можно получить одно интересное следствие – определить число Грассгофа, при котором аттрактором будет точка в фазовом пространстве. Для этого, очевидно, достаточно решить равенство

$$C_2 + \ln G = 0.$$

Отсюда

$$G = e^{-C_2},$$

и следовательно, справедливо утверждение.

Утверждение 2. Если

$$\frac{\|f\|}{2\mu^2} \leq e^{-C_2},$$

то уравнение (1) имеет единственное стационарное решение, являющееся глобальным аттрактором.

Единственность стационарного решения следует из того факта, что все стационарные точки принадлежат глобальному аттрактору. Поскольку аттрактор связное множество, то если стационарных точек несколько, они должны быть соединены через свои устойчивые и неустойчивые многообразия, то есть размерность аттрактора должна быть больше нуля.

§ 13. Устойчивость аттракторов уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере

Поскольку аттрактор динамической системы определяется как множество, то под устойчивостью аттрактора мы должны понимать устойчивость множества. Последняя подразумевает устойчивость по отношению к возмущениям параметров динамической системы, порождающей этот аттрактор. Во введении 2 мы также определили понятие расстояния между множествами и показали, что хаусдорфово расстояние имеет реальные свойства метрики. Таким образом, нашей задачей будет формирование условий, при которых аттракторы динамических систем близки в хаусдорфовой метрике, если мы слегка возмутим параметры этих систем. Заметим, что при этом допускаются разного рода бифуркации типа бифуркации Хопфа – образование цикла из точек и тому подобное. Другими словами, при изучении устойчивости аттрактора как множества устойчивость динамики на аттракторе не изучается. К этому вопросу мы обратимся ниже.

Итак, пусть разрешающий оператор нашей системы $S_t(\lambda)$ зависит от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$. При этом $S_t \equiv S_t(\lambda_0)$ и выполнены следующие условия [46]:

1. Λ – некоторый метрический компакт с метрикой ρ и λ_0 является неизолированной точкой Λ .

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ соответствующая диссипативная система имеет поглощающее множество B_λ и непустой аттрактор A_λ .

3. Существует ограниченное поглощающее множество B_α , содержащее все B_λ .

4. Пусть семейство операторов $S_t(\lambda)$ является асимптотически слабо сходящимся: $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall T > 0$, $\exists \delta > 0$ такое, что в некоторой точке $\tilde{T} > T$ имеет место неравенство

$$\|S_{\tilde{T}}(\lambda, h) - S_{\tilde{T}}(\lambda_0, h)\| \leq \varepsilon, \quad (1)$$

$$\forall \lambda \in O_{\delta_\varepsilon}(\lambda_0), \forall h \in B_\alpha.$$

Если $S_t(\lambda)$ обладает непустым аттрактором, то любая замкнутая окрестность $O_\varepsilon(A_\lambda)$ является поглощающим множеством (по определению), то есть $\forall \varepsilon > 0$ и $h \in B$, B – ограниченное замкнутое множество, $\exists T = T(\lambda, \varepsilon, B)$ (T – время притяжения в $O_\varepsilon(A_\lambda)$) такое, что $S_T(\lambda, h) \in O_\varepsilon(A_\lambda)$ при $t \geq T$, $\forall h \in B$. Будем считать, что известна возрастающая при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha)$, значения которой есть время притяжения множества B_α в ε -окрестность A_λ .

Теорема [46]. Пусть выполнены условия I. Тогда аттрактор $A(\lambda)$ непрерывно зависит от λ (непрерывно в хаусдорфовой метрике) в точке λ_0 тогда и только тогда, когда функция $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha)$ равномерно ограничена по λ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0,$$

$$\sup \Theta(\lambda, \varepsilon, B_\alpha) \leq T_\varepsilon < \infty,$$

$$\lambda \in O_{\delta_\varepsilon}(\lambda_0).$$

Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы найдется такая окрестность $O_{\delta_1}(\lambda_0)$, что $\Theta(\lambda_1, \frac{\varepsilon}{2}, B_\alpha) \leq T_{\varepsilon/2}$ для $\forall \lambda_1 \in O_{\delta_1}(\lambda_0)$. Это значит, что

$$\text{dist}(S_t(\lambda_1, B_\alpha), A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon/2 \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/2}.$$

Из условия слабой асимптотической сходимости следует, что

$$\exists \delta_2 < \delta_1 \quad \text{такое, что} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in O_{\delta_2}(\lambda_0),$$

в некоторой точке $\tilde{T}_{\varepsilon/2} \geq T_{\varepsilon/2}$, выполняется неравенство

$$\|S_{\tilde{T}}(\lambda_1, h) - S_{\tilde{T}}(\lambda_2, h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall h \in B_\alpha.$$

Отсюда

$$\text{dist}(S_{\tilde{T}}(\lambda_2, h), A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq B_\alpha.$$

Поскольку

$$A_{\lambda_2} \in S_{\tilde{T}}(\lambda_2, B_\alpha),$$

то $\text{dist}(A_{\lambda_2}, A_{\lambda_1}) \leq \varepsilon$. В силу произвольности λ_1 и λ_2 имеем

$$\text{dist}(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \varepsilon,$$

$$\text{dist}(A_\lambda, A_{\lambda_0}) \leq \varepsilon,$$

что приводит к неравенству

$$\text{dist}_H(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \varepsilon, \quad \forall \lambda \in O_{\delta_2}(\lambda_0).$$

Необходимость. Пусть аттрактор A_λ непрерывно зависит от параметра λ в точке λ_0 . Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольное $T_{\varepsilon/3} = \Theta(\lambda_0, \varepsilon/3, B_\alpha)$. По определению имеем

$$S_t(\lambda_0, B_\alpha) \subset O_{\varepsilon/3}(A_{\lambda_0}), \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/3}. \quad (2)$$

В силу непрерывности аттрактора в точке λ_0 $\exists \delta > 0$ такое, что

$$\text{dist}_H(A_{\lambda_0}, A_\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0).$$

Так как верно (2), то

$$S_t(\lambda_0, B_\alpha) \subset O_{2\varepsilon/3}(A_\lambda), \quad \forall t \geq T_{\varepsilon/3}, \quad \forall \lambda \in O_\delta(\lambda_0).$$

Из условия асимптотически слабой сходимости операторов следует, что $\exists \delta_1 \leq \delta$ такое, что при некотором конечном $\tilde{T}_{\varepsilon/3} \geq T_{\varepsilon/3}$ имеем

$$\|S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda_1, h) - S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda_0, h)\| \leq \varepsilon/3, \quad \forall h \in B_\alpha, \quad \lambda \in O_{\delta_1}(\lambda_0).$$

Отсюда имеем включение

$$S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda, B_\alpha) \subset O_\varepsilon(A_\lambda).$$

С учетом вложения

$$S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}+\tau}(\lambda, B_\alpha) \subset S_{\tilde{T}_{\varepsilon/3}}(\lambda, B_\alpha)$$

при всех $\tau > 0$. Это означает, что для произвольного $\lambda \in O_{\delta_1}(\lambda_0)$ верна оценка $\Theta(\lambda_0, \varepsilon, B_\alpha) \leq \tilde{T}_{\varepsilon/3} < \infty$.

Условие устойчивости аттрактора системы можно принять за определение корректности постановки исходной задачи. Поясним это утверждение.

Диссипативные системы, и в частности рассматриваемое нами уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f, \quad (3)$$

подразумевают сток энергии, который в данном уравнении описывается членом $\mu \Delta \omega$, и внешний источник энергии f , который не зависит от ω и времени. Это означает, что при постановке задачи (3) мы предполагаем, что "обратное воздействие" ω на f очень мало и им можно пренебречь. Мы также предполагаем, что характерное время изменения f настолько мало, что на временных масштабах, на которых

мы рассматриваем задачу (3), им можно пренебречь. Следовательно, мы неявно предполагаем, что существует T_* такое, что все интересующие нас проблемы должны рассматриваться на временах $t < T_*$. В этом смысле время притяжения к аттрактору при всех физически мыслимых значениях параметров задачи должно быть также меньше T_* , в противном случае такая задача не может быть решена, если нас интересует динамика, связанная с аттрактором.

К сожалению, доказать, что в общем случае для задачи (3) время притяжения к аттрактору равномерно ограничено, к настоящему времени не удалось. Однако в случае малых чисел Грассгофа, при которых, как мы показали в предыдущей лекции, уравнение (3) имеет в качестве глобального аттрактора одну стационарную точку, можно показать, что имеет место экспоненциальное притяжение к аттрактору, из которого следует существование равномерно ограниченного времени притяжения в ε -окрестность аттрактора и, следовательно, устойчивость аттрактора к малым возмущениям параметров задачи.

Итак, рассмотрим уравнение вихря на сфере

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega + f \quad (4)$$

с такими условиями на f , что аттрактором системы (4) является стационарная точка, удовлетворяющая уравнению

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + 2\Omega \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda} = \mu \Delta \bar{\omega} + f. \quad (5)$$

Пусть $\omega = \bar{\omega} + \omega'$. Уравнение для ω' будет иметь вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + J(\psi', \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \omega') + 2\Omega \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = \mu \Delta \omega'. \quad (6)$$

Умножим (6) скалярно на ω' . Получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\omega'\|^2 + (J(\psi', \bar{\omega}), \omega') = \mu (\Delta \omega', \omega'). \quad (7)$$

Основная идея доказательства состоит в том, что мы должны сформулировать условия на $\bar{\omega}$ такие, что

$$-(J(\psi', \bar{\omega}), \omega') + \mu(\Delta\omega', \omega') \leq -\gamma\|\omega'\|^2,$$

$$\gamma > 0.$$

В этом случае будет справедливо неравенство

$$\frac{\partial\|\omega'\|^2}{\partial t} \leq -2\gamma\|\omega'\|^2$$

и, следовательно,

$$\|\omega'\|^2 \leq e^{-2\gamma t}\|\omega'_0\|^2. \quad (8)$$

Из (8) уже следует равномерная ограниченность времени притяжения в окрестность аттрактора из любого множества $\|\omega'\|^2 \leq R^2$ и, как следствие, устойчивость стационарной точки как по Ляпунову, так и к малым постоянно действующим возмущениям параметров задачи (4).

Справедливы неравенства

$$\mu(\Delta\omega', \omega') \leq -2\mu\|\omega'\|^2,$$

$$|(J(\psi', \bar{\omega}), \omega')| \leq \|\omega'\|\|\bar{\omega}\|\|\omega'\|$$

(см.[64]). Таким образом, мы имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\omega'\|^2 \leq -2\mu\|\omega'\|^2 + \|\bar{\omega}\|\|\omega'\|^2 = -2\mu \left(1 - \frac{\|\bar{\omega}\|}{2\mu}\right) \|\omega'\|^2.$$

Умножая (5) скалярно на $\bar{\omega}$, будем иметь

$$\mu(\Delta\bar{\omega}, \bar{\omega}) = -(f, \bar{\omega}).$$

Отсюда

$$2\mu\|\bar{\omega}\|^2 \leq \mu|(\Delta\bar{\omega}, \bar{\omega})| \leq \|f\|\|\bar{\omega}\|,$$

или

$$\|\bar{\omega}\| \leq \frac{\|f\|}{2\mu}.$$

Следовательно, условие экспоненциального притяжения будет иметь вид

$$\frac{\|f\|}{4\mu^2} < 1.$$

Глава 3

Бароклинная неустойчивость атмосферы

§ 1. Физические механизмы бароклинной неустойчивости

Рассмотрим уравнение термогидродинамики атмосферы в x, y, p -системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - lv &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} + lu &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{RT}{c_p p} \tau, & \frac{\partial\Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, & \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве краевых условий примем следующее:

по координате p : $\tau = 0$ при $p = 0, p_0$,

по координате y : $v = 0$ при $y = y_1, y_2$,

по координате x : условие периодичности всех искомым функций и их производных.

Выберем в качестве основного состояния (решения) задачи (1) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{T}, \bar{\tau}, \bar{\Phi}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{u} = \bar{u}(y, p), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\tau} = 0,$$

$$l\bar{u} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}, \quad l\frac{\partial\bar{u}}{\partial p} = \frac{R}{p}\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (2) есть решение системы (1). Линеаризуем уравнения (1) относительно (2). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \tau'\frac{\partial\bar{u}}{\partial p} - lv' &= -\frac{\partial\Phi'}{\partial x} - v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v'}{\partial x} + lu' &= -\frac{\partial\Phi'}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial T'}{\partial x} + v'\frac{\partial\bar{T}}{\partial y} + \tau'\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial p} - \frac{R\bar{T}}{pc_p}\right) &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial\tau'}{\partial p} &= 0, \quad \frac{\partial\Phi'}{\partial p} = -\frac{RT'}{p}. \end{aligned}$$

Выпишем уравнение для кинетической энергии возмущений.

Пусть

$$E' = \iiint_{x y p} \frac{u'^2 + v'^2}{2} dD.$$

Тогда для E' получаем уравнение

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = - \iiint \left(u'v'\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \tau'u'\frac{\partial\bar{u}}{\partial p} - \frac{R}{p}\tau'T' \right) dD. \quad (4)$$

Первый член описывает уже известные баротропные преобразования энергии, второй – имеет подобную же структуру, третий – описывает основной “бароклинный” переход энергии – преобразование вихревой доступной потенциальной энергии в кинетическую энергию возмущений. Действительно, умножив третье уравнение системы на T' и разделив на

$\sigma = \frac{p}{R} \left(\frac{R\bar{T}}{pc_p} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} \right)$ (полагаем $\sigma > 0$), уравнение для вихревой доступной потенциальной энергии можно записать в виде

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = - \iiint \frac{R}{p} \tau' T' dD + \iiint \frac{T' v'}{\sigma} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} dD,$$

$$A' = \frac{1}{2} \iiint \frac{T'^2}{\sigma} dD. \quad (5)$$

Второй член этого уравнения описывает преобразование доступной потенциальной энергии основного потока в доступную потенциальную энергию возмущений, а первый – преобразование доступной потенциальной энергии возмущений в кинетическую энергию возмущений. Таким образом, чтобы рассмотреть чисто бароклинные преобразования энергии, необходимо исключить зависимость основного потока от координаты y , т.е. положить $\bar{u} = \bar{u}(p)$.

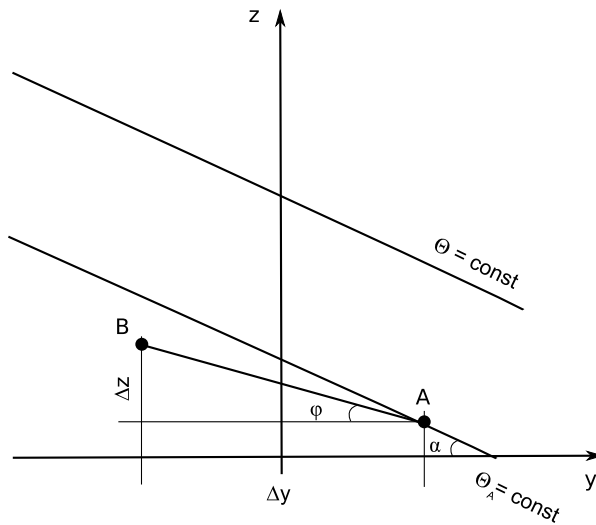


Рис. 4. Схема перемещения жидкой частицы при бароклинной неустойчивости

Основной механизм бароклинной неустойчивости опишем, следуя соображениям, изложенным в работе [27]. Пусть жидкая частица перемещается из точки A в точку B (рис. 4). Пусть поверхности постоянной потенциальной температуры наклонены к поверхности $z = 0$ под углом α . Такой наклон возможен во вращающейся жидкости, в которой меридиональный градиент температуры уравновешивается силой Кориолиса. Будем считать перемещение частицы адиабатическим; следовательно, при перемещении частицы её потенциальная температура сохраняется. Поскольку

$$\Theta_A = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa = \frac{p^{1-\kappa} p_0^\kappa}{\rho R} = \text{const},$$

то

$$\rho = \frac{p^{1-\kappa} p_0^\kappa}{\Theta_A R}.$$

Отсюда следует, что изменение плотности частицы будет описываться выражением

$$\Delta\rho = \frac{p_0^\kappa(1-\kappa)}{\Theta_A R p^\kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y \right) \quad (6)$$

Таким образом, получаем выражение для плотности частицы в точке B :

$$\rho_A(B) = \rho_A + \Delta\rho.$$

Плотность среды в точке B можно вычислить обычным образом:

$$\rho_B = \rho_A + \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \rho}{\partial y} \Delta y. \quad (7)$$

Разность между плотностью частицы и плотностью среды в точке B будет описываться формулой

$$\rho_A(B) - \rho_B = \left(\frac{p_0^\kappa(1-\kappa)}{\Theta_A R p^\kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_A - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_A \right) \Delta z +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{p_0^\kappa (1 - \kappa)}{\Theta_A R p_A^\kappa} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_A - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_A \right) \Delta y = \rho_A \left(\frac{1 - \kappa}{p_A} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_A - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\rho_A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_A \right) \Delta z + \rho_A \left(\frac{1 - \kappa}{p_A} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_A - \frac{1}{\rho_A} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_A \right) \Delta y = \\
 & = \frac{\rho_A}{\Theta_A} \left(\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_z \Delta y \right). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Соотношение (8) можно записать следующим образом:

$$\rho_A(B) - \rho_B = \frac{\rho_A}{\Theta_A} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_A \Delta y \left[\frac{\Delta z}{\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\Theta = \text{const}} \right].$$

Проекция силы на единицу массы, действующей вдоль линии перемещения частицы, будет равна

$$\begin{aligned}
 F & = - \frac{(\rho_A(B) - \rho_B) g \sin \varphi}{\rho_A} = \\
 & = -g \sin \varphi \frac{(\partial \Theta / \partial z)_A}{\Theta_A} \Delta y \left[\frac{\Delta z}{\Delta y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\Theta = \text{const}} \right].
 \end{aligned}$$

Член $\Delta z / \Delta y$ равен тангенсу угла наклона поверхности постоянного геопотенциала ($\text{tg } \varphi$), а $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\Theta = \text{const}}$ – тангенсу угла наклона поверхности постоянной потенциальной температуры ($\text{tg } \alpha$). Таким образом, если $\text{tg } \alpha > \text{tg } \varphi$, то F будет больше нуля, и частица, перемещаясь из точки A в точку B , будет отклоняться дальше. (Отметим также, что должно, кроме того, выполняться соотношение $\sin \varphi > 0$.) Поскольку эти частицы, перемещаясь, оказываются легче окружающей среды, то они всплывают. Это говорит о том, что бароклиная неустойчивость есть разновидность термической конвекции.

Мы не будем останавливаться на механизме возбуждения бароклиной неустойчивости, связанном со сверхотражением волн, распространяющихся от поверхностного источника к критическому уровню (подробно этот механизм исследован в работах [79, 125]).

§ 2. Задача Иди

Выпишем снова систему уравнений, описывающую атмосферу в адиабатическом и квазистатическом приближении, в p -системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} - lv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + lv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} - \gamma_a \frac{RT}{gp} \tau &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями, аналогичными §1. Как уже было указано выше, в системе (1) существует стационарное решение:

$$\bar{u} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} = -\frac{R\bar{T}}{p}, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\tau} = 0, \quad (2)$$

где $\bar{T} = \bar{T}(p, y)$. Это решение описывает зональный поток (или циркумполярный вихрь) при заданном распределении зонально осреднённой температуры. Устойчивость именно этого решения мы будем в дальнейшем изучать.

Для того чтобы в чистом виде выделить только бароклинный механизм роста неустойчивых возмущений, мы должны исключить из рассмотрения зависимость скорости основного потока от координаты y (т.е. положить баротропную компоненту вихря в основном движении равной нулю). Поскольку нашей задачей является изучение устойчивости процессов синоптического масштаба

(характерные масштабы порядка 1000 км), мы за основу примем задачу Иди [99] (β -эффектом в уравнениях будем пренебрегать). В пользу такого выбора свидетельствует тот факт, что в этом случае (при некоторых дополнительных упрощениях, о которых будет говориться ниже) задачу можно решить аналитически. Это дает неоспоримые преимущества, так как в настоящее время хорошо известно, что результаты расчетов критериев потери устойчивости и наиболее неустойчивых длин волн решающим образом зависят от выбранного пространственного разрешения задачи [21, 129]. Поскольку основной нашей задачей будет изучение критериев потери устойчивости и скоростей нарастания неустойчивых волн, мы будем исследовать устойчивость решения (2) по отношению к бесконечно малым возмущениям – другими словами, изучать задачу (1), линеаризованную относительно (2).

Пусть $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$, где $\bar{\varphi}$ характеризует основное состояние, а φ' – возмущения. Тогда линеаризованная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} - l v' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + l u' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial p} &= -\frac{R T'}{p}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \bar{\sigma} \tau' &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial p} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку мы решили пренебречь β -эффектом и изучить только чисто бароклинную задачу, то коэффициенты

в нашей системе не зависят от y ($l = const, \bar{u} = \bar{u}(p), \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(p)$). Чтобы изучать только собственные колебания системы (3), поставим в качестве краевых условий по p условия $\tau' = 0$ при $p = 0, p_0$. По координате x в качестве краевых условий примем условие периодичности решения. Если в качестве начальных условий для системы (3) принять функции, не зависящие от координаты y , то в силу независимости коэффициентов системы от y решение также будет не зависящим от y , т.е. в этом случае задачу (3) можно упростить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} - lv' &= -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + lu' &= 0 \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial p} &= -\frac{RT'}{p}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \bar{\sigma} \tau' &= 0, \\ \tau' = 0 &\text{ при } p = 0, p_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\bar{u} = r(p_0 - p)$, так что $\partial \bar{u} / \partial p = -r$, где $r = const > 0$.

Из (2) получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{pl}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = -\frac{pl}{R} r. \quad (5)$$

Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \\ \Phi \\ \tau \end{pmatrix}$$

(Здесь и в дальнейшем штрихи при искомым функциям для сокращения записи опускаем.)

Система (4) допускает разделение переменных по x и t . Эта процедура эквивалентна поиску решения (4) в виде простых гармонических волн

$$\varphi = \varphi_0(p)e^{ik(x-ct)}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) видно, что неустойчивость решения (6) возникает, когда фазовая скорость c имеет отрицательную мнимую часть. Подставляя (6) в систему (4), получим систему уравнений относительно компонентов φ_0 . Если опять для сокращения записи опустить индекс 0, то эта система примет вид

$$\begin{aligned} ik(\bar{u} - c)_r u - lv + \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} &= -ik\Phi, \\ ik(\bar{u} - c)v + lu &= 0, \\ ik(\bar{u} - c)T + v \frac{pl}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} - \bar{\sigma}\tau &= 0, \\ iku + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ T &= -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разрешая эту систему относительно τ , получим задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} (\bar{u} - c) \left[1 - \frac{k^2}{l^2} (\bar{u} - c)(\bar{u} - c)_r \right] \frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} - \\ - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial p} - \frac{R\bar{\sigma}k^2}{pl^2} (\bar{u} - c)\tau &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$\tau = 0$ при $p = 0, p_0$.

К сожалению, решить уравнение (8) можно только приближенно. Чтобы получить аналитическое решение, сделаем два предположения: положим в системе (7) $(\bar{u} - c)_r$ равным 0, что означает использование квазигеострофического приближения, и $\bar{\sigma}/p = \sigma = const$. В дальнейшем мы эти ограничения снимем. При сделанных предположениях уравнение (8) преобразуется к виду

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} + 2r \frac{\partial \tau}{\partial p} - (\bar{u} - c) \frac{R\bar{\sigma}k^2}{pl^2} \tau = 0 \quad (9)$$

Фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (\bar{u} - c)^{1.5} J_{1.5}(i\sqrt{\beta}(\bar{u} - c)), \\ \tau_2 &= (\bar{u} - c)^{1.5} Y_{1.5}(i\sqrt{\beta}(\bar{u} - c)). \end{aligned} \quad (10)$$

где $\beta = \sigma Rk^2/l^2r^2$, $J_{1.5}, Y_{1.5}$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Таким образом, особенность при старшей производной в уравнении (9) является только кажущейся. Для существования ненулевого решения при однородных краевых условиях необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\begin{vmatrix} \tau_1(p = p_0) & \tau_1(p = 0) \\ \tau_2(p = p_0) & \tau_2(p = 0) \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) подстановкой представлений функций Бесселя получим уравнение для нахождения собственных значений:

$$\begin{aligned} -\beta c^2 + \beta r p_0 c + 1 - \sqrt{\beta} r p_0 D &= 0, \\ D = \text{cth}(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}, \quad \alpha &= \frac{\sqrt{R\sigma k p_0}}{l}. \end{aligned} \quad (12)$$

Разрешая квадратное уравнение (12), находим:

$$c_{1,2} = \frac{r p_0}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2} (\alpha D - 1)} \right). \quad (13)$$

Два дискретных собственных числа соответствуют двум вертикальным модам.

Как нетрудно видеть из соотношения (13), условие неустойчивости будет иметь вид

$$\frac{4}{\alpha^2}(\alpha D - 1) > 1. \quad (14)$$

Соотношение (14) было впервые получено в [9]. Разрешая это уравнение относительно α , получим, что условие (14) выполняется при

$$\alpha < 2,3999. \quad (15)$$

Инкремент нарастания амплитуды в этом случае описывается формулой

$$\gamma = rl/2(\sigma R)^{1/2}|\sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha D - 1)}|.$$

Поскольку число дискретных собственных значений в нашем случае конечно, мы не можем говорить об устойчивости решения по отношению к начальным возмущениям произвольного вида.

Покажем, что, кроме двух дискретных собственных чисел, задача (9) имеет еще непрерывный спектр c , принадлежащий интервалу $(0, \bar{u}(p))$. Поскольку этот спектр вещественный, он не влияет на устойчивость задачи.

Проинтегрируем уравнение (9) от 0 до p_0 . Используя краевые условия, получаем:

$$\int_0^{p_0} (\bar{u} - c) \frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} dp = \int_0^{p_0} (\bar{u} - c) \frac{\alpha^2}{p_0^2} \tau dp.$$

Интегрируя далее левую часть, находим:

$$(\bar{u} - c) \left. \frac{\partial \tau}{\partial p} \right|_0^{p_0} = \int_0^{p_0} (\bar{u} - c) \frac{\alpha^2}{p_0^2} \tau dp. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) будет иметь вид $\tau = \delta(p - p_i)$, где $0 < p_i < p_0$, а δ – дельта-функция Дирака. Действительно, в этом случае

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial p} \right|_0^{p_0} = \left. \frac{\delta(p - p_i)}{p - p_i} \right|_0^{p_0}.$$

и, следовательно, из уравнения (16) получаем

$$c = \bar{u}(p_i).$$

Соотношение (15) можно переписать следующим образом:

$$k < \frac{2,399l}{\sqrt{\sigma R p_0}}. \quad (17)$$

Из соотношения (17) следует, что при фиксированном параметре статической устойчивости вся область волновых чисел разбивается на две подобласти: “устойчивую” и “неустойчивую”, причем чем длиннее волна, тем более она неустойчива. Этот результат противоречит, по крайней мере, результатам численного моделирования с глобальными моделями общей циркуляции атмосферы, которые показывают, что самые длинные волны бароклинно практически устойчивы. Хорошо известно, что соотношение (17) является результатом приближения l -плоскости. Другими словами, чтобы в рамках простых моделей получить качественно правильный результат и для длинных волн, необходимо обязательно принимать во внимание β -эффект.

§ 3. Модель Филлипса

Для исследования бароклинной неустойчивости с учётом β -эффекта Филлипсом была использована модель для квази-геострофического вихря в p -системе координат (§2, глава 1). С этой целью система уравнений (4)-(5) этой главы линеаризовывалась относительно стационарного решения

$$\bar{u} = \bar{u}(p), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\tau} = 0, \quad \bar{T} = -\frac{R}{p} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p}.$$

Если ввести новые обозначения:

$$z' = \frac{\Phi'}{g}, \quad \sigma = \frac{R^2 \bar{\tau}}{p^2 g} (\gamma_a - \bar{\gamma}),$$

то в этих обозначениях линеаризованная система примет вид [61]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \bar{u} \frac{\partial^3 z'}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{l^2}{g} \frac{\partial \tau'}{\partial p} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial p} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial p} - \frac{d\bar{u}}{dp} \frac{\partial z'}{\partial x} - \sigma \tau' = 0.$$

В качестве краевых условий принимаются условия периодичности по x и $\tau' = 0$ при $p = 0, 1000$ мб.

Распишем первое уравнение системы (1) для изобарических поверхностей 750 мб и 250 мб, а второе для поверхности 500 мб, используя центральные разности для производных по p и обозначив уровень 750 мб через $3/2$, а уровень 250 мб через $1/2$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} z'_{3/2} + \bar{u}_{3/2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} z'_{3/2} + \beta \frac{\partial z'_{3/2}}{\partial x} + \frac{l^2 \tau'_1}{g \Delta p} &= 0, \\ \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} z'_{1/2} + \bar{u}_{1/2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} z'_{1/2} + \beta \frac{\partial z'_{1/2}}{\partial x} - \frac{l^2 \tau'_1}{g \Delta p} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (z'_{3/2} - z'_{1/2}) + \frac{1}{2} (\bar{u}_{3/2} + \bar{u}_{1/2}) \frac{\partial}{\partial x} (z'_{3/2} - z'_{1/2}) - \\ - \frac{1}{2} (\bar{u}_{3/2} - \bar{u}_{1/2}) \frac{\partial}{\partial x} (z'_{3/2} + z'_{1/2}) - \sigma \tau'_1 \Delta p &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{z} = \frac{1}{2} (z'_{3/2} + z'_{1/2}),$$

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{2}(z'_{3/2} - z'_{1/2}), \\ \tilde{u} &= \frac{1}{2}(\bar{u}_{3/2} + \bar{u}_{1/2}), \\ u^* &= \frac{1}{2}(\bar{u}_{3/2} - \bar{u}_{1/2}). \end{aligned}$$

Систему уравнений (2) можно переписать относительно \bar{z} и z^* следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} + \tilde{u} \frac{\partial^3 \bar{z}}{\partial x^3} + u^* \frac{\partial^3 z^*}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} + \tilde{u} \frac{\partial^3 z^*}{\partial x^3} + u^* \frac{\partial^3 \bar{z}}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial z^*}{\partial x} - \\ - \mu^2 \left(\frac{\partial z^*}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial z^*}{\partial x} - u^* \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mu^2 = \frac{2l^2}{\sigma g (\Delta p)^2}.$$

Решение системы (3) будем искать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ A^* \end{Bmatrix} e^{ik(x-ct)}. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнения (3), получаем систему уравнений для определения c :

$$\begin{aligned} [k^2(c - \tilde{u}) + \beta] \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - k^2 u^* \frac{\partial z^*}{\partial x} &= 0, \\ [(k^2 + \mu^2)(c - \tilde{u}) + \beta] \frac{\partial z^*}{\partial x} + u^*(\mu^2 - k^2) \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Исходя из требования существования ненулевых решений, получаем следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} (c - \tilde{u})(k^2 + \mu^2) + \beta & u^*(\mu^2 - k^2) \\ -k^2 u^* & (c - \tilde{u})k^2 + \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, находим:

$$c = \tilde{u} - \frac{\beta(2k^2 + \mu^2)}{2k^2(k^2 + \mu^2)} \pm \sqrt{\delta},$$

$$\delta = \frac{\beta^2 \mu^4}{4k^4(k^2 + \mu^2)^2} - u^{*2} \frac{\mu^2 - k^2}{\mu^2 + k^2}. \quad (6)$$

Таким образом, условие неустойчивости будет иметь вид

$$\delta < 0.$$

Полагая $\delta = 0$, получаем:

$$\frac{2k^4}{\mu^4} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\mu^4 u^{*2}}}. \quad (7)$$

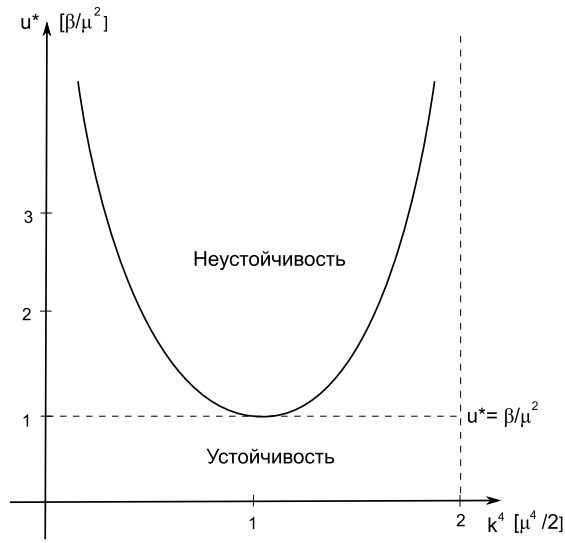


Рис. 5. Нейтральная кривая, разделяющая область устойчивости и неустойчивости для двуслойной модели Филлипса

Уравнение (7) есть уравнение нейтральной кривой, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости (Рис. 5). Сразу заметим, что волны с большими k и с малыми k устойчивы. Далее, неустойчивость возможна только начиная с некоторого конечного сдвига ветра. Если рассчитать длину волны, соответствующую минимальному значению сдвига при реальных стратификациях атмосферы, то получим значение порядка 4000 км. Это значение близко к реально наблюдаемым в атмосфере бароклинным “циклоническим” волнам. Здесь следует отметить, что двуслойная модель принципиально описывает зарождение циклогенеза, происходящего во всей толще тропосферы, что практически невозможно. Наиболее часто потеря устойчивости происходит в нижней тропосфере. Конечно, совпадение наиболее неустойчивой рассчитанной по двуслойной модели длине волны с реально наблюдаемыми волнами не может быть чисто случайным, однако численные эксперименты с многоуровневыми моделями общей циркуляции атмосферы показали, что максимум скорости нарастания неустойчивых мод сдвигается в сторону высоких волновых чисел с $k = 14, 15$. Поскольку вертикальный профиль этих мод имеет максимум в нижней тропосфере, при расчете их скорости нарастания очень важно учесть диссипацию энергии в пограничном слое и турбулентную диссипацию за счет горизонтального сдвига ветра, которая, как известно, пропорциональна в первом приближении квадрату горизонтального волнового числа. Все это приводит к тому, что максимум результирующей скорости нарастания при диссипации перемещается снова в спектральную область с волновыми числами $k = 6 \dots 8$.

§ 4. Связки интегралов в исследовании устойчивости бароклинных потоков

В главе 1 было показано, что невязкий квазигеострофический бароклинный поток описывается уравнением для псевдопотенциального вихря:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) &= 0, \\ q &= \Delta\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \psi = \frac{\Phi}{l_0}, \\ m^2 &= \frac{l_0^2 g}{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы будем рассматривать систему уравнений (1) на сфере в p -системе координат над орографически неоднородной поверхностью. В качестве краевых условий можно принять условие непротекания для $p = p_2$ и условие $\tau \equiv dp/dt = 0$ для уровня тропопаузы $p = p_1$. Используя уравнение притока тепла на этих поверхностях, получим

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + J(\psi, \eta_i) = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_i &= \frac{\partial \psi}{\partial p} + \alpha_i \psi + \gamma_i H, \\ \alpha_2 &= \frac{p_2}{m^2 R T_0}, \quad \alpha_1 = 0, \\ \gamma_2 &= \frac{l_0}{g} \alpha_2, \\ \gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости стационарных решений задачи (1)–(2) воспользуемся, как и в случае баротропной задачи, методом Арнольда [1]. Такое исследование для случая $\bar{q} = \bar{q}(y)$ было проведено в [18].

В общем случае стационарное решение задачи (1)–(2) должно удовлетворять системе уравнений

$$J(\bar{\psi}, \bar{q}) = 0, \quad J(\bar{\psi}_1, \bar{\eta}_1) = 0, \quad J(\bar{\psi}_2, \bar{\eta}_2) = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (3) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= F(\bar{q}), \\ \bar{\psi}_1 &= f_1(\bar{\eta}_1), \quad \bar{\psi}_2 = f_2(\bar{\eta}_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где F, f_1, f_2 – некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Из уравнения (1) следует, что q сохраняется вдоль любой траектории на p -поверхности; значит, вдоль этой траектории будет сохраняться и любая гладкая функция $\Phi(q)$. Отсюда следует, что на любой p -поверхности интеграл по λ, φ от функции $\Phi(q)$ будет инвариантом:

$$\iint_{\lambda \varphi} \Phi(q) \cos \varphi d\lambda d\varphi = \varphi_1(p). \quad (5)$$

Интегрируя (5) по p , получаем:

$$\iiint_p \Phi(q) \cos \varphi d\lambda d\varphi dp = \text{const}. \quad (6)$$

Умножив уравнение (1) скалярно на ψ , находим:

$$\iiint \psi \frac{\partial q}{\partial t} \cos \varphi d\lambda d\varphi dp = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \iiint \left(\psi \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \cos \varphi dp d\lambda d\varphi = \\ = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint \frac{|\nabla \psi|^2}{2} \cos \varphi d\lambda d\varphi dp - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint m^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp +$$

$$+ \iint_S \left(\psi m^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)_{p_2} \cos \varphi d\lambda d\varphi - \iint_S \left(\psi m^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)_{p_1} \cos \varphi d\lambda d\varphi.$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial p} = -J(\psi, \eta) - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iiint \frac{1}{2} \left(|\nabla \psi|^2 + m^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial p} \right|^2 \right) \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \iint_S \alpha_2 m^2 |\psi_2|^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi \right\} = 0. \quad (7)$$

Соотношение (7) описывает закон сохранения энергии. Таким образом, в задаче (1)–(2) сохраняется величина I_1 :

$$I_1 = \iiint \left\{ \frac{1}{2} \left(|\nabla \psi|^2 + m^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial p} \right|^2 \right) + \Phi(q) \right\} \cos \varphi d\lambda d\varphi dp +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint_S \alpha_2 m^2 |\psi_2|^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi. \quad (8)$$

Кроме того, на нижней границе выполняется закон сохранения интеграла от любой гладкой функции η :

$$I_2 \equiv \iint_S \Gamma(\eta) \cos \varphi d\lambda d\varphi = const.$$

Следовательно, сохраняется величина

$$I = I_1 + I_2. \quad (9)$$

Пусть $\bar{\psi}$ – стационарная функция тока, удовлетворяющая уравнениям (4). Тогда величина $\Delta I = I(\psi) - I(\bar{\psi})$ будет также инвариантна. Представим ее в виде разложения по вариациям последовательных порядков, предполагая величину $\delta\psi$ достаточно малой:

$$\Delta I = \delta I + \delta^2 I + \dots \quad (10)$$

Первая вариация функционала будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta I &= \iiint (\nabla \bar{\psi}, \nabla \delta\psi) \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \\ &+ \iiint \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial p} m^2 \frac{\partial \delta\psi}{\partial p} \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \\ &+ \iiint \Phi'_q \delta q \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \iint_S (m^2 \alpha_2 \bar{\psi}_2 \delta\psi_2 + \\ &+ \Gamma'_\eta \left(\frac{\partial \delta\psi_2}{\partial p} + \alpha_2 \delta\psi_2 \right)) \cos \varphi d\lambda d\varphi = \\ &= \iiint \left(-\bar{\psi} \Delta \delta\psi - \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial}{\partial p} \delta\psi + \Phi'_q \delta q \right) \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \\ &+ \iint_S \left(m^2 \bar{\psi}_2 \frac{\partial \delta\psi_2}{\partial p} + m^2 \alpha_2 \bar{\psi}_2 \delta\psi_2 + \Gamma'_\eta \left(\frac{\partial \delta\psi_2}{\partial p} + \alpha_2 \delta\psi_2 \right) \right) d\lambda d\varphi = \\ &= \iiint (\Phi'_q - \bar{\psi}) \delta q \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \\ &+ \iint_S \left(\frac{\partial \delta\psi_2}{\partial p} + \alpha_2 \delta\psi_2 \right) (\Gamma'_\eta + \bar{\psi}_2) d\lambda d\varphi. \quad (11) \end{aligned}$$

При выводе соотношения (11) мы предполагали, что $\delta\psi_1 = 0$. Для обращения первой вариации функционала I в нуль необходимо и достаточно положить

$$\Phi'_q = \bar{\psi}, \quad \Gamma'_\eta = -\bar{\psi}_2.$$

Поскольку $\bar{\psi} = F(\bar{q})$, $\bar{\psi}_2 = f_2(\bar{\eta}_2)$, то

$$\Phi'_{\bar{q}} = F(\bar{q}), \quad \Gamma'_{\bar{\eta}} = -f_2(\bar{\eta}_2). \quad (12)$$

Вторая вариация функционала I будет равна:

$$\begin{aligned} \delta^2 I = & \iiint \left(\frac{|\nabla \delta\psi|^2}{2} + \frac{m^2}{2} \left| \frac{\partial}{\partial p} \delta\psi \right|^2 + \Phi''_{\bar{q}} \frac{(\delta q)^2}{2} \right) \cos \varphi d\lambda d\varphi dp + \\ & + \iint \left(m^2 \alpha_2 \frac{|\delta\psi|^2}{2} + \Gamma''_{\bar{\eta}} \frac{(\delta\eta)^2}{2} \right) \cos \varphi d\lambda d\varphi. \end{aligned}$$

Для того чтобы вторая вариация функционала была положительна (для существования минимума функционала), достаточно положить

$$\Phi''_{\bar{q}} > 0, \quad \Gamma''_{\bar{\eta}} > 0.$$

Используя соотношения (12), получаем, что вторая вариация функционала будет положительна для стационарных решений, удовлетворяющих соотношениям

$$F'(\bar{q}) > 0, \quad f'_2(\bar{\eta}) < 0. \quad (13)$$

Далее проводя рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили при изучении баротропной устойчивости, получаем, что стационарные невязкие квазигеострофические потоки, удовлетворяющие соотношениям (13), будут формально устойчивы по отношению к малым, но конечным возмущениям.

Если мы рассматриваем стационарные решения, не зависящие от λ (зонально осредненные потоки), при отсутствии орографии, то условия (13) описывают одновременное монотонное нарастание (или убывание) псевдопотенциального вихря и приповерхностной температуры от экватора к полюсу [18]. Ясно, что в реальной атмосфере эти две компоненты условия устойчивости противоречат друг другу – мы

имеем нарастание вихря к полюсу и убывание температуры. Отсюда следует, что распределение приповерхностной температуры является дестабилизирующим фактором. В частном случае (для задачи Иди) этот результат следует непосредственно из анализа нормальных мод.

Присутствие в нижнем краевом условии орографических неоднородностей поверхности Земли также дестабилизирует зонально осредненный поток. Этот феномен называют “орографической неустойчивостью”. Вообще, такая постановка задачи представляется весьма искусственной. Действительно, мы формально можем удовлетворить уравнению (1), полагая $\bar{q} = \bar{q}(\varphi)$, и краевому условию (2), выполнив третье соотношение (4). Однако решение $\bar{\psi}$, удовлетворяющее обоим этим соотношениям, по-видимому, существовать не будет. Следовательно, в такой постановке мы должны предполагать существование стационарной правой части в уравнении (1).

Исследования устойчивости зонального потока в присутствии орографических неоднородностей поверхности Земли [87] показывают, что при определенной (достаточно большой) высоте гор возникает неустойчивая стационарная мода, пространственный масштаб которой близок к резонансному, так что в системе осуществляется почти резонансный режим. Однако основным источником энергии роста неустойчивой моды является доступная потенциальная энергия, так что орография играет роль катализатора. Результаты численных экспериментов, приведенных в работе [12] для различных значений зональной доступной потенциальной энергии и различных амплитуд орографических неоднородностей, показали, что режимы неустойчивости чисто бароклинные (бегущие волны) и чисто орографические (резонансные стационарные волны) чередуются между собой. Существует также область значений зональной доступной потенциальной энергии

и амплитуд орографических неоднородностей, где оба режима существуют одновременно.

Аналогичные результаты были получены и в работе [65], в которой пространственная неоднородность была включена в параметр статической устойчивости атмосферы.

§ 5. Достаточные условия устойчивости стационарных потоков в двуслойной квазигеострофической атмосфере

В данном параграфе мы изложим метод Шёферда исследования устойчивости стационарных решений применительно к двуслойной бароклинной атмосфере [143].

Систему уравнений, описывающую динамику двуслойной атмосферы, можно записать в терминах закона сохранения квазигеострофического потенциального вихря на каждом слое:

$$\frac{d_i P_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d_i P_i}{dt} &\equiv \frac{\partial P_i}{\partial t} + J(\Phi_i, P_i), \\ P_i &\equiv \Delta \Phi_i + \beta y + (-1)^i F(\Phi_1 - \Phi_2), \end{aligned}$$

Φ_i – геострофическая функция тока, $\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = const$, l – параметр Кориолиса, F – число Фруда (мера статистической устойчивости системы).

Система (1) рассматривается в канале на β -плоскости, бесконечной по x , и краевыми условиями по y :

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial y \partial t} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, 1,$$

где черта сверху означает осреднение по x :

$$\bar{f} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Нетрудно проверить, что система (1) с такими краевыми условиями обладает законом сохранения полной энергии:

$$E = \frac{1}{2} \{ |\nabla\Phi_1|^2 + |\nabla\Phi_2|^2 + F(\Phi_1 - \Phi_2)^2 \}. \quad (2)$$

Пусть стационарное решение, устойчивость которого мы изучаем, есть $\bar{P}, \bar{\Phi}$ и это решение есть функция только от y . Поскольку $\bar{u}_i = -\frac{\partial\bar{\Phi}_i}{\partial y}$, то

$$\frac{\partial\bar{P}_i}{\partial y} = -\frac{d^2\bar{u}_i}{dy^2} + \beta + (-1)^i F(\bar{u}_1 - \bar{u}_2).$$

Мы будем доказывать утверждение, что если \bar{P}_i – монотонные функции y с одинаковым знаком градиента, то решение $(\bar{P}, \bar{\Phi})$ устойчиво по Ляпунову.

Доказательство этого утверждения будет проводиться точно по схеме, изложенной в §3 главы 2 при исследовании устойчивости стационарных потоков баротропной двумерной атмосферы.

Поскольку $\bar{P}(y)$ есть монотонная функция y , то можно определить функцию ей обратную – $Y(\bar{P})$, монотонно зависящую от \bar{P} . Для определенности будем считать, что $\frac{\partial Y}{\partial \bar{P}} > 0$.

Пусть

$$\Phi_i = \bar{\Phi}_i + \psi_i, \quad P_i = \bar{P}_i + q_i \equiv \bar{P}_i + \Delta\psi_i$$

$$A_i(\bar{P}_i, q_i) = - \int_0^{q_i} \{ Y_i(\bar{P}_i + q') - Y_i(\bar{P}_i) \} dq'.$$

Отметим, что функции A_i знакопостоянные в силу монотонности $Y_i(\bar{P}_i)$.

Нетрудно проверить, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d_i q_i}{dt} = -J(\psi_i, \bar{P}_i) = -\frac{\partial\psi_i}{\partial x} \frac{\partial\bar{P}_i}{\partial y} = -\frac{d_i\bar{P}_i}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial \bar{P}_i} = -Y_i(\bar{P}_i + q_i) + Y_i(\bar{P}_i) + q_i \frac{\partial Y_i(\bar{P}_i)}{\partial \bar{P}_i}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = -Y_i(\bar{P}_i + q_i) + Y_i(\bar{P}_i).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d_i A_i(\bar{P}_i, q_i)}{dt} &= \frac{\partial A_i}{\partial \bar{P}_i} \frac{d_i \bar{P}_i}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial q_i} \frac{d_i q_i}{dt} = q_i \frac{\partial Y_i(\bar{P}_i)}{\partial \bar{P}_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial y} = \\ &= q_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 - F \psi_i^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + F \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

(при условии, что если $i = 1$, то $j = 2$ и наоборот).

Интегрируя (4) по x и y с соответствующими краевыми условиями и суммируя по i , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint (A_1(\bar{P}_1, q_1) + A_2(\bar{P}_2, q_2)) dx dy = 0, \quad (5)$$

т.е. $\iint (A_1 + A_2) dx dy$ есть инвариант движения.

Из гладкости функции $Y(\bar{P})$ следует, что

$$Y(\bar{P} + q) - Y(\bar{P}) = \frac{\partial Y}{\partial \bar{P}}(\Theta) \cdot q,$$

где $\Theta \in [\bar{P}, \bar{P} + q]$. Следовательно, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \bar{P}_i} \right)_{\min} \iint \frac{q_i^2}{2} dx dy &\leq - \iint A_i(\bar{P}_i, q_i) dx dy \leq \\ &\leq \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \bar{P}_i} \right)_{\max} \iint \frac{q_i^2}{2} dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Складывая неравенства (6) для $i = 1, 2$ и принимая во внимание инвариантность $\iint (A_1 + A_2) dx dy$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \min_i \left\{ \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \bar{P}_i} \right)_{\min} \right\} \frac{1}{2} \|q\|^2 \leq \left| \iint (A_1 + A_2) dx dy \right| = \\ & = \left| \iint (A_1 + A_2) dx dy \right|_{t=0} \leq \max_i \left\{ \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \bar{P}_i} \right)_{\max} \right\} \frac{1}{2} \|q\|_{t=0}^2 \quad (7) \end{aligned}$$

Это неравенство означает устойчивость решения $\bar{P}(y)$ по Ляпунову при монотонной функции $\frac{\partial \bar{P}_i(y)}{\partial y}$.

§ 6. Аппроксимация спектра в задаче Иди

В настоящем параграфе мы исследуем проблему сходимости собственных чисел конечномерных аналогов спектральной задачи (9) §2 к собственным числам дифференциальной задачи (9). Семейство конечно-разностных аналогов задачи (9) зависит, естественно, от способа аппроксимации пространственных производных по x и p . Вначале рассмотрим семейство конечно-разностных аналогов задачи (4) §2, полученное для случая, когда конечно-разностные аппроксимации строятся только для производных по x . Поскольку методологически мы будем сводить конечно-разностную аппроксимацию задачи (4) к проблеме на собственные значения, аналогичной задаче (9), то в первом уравнении (4) мы сразу используем условие геострофичности.

Итак, исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -lv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + lu &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \sigma \tau &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0. \quad (1)$$

В качестве краевых условий по p принимается $\tau = 0$ при $p = 0, p_0$; по x как и ранее, предполагается выполнение условия периодичности всех искомым функций и их производных. В предыдущей главе задача (1) сводилась к проблеме на собственные значения подстановкой решения в виде $\varphi = \varphi(p)e^{ik(x-ct)}$. Поскольку коэффициенты в системе (1) от x не зависят, то конечно-разностная (по x) система будет допускать решение вида $\varphi_n = \varphi(p)e^{ik(n\Delta x - c_\Delta t)}$, где Δx – шаг пространственной сетки (сетка предполагается равномерной), n – номер узла сетки, c_Δ – фазовая скорость решения разностной задачи.

Из вида разностного решения ясно, что взятие конечной разности по x от φ_n эквивалентно умножению φ_n на некоторый параметр α_i , являющийся функцией волнового числа k , Δx и параметров, определяющих порядок аппроксимации разностной схемы и вид сетки.

Рассмотрим класс наиболее употребительных сеток, в которых функции Φ , T и τ определяются в одних и тех же точках (по x). Целесообразность такого выбора диктуется самой системой (1).

В самом общем виде для решения (1) система разностных уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} -lv &= -\alpha_1 ik\Phi, \\ ik\alpha_0(\bar{u} - c_1)v + l\alpha_2 u &= 0, \\ ik\alpha_0(\bar{u} - c_1)T - \sigma\tau + \frac{pl}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \alpha_3 v &= 0, \\ ik\alpha_4 + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c_1 = c_\Delta/\alpha_0$.

Проводя несложные преобразования (как и в случае дифференциальной задачи), систему (2) сводим к уравнению второго порядка по p :

$$(\bar{u}-c_1)\frac{\partial^2\tau}{\partial p^2}-\left(1+\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_0}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial p}\frac{\partial\tau}{\partial p}-(\bar{u}-c_1)\frac{R\sigma_0k^2}{l^2}\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2}\tau=0, \quad (3)$$

$$\tau=0 \quad \text{при} \quad p=0, p_0.$$

Рассмотрим аппроксимации второго порядка, наиболее широко употребляемые в настоящее время.

1. Все искомые функции расположены в одних и тех же точках (рис.6).

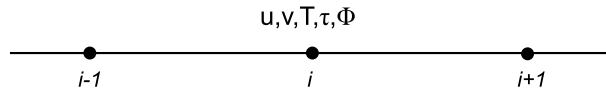


Рис. 6. Расположение сеточных функций на сетке A

Производная по x для всех функций аппроксимируется выражением $\partial\varphi/\partial x \sim (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})/2\Delta x$. На решениях вида

$$\varphi_n = \varphi(p)e^{ik(n\Delta x - c_\Delta t)}$$

это выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} = \varphi_i ik \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \quad (4)$$

Отсюда имеем $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_4 = \sin k\Delta x/k\Delta x$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

Таким образом, для этой разностной сетки уравнение (3) преобразуется к виду

$$(\bar{u} - c_1) \frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial p} - (\bar{u} - c_1) \frac{R\sigma_0 k^2}{l^2} \left(\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right)^2 \tau = 0, \quad (5)$$

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, p_0.$$

Поскольку это уравнение эквивалентно по своему виду уравнению (9) §2, можно сразу записать выражение для c_1 :

$$c_1 = \frac{rp_0}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\tilde{\alpha}^2} (\tilde{\alpha}D(\tilde{\alpha}) - 1)} \right], \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{(R\sigma_0)^{1/2} kp_0}{l}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \alpha.$$

Вспоминая, что $c_\Delta = \alpha_0 c_1$, получаем:

$$c_\Delta = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} c_1.$$

Критерий потери устойчивости имеет вид

$$\tilde{\alpha} < 2,3999. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее случай для длин волн, близких к $2\Delta x$. Из выражения (7) следует, что для волны $2\Delta x$ соотношение (7) всегда выполняется, так как $\tilde{\alpha} = 0$, однако скорость ее роста также равна нулю. Пусть $L = 2\Delta x + \varepsilon\Delta x$, где $\varepsilon \ll 1$. В этом случае

$$k = 2\pi/L \approx \frac{\pi}{\Delta x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \sin k\Delta x \approx \pi\varepsilon/2.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \approx \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \tilde{\alpha} = \alpha\varepsilon/2.$$

Полагая по-прежнему, что ε достаточно мало, находим:

$$1 - (4/\tilde{\alpha}^2)(\tilde{\alpha}D - 1) = -\frac{1}{3} < 0$$

с точностью до величины второго порядка малости по ε . Таким образом, можно заключить, что волны, достаточно близкие к $2\Delta x$, абсолютно неустойчивы. Скорость роста неустойчивых волн рассчитывается по формуле

$$kIm(c_\Delta) = \frac{rp_0 \sin k\Delta x}{2\Delta x} \sqrt{-1 + \frac{4}{\tilde{\alpha}^2}(-1 + \tilde{\alpha}D(\tilde{\alpha}))}.$$

Пусть $\alpha = 1.7$ (это значение α соответствует наиболее неустойчивой волне при фиксированном σ_0). Скорость нарастания такой волны будет описываться формулой $kIm(c) \approx \frac{0,35\pi rp_0}{\Lambda}$. Если $\varepsilon = 2/(N - 1)$ (N — число точек по x), волна с $L = 2\Delta x + \varepsilon\Delta x$, $\Lambda = N\Delta x$ имеет $kIm(c_\Delta) = 0,29rp_0 \frac{\pi}{\Lambda}$, т.е. скорость ее нарастания меньше, чем скорость нарастания наиболее неустойчивой (для дифференциальной системы) волны.

2. Рассмотрим сетку, приведенную на рис. 7.

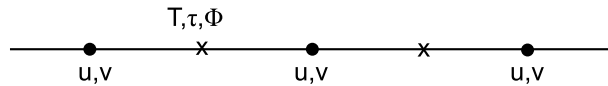


Рис. 7. Расположение сеточных функций на сетке B

Компоненты вектора скорости сдвинуты на полшага по отношению к другим функциям. Если значения функции v в точках, обозначенных крестиками, вычислять как полусумму значений в точках, обозначенных кружками, то получим следующие выражения для параметров α_i :

$$\alpha_0 = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}, \quad \alpha_1 = \sin \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) / \left(\frac{k\Delta x}{2} \right),$$

$$\alpha_4 = \alpha_1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \cos \frac{k\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0} = 1, \quad \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2} = \left[\left(\sin \frac{k\Delta x}{2} \right) / \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \right]^2.$$

Поскольку уравнение для τ будет иметь тот же вид, что и (9) §2, решение представляется формулой (6) при

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sin(k\Delta x/2)}{k\Delta x/2} \alpha.$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае волны становятся более неустойчивыми, чем при решении дифференциальной задачи (в смысле критерия потери устойчивости), однако даже для волн длиной $\sim 2\Delta x$ критерий изменяется не очень существенно. Скорость же нарастания волн длиной $2\Delta x$ по-прежнему равна нулю.

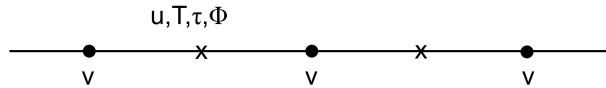


Рис. 8. Расположение сеточных функций на сетке C

3. Для сетки, представленной на рис.8, получаем

$$\alpha_0 = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}, \quad \alpha_1 = \frac{\sin \frac{k\Delta x}{2}}{\frac{k\Delta x}{2}},$$

$$\alpha_2 = \cos \frac{k\Delta x}{2}, \quad \alpha_3 = \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_0.$$

Для этих значений α_i имеем

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0} = 1, \quad \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_2} = \left(\sin \frac{k\Delta x}{2} / \frac{k\Delta x}{2} \right)^2.$$

Таким образом, получаем тот же результат, что и для сетки на рис.6. Полученные соотношения показывают, что в нашем случае аппроксимация второго порядка по Δx дает сходимость собственных чисел разностной задачи к собственным числам дифференциальной также со вторым порядком по Δx :

$$|c_\Delta - c_g| \leq O(\Delta x^2).$$

Действительно, для всех рассмотренных сеток мы имеем

$$\tilde{\alpha} = (1 + C_i k^2 \Delta x^2) \alpha.$$

Подставляя это значение $\tilde{\alpha}$ в выражение для c_Δ , после несложных преобразований получаем:

$$c_\Delta = (1 + C_i k^2 \Delta x^2) \frac{r p_0}{2} (1 \pm \sqrt{q}), \quad (8)$$

где $q = 1 - \frac{4}{\alpha^2} (\alpha D(\alpha) - 1) + \tilde{C}_i k^2 \Delta x^2$. Из соотношения (8) следует, что $|c_\Delta - c_g| \leq O(\Delta x^2)$.

Как мы отметили в §2 задача (9) имеет непрерывный спектр, поэтому при построении численного алгоритма ее решения мы должны требовать сходимость только для точек дискретного спектра, поскольку для конечномерного аналога оператора в задаче §2(9) весь спектр будет дискретным. В случае “подходящей” аппроксимации мы должны ожидать, что два собственных числа будут стремиться к $c_{1,2}$ при $\Delta p \rightarrow 0$; остальные собственные числа будут принадлежать непрерывному спектру задачи §2(9).

Рассмотренная задача с $\sigma_0 = const$ в определенном смысле является уникальной, поскольку неустойчивость решения в ней в квазигеострофическом приближении определяется краевым условием. Действительно, псевдопотенциальный вихрь основного потока

$$\bar{\Omega} \equiv \Delta \bar{\psi} + \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

будет постоянным по широте, так как

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = 0,$$

поскольку $m^2 = const$, $\partial \bar{u} / \partial p = const$. Это означает, что необходимое условие неустойчивости в свободной атмосфере не выполняется. Если m^2 есть функция высоты, то в общем случае необходимое условие может выполняться и для свободной атмосферы с $\partial \bar{u} / \partial p = const$.

В случае переменного по вертикали σ_0 уже сложно ввести безразмерный параметр типа α , поэтому мы будем исследовать устойчивость решений для различных волновых чисел k при $\bar{\gamma}$, соответствующем среднему градиенту в тропосфере, и при $\gamma_a - \bar{\gamma}$, меняющемся скачком на различных уровнях, имитируя наличие процесса конденсации.

Заметим, что при $\sigma_0 = const$ собственные функции (решение задачи (9)), являющиеся функциями только параметра α , не зависят явно от волнового числа и имеют максимум на среднем уровне, а в случае $\sigma_0 = \sigma_0(p)$ картина принципиально другая. Расчет собственных функций для $\gamma_a - \bar{\gamma} = const$ показал, что с увеличением волнового числа максимум собственной функции сдвигается в сторону нижнего уровня (поверхности Земли). Для длины L , равной 1000 км, практически вся энергия сосредоточена в нижнем 200 гПа слое. Отсюда следует, что на возбуждение этой волны будет влиять главным образом стратификация именно в этом слое. Следовательно, процессы конденсации (если они протекают в ограниченном по вертикали слое атмосферы) будут по-разному воздействовать на развитие волн различных масштабов. Изложенная гипотеза была проверена прямым численным расчетом.

В табл. 2 представлена скорость нарастания неустойчивых мод при скачкообразном изменении параметров статической устойчивости σ_0 в соответствующих интервалах для

Таблица 2

Длина волны, км	Координаты скачка σ_0 , гПа									
	-	927-855	927-782	927-709	637-564	709-491	491-273	418-237	346-273	
1000	0,45375	1,17708	1,62023	1,49523	0,45534	0,44430	0,45381	0,45360	0,45356	
2000	1,81133	1,99191	2,54561	2,97880	1,90104	2,74187	1,62759	1,74321	1,79063	
3000	3,10569	3,14189	3,3586	3,78401	3,86640	4,30617	2,60427	2,91243	3,03814	
4000	4,22931	4,24015	4,31945	4,55072	4,82186	5,14917	4,30659	4,16914	4,19068	

Таблица 3

Длина волны, км	Координаты скачка σ_0 , гПа									
	-	927-855	927-782	927-709	637-564	709-491	491-273	418-237	346-273	
1000	0,45375	1,80224	2,63226	3,25827	0,45667	0,43072	0,45443	0,45375	0,45360	
2000	1,81133	2,22333	3,10776	3,36948	3,50226	4,87837	1,39752	1,65104	1,76325	
3000	3,10569	3,18028	3,62243	4,33435	4,65578	5,59970	1,63680	2,60577	2,95360	
4000	4,22237	4,25716	4,42048	4,85828	5,33593	5,99938	4,80476	4,07686	4,14940	

разных длин волн. Размер скачка составляет $\sigma_0/2$. Аналогичные зависимости для размера скачка $-19/20\sigma_0$ представлены в табл.3.

Из табл. 2,3 нетрудно видеть, что изменение стратификации в нижнем слое (925-855 гПа), решающим образом сказывается на изменении скорости нарастания только волны длиной 1000 км; скорости нарастания энергии остальных волн остаются практически неизменными (некоторое увеличение скорости наблюдается для волны $L=2000$ км). Изменение стратификации в самых верхних слоях, естественно, слабо влияет на все волны. Изменение стратификации в средней тропосфере сильно сказывается на росте волн с $L=2000, 3000$ км и уже не сказывается на росте самой короткой волны. Любопытно отметить, что, снижая параметр статической устойчивости, практически до нуля (скачок $-19/20\sigma_0$) в нижней тропосфере, можно получить (для данной задачи) практически одинаковые скорости роста энергии для всей группы волн. К сожалению, данная задача не позволяет исследовать корректно скорости роста длинных и ультрадлинных волн (напомним, что в этой задаче не учитывается β -эффект).

В то же время следует отметить, что для данной (стандартной) стратификации скорость нарастания неустойчивых мод (без скачков в параметре стратификации) падает с ростом волнового числа. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для описания неустойчивых коротких волн необходимо хорошее разрешение в нижней тропосфере; это позволяет корректно описать вертикальную структуру неустойчивой моды. Более того, специальные требования возникают и при описании физических процессов, ответственных за формирование стратификации температуры и параметра статической устойчивости, в частности процесса конденсации.

§ 7. Решение задачи на собственные значения для трехмерных бароклинных уравнений гидротермодинамики атмосферы

По-видимому, впервые задача о решении проблемы на собственные значения для полных уравнений гидротермодинамики атмосферы, линеаризованных относительно климатического состояния, была сформулирована в работе [51]. В этой работе предлагалось собственные функции линеаризованного оператора выбирать в качестве подходящего базиса для формулирования малопараметрической модели прогноза погоды. В дальнейшем это направление развивалось в работах [52, 58]. В этих работах методика расчета собственных функций оператора, линеаризованного относительно климатического состояния, основывалась на конечно-разностной аппроксимации исходных полных уравнений гидротермодинамики атмосферы. В результате матрица конечномерного оператора задачи получается хотя и разреженной, но большой размерности, и решение полной проблемы на собственные значения на ЭВМ представляется задачей достаточно сложной.

В результате авторы работ [52, 58] предложили приближенный метод нахождения лишь тех собственных функций, которые по их мнению, представляют интерес. Идея метода заключается в том, что ищутся не сами собственные функции, а их проекции (галеркинские приближения) на подпространство, натянутое на конечное число естественных ортогональных составляющих полей метеоэлементов. В результате задача сводится к полной проблеме на собственные значения для матриц небольшой размерности, которую можно эффективно решить. Однако априорных оценок точности расчета собственных функций и собственных чисел в данных работах не приводится, так что сказать что-либо о точности расчета можно лишь по “физической интерпретации”

полученных результатов и сравнению с расчетами для баротропной задачи, для которой построены методы с априорными оценками и с расчетами, проведенными другими авторами с помощью иных методов.

Еще один подход для расчета собственных функций и чисел был использован в работе [104]. В основу расчета были положены квазигеострофические уравнения, линеаризованные относительно трехмерного климатического состояния.

Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= -J(\psi, \Delta \psi + l) - l \Delta \chi + F_\psi, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -J(\psi, T) + \sigma \tau + F_T, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{RT}{p}, \\ \Delta \Phi &= \nabla(l \nabla \psi), \\ \frac{\partial \tau}{\partial p} &= -\Delta \chi, \end{aligned} \tag{1}$$

где χ – потенциал скорости; F_ψ, F_T – функции, описывающие источники и диссипацию в уравнениях для функции тока и переноса тепла.

Как уже упоминалось выше, система (1) линеаризовалась относительно трехмерного климатического состояния.

Для аппроксимации “вертикальных” операторов использовался метод конечных разностей (число слоев по вертикали менялось от 2 до 5). Далее, для решения проблемы на собственные значения использовался метод Галеркина, где в качестве базисных функций брались сферические гармоники.

Коротко остановимся на результатах расчетов, приведенных в работе [104] для двуслойной модели.

Все собственные функции условно можно разбить на несколько классов. К первому классу относятся функции, максимумы модулей которых расположены вдоль штормовых треков, инкременты нарастания велики и вертикальные профили свидетельствуют об их бароклинной структуре. Эти функции имеют монополярную структуру по горизонтали.

Ко второму классу отнесены собственные функции, имеющие дипольную структуру с максимальными амплитудами вверх по течению от областей, в которых наиболее часто наблюдаются блокирующие ситуации. В работе [104] этим собственным функциям приписывается “ответственность” за начало развития блокирующих ситуаций; другими словами, начало развития блокинга отождествляется с возбуждением этих нормальных мод.

К третьему классу относятся стационарные неустойчивые моды, по своей структуре напоминающие тихоокеанские – северо-американские колебания [151]. Эти моды по существу эквивалентно-баротропны.

К четвертому классу относятся низкочастотные моды (с периодами порядка тридцати–сорока дней), близкие к другим структурам, наблюдаемым на картах одноточечных корреляций [151], например Северо-Атлантические колебания. Важно отметить, что моды, принадлежащие к третьему и четвертому классам, близки к соответствующим собственным функциям, полученным для линеаризованного оператора баротропной задачи, что в некотором смысле оправдывает использование в качестве первого приближения для изучения устойчивости квазибаротропных режимов атмосферной циркуляции баротропных уравнений.

Теоретическое объяснение возможности возникновения монополярных (локальных) собственных мод в зонально-несимметричном бароклинном потоке дано в работе [136]. Принципиальный вопрос, который возникает при изуче-

нии устойчивости зонально-несимметричных атмосферных потоков, касается в первую очередь характеристик, определяющих скорости нарастания неустойчивых мод. Например, хорошо известно, что при исследовании устойчивости зонально-симметричных потоков эти характеристики инвариантны относительно значения среднего по вертикали зонального потока (величина этого потока входит только в значение фазовой скорости). Однако в случае зонально-несимметричных потоков картина принципиально другая. То, что в зонально-несимметричном потоке средняя по вертикали скорость должна влиять на скорость нарастания неустойчивой моды, нетрудно понять, поскольку эта скорость определяет время нахождения волнового пакета в зоне с максимальной бароклинностью.

Основные результаты, полученные в работе [136], можно сформулировать следующим образом:

1) скорость роста локальной неустойчивой моды определяется абсолютной скоростью роста при максимальной бароклинности (а не усредненными характеристиками);

2) пик локальной моды перемещается на восток, если усредненная по вертикали зональная скорость ($\bar{u} > 0$) увеличивается;

3) скорость роста локальной моды уменьшается, если \bar{u} увеличивается ($\bar{u} > 0$);

4) контраст между максимумом и минимумом бароклинности определяет протяженность локализации локальной собственной моды: чем больше контраст, тем больше локализация. С точки зрения этих результатов для существования локальной неустойчивой собственной моды очень важно расстояние между двумя последовательными максимумами бароклинности. Отметим, что расстояние между выходом бароклинной зоны вдоль восточного берега Северной Америки и входом бароклинной зоны вдоль восточного берега Азии составляет примерно 180° , а рас-

стояние между выходом Тихоокеанской бароклинной зоны и входом Североатлантической – около 90° . Следовательно, Атлантический сектор является более предпочтительным для формирования локальной неустойчивой моды, чем Тихоокеанский. Это замечание очень важно, поскольку, как мы отметили выше, скорость нарастания локальных мод определяется максимальными значениями бароклинности.

Глава 4

Предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов

§ 1. Природа низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции

Исследование природы низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции является в некотором смысле построением физического фундамента для долгосрочного прогноза погоды.

Мы определим низкочастотную изменчивость атмосферных процессов как изменчивость с характерными временными масштабами более 10 суток. Эта граница кажется вполне естественной, если принять во внимание, что природа высокочастотной изменчивости в средних широтах хорошо понята – это формирование вихрей за счёт бароклинной неустойчивости, механизмы которой были рассмотрены выше. Поскольку цикл жизни бароклинного вихря составляет величину ~ 7 суток, то выбранная граница между двумя видами изменчивости кажется вполне разумной. Важно отметить, что географически область с максимальной высокочастотной и низкочастотной изменчивостью разделены. Область максимума высокочастотной изменчивости естественным образом связана с траектори-

ями циклонов, а область максимальной низкочастотной изменчивости сдвинута на северо-восток и совпадают с областями формирования блокирующих образований, областей, где циклонические вихри уже становятся квази-баротропными.

Очень важным представляется и тот факт, что максимум низкочастотной изменчивости (для высоты 500 мб поверхности в зимние сезоны) примерно в два раза выше, чем максимум высокочастотной изменчивости. Это означает, что в процессе формирования низкочастотной изменчивости важную роль играет баротропная неустойчивость, или другими словами, что баротропные преобразования энергии по существу компенсируют диссипацию энергии в пограничном слое.

Какова же предполагаемая природа низкочастотной изменчивости атмосферных процессов? В первую очередь, мы должны области возможных механизмов формирования низкочастотной изменчивости разделить на две: внутреннюю (атмосферную) и внешнюю по отношению к атмосфере.

Чтобы отделить роль внешней компоненты, мы должны понять, какие внутренние временные масштабы существуют в атмосфере за счёт линейных и нелинейных взаимодействий. Как мы уже упомянули выше, природа процессов с масштабами порядка недели в средних широтах связана с формированием и разрушением бароклиных вихрей. Можно выделить временной масштаб (так называемый индекс цикла), связанный с нелинейным механизмом формирования температурного градиента в средних широтах и переноса тепла к полюсу бароклиными вихрями. Существует гипотеза существования режимов атмосферной циркуляции, связанная, по-видимому, с характерными временами преобразования энергии в процессе реализации баротропной неустойчивости – это масштабы времени порядка месяца.

Периоды 30–60 дней связаны с тропическими волнами Юлиана-Маддена, природа которых объясняется взаимодействием кучевой конвекции с волнами Кельвина. Далее мы имеем годовой ход и квазидвухлетнюю цикличность. Следует сразу сказать, что квазидвухлетние колебания зональной скорости в экваториальной стратосфере не являются следствием годового хода – совпадение квазипериода этого явления с удвоенным периодом годового хода является чисто случайным. Квазидвухлетняя цикличность является наиболее ярким примером нелинейного взаимодействия волн и зонального потока в атмосфере [111].

Принимая всё это во внимание, можно сделать вывод, что внешние воздействия на атмосферу могут быть отделены только на временных масштабах в 10 лет и более. Это вовсе не означает, что внешние процессы по отношению к атмосфере не важны на меньших масштабах (например, процессы в океане), это означает, что эти процессы следует всегда рассматривать как процессы взаимодействия.

Первая гипотеза, которую необходимо обсудить, представляет из себя так называемую 0-гипотезу: низкочастотная изменчивость объясняется откликом циркуляции на стохастическое воздействие высокочастотных вихрей. Другими словами, низкочастотная изменчивость есть просто красный шум, и его формирование можно описать линейным динамико-стохастическим уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} + A\varphi = f, \quad (1)$$

где f – δ -коррелированный по времени случайный процесс. Поскольку оператор $\frac{d}{dt} + A$ превращает белый шум в коррелированный красный шум, то система (1) имеет большой смысл при изучении предсказуемости атмосферных процессов, на чём мы остановимся в следующих параграфах. Поскольку низкочастотная изменчивость квазибаротропна, то под оператором A можно в первом приближении

понимать оператор, полученный линеаризацией баротропных уравнений относительно зонально-несимметричного потока (здесь, правда, есть принципиальная проблема описания диссипации). В этом случае мы можем сравнить естественные ортогональные функции, решая проблему на собственные значения для автоковариационных матриц, полученных по реальным данным и матриц, полученных из уравнения (1). Напомним, что естественные ортогональные функции можно рассматривать как классификацию низкочастотной изменчивости по энергии – распределение энергии по функциям описывается распределением собственных чисел автоковариационной матрицы.

Для частотного диапазона $(\omega, \omega + \delta\omega)$ систему (1) можно переписать в виде [29]:

$$i\omega\varphi_\omega + A\varphi_\omega = f_\omega, \quad (2)$$

или

$$(A + i\omega E)\varphi_\omega = f_\omega,$$

так что

$$\varphi_\omega = (A + i\omega E)^{-1}f_\omega.$$

Автоковариационная матрица для процесса φ_ω будет иметь вид:

$$\overline{\varphi_\omega \cdot \varphi_\omega^*} = (A + i\omega E)^{-1} \overline{f_\omega f_\omega^*} (A + i\omega E)^{-1*},$$

где η^* – комплексно-сопряжённые транспонированные матрицы и векторы. Если положить, что f есть белый шум по пространству, так что $f_\omega \cdot f_\omega^*$ есть скалярная матрица (для простоты записи будем считать её единичной), то

$$\begin{aligned} C = \overline{\varphi_\omega \cdot \varphi_\omega^*} &= [(A^* + i\omega E)(A + i\omega E)]^{-1} = \\ &= [A^*A + \omega^2 E + i\omega(A^* - A)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) видно, что при низких частотах матрица C будет близка к $(A^*A)^{-1}$. Отсюда следует, что при низких частотах собственные векторы матрицы C с максимальными собственными числами должны быть близки к собственным векторам матрицы A^*A , соответствующим минимальным собственным числам. Действительно, численные эксперименты [77] показали, что это утверждение справедливо, однако, только для векторов, начиная со второго (анализировалась динамика на 300 мб поверхности). Первый, наиболее энергетически значимый вектор, можно получить лишь считая, что его возбуждение по пространству не есть белый шум. Этот факт подтверждается и другими методами анализа. Поскольку первый естественный ортогональный вектор (в данном случае вектор с наибольшей дисперсией) близок в Северном полушарии к так называемым арктическим осцилляциям – АО, структуры в высшей степени зонально симметричной, которая поддерживается и разрушается вихревым потоком [7], то такой результат кажется вполне естественным. Вторая естественная ортогональная функция близка по своей структуре к структуре РНА – Тихоокеанским Северо-Атлантическим колебаниям, полученным методом одноточечных корреляций [151]. В то же самое время эта структура близка к структуре "наиболее неустойчивого" собственного вектора оператора A , полученного линеаризацией баротропного уравнения вихря относительно зонально-несимметричного потока на уровне 300 мб [145]. Это означает, что в процессе формирования этой структуры существенную роль играет баротропная неустойчивость, так что приближение белого шума по пространству в этом случае представляется вполне допустимым.

Таким образом, всё вышесказанное говорит о том, что 0-гипотеза имеет все права на жизнь, более того, можно с уверенностью говорить, что большую (если не опреде-

ляющую) часть низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции можно объяснить с помощью линейной динамико-стохастической модели.

Вторая гипотеза связана с предположением, что атмосферная циркуляция в средних широтах Северного полушария многорежимна. Сама идея восходит к работе [86], однако здесь существует несколько моментов, ставящих под сомнение это предположение. Во-первых, никому ещё не удавалось получить для крупномасштабных характеристик атмосферной циркуляции ярко выраженное двумодальное распределение. Строго говоря, двумодальные распределения в некоторых случаях получались, но уровень двумодальности был очень низок [152]. Далее, в теоретических работах, подобных [86], двурежимность получилась в моделях лишь с малым числом степеней свободы, атмосфера же к этому классу систем, очевидно, не относится (см. оценки размерности аттракторов для баротропных моделей, глава 2).

Остановимся более подробно на механизмах формирования режимов циркуляции геофизических систем. Прежде всего нужно дать формулировку, что же мы понимаем под режимами циркуляции. Здесь мы последуем простым формулировкам, данным в работе [127]. Пусть нам дана нелинейная динамическая система

$$\frac{du}{dt} = B(u), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (4)$$

которая обладает глобальным аттрактором A . Будем считать, что на аттракторе A можно выделить две области (конечно, число областей может быть и больше), которые сильно отличаются своими циркуляционными характеристиками. Обозначим их через C и D . Эти области могут быть сами локальными аттракторами со своими областями притяжения, так что траектория, попавшая, например, на C ,

навсегда в ней останется. Другими словами, переходов между C и D не существует.

Мы будем говорить, что система (1) обладает двумя режимами циркуляции, если

- 1) динамика на A хаотична и эргодична,
- 2) среднее время жизни траекторий на C и D много больше чем характерные времена изменчивости циркуляционных характеристик, которые наблюдаются на C и D .

Другими словами, циркуляция организована так, что система подолгу находится на C и D и редко переходит из C в D или из D в C . Если время жизни траекторий на C или D сравнимо с временем изменчивости циркуляции на C и D , то считать C и D режимами уже становится затруднительным.

Условие хаотичности динамики, вообще говоря, ниоткуда не следует – оно чисто экспериментальное и интуитивно понятное.

Примером таких режимов в атмосфере могут служить, например, квазидвухлетние колебания зонального ветра в экваториальной стратосфере, которые позволяют в определенном смысле выделить различные формы динамики планетарных волн в стратосфере. Как было обсуждено в [127], двуимодальность распределения важных характеристик циркуляции является достаточным условием двуимодальности, но, по-видимому, не является необходимым. Речь, конечно, должна идти именно о важных характеристиках, ибо существуют классические примеры двуимодальности: если величина u имеет гауссово распределение, то u^3 имеет двуимодальное распределение. Другими словами, мы всегда можем найти характеристику, которая имеет двуимодальное распределение.

Сейчас мы остановимся на результатах работы [97], в которых, по нашему мнению, механизм возникновения режимов циркуляции представлен наиболее ясно.

В качестве примера будет рассмотрена простая модель баротропного океана в прямоугольной области с идеализированным форсингом.

Уравнение модели имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega - \sigma \omega + f, \quad (5)$$

$$\omega = \Delta \psi.$$

Уравнение (5) рассматривается в квадрате со стороной $L=4000$ км на β -плоскости: $l = l_0 + \beta y$. Предполагается, что рассматриваемая область располагается в середине Атлантического океана.

Краевые условия на границах имеют вид

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0.$$

Значения параметров модели следующие:

$$l_0 = 9,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{сек}}, \quad \beta = 2 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{м} \cdot \text{сек}},$$

$$f = -k \frac{2\pi\tau_0}{\rho H L} \sin \frac{2\pi y}{L}, \quad \text{где}$$

$$\tau_0 = 1.1 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}, \quad \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad H = 500 \text{м},$$

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{сек}}, \quad \mu = 1250 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$$

k – параметр, который можно задавать произвольно, меняя норму f .

Напомним (см. главу 2), что если число Грассгофа, которое можно менять, меняя норму f , мало, то система (5) имеет аттрактором стационарную точку. Исследовать структуру аттрактора системы (5) при увеличении числа Грассгофа в настоящее время не представляется возможным, поэтому

в [97] была построена конечномерная аппроксимация уравнения (2) на основе метода конечных элементов с полиномиальными элементами 2-й степени:

$$p_i(x, y) = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + d_i x + l_i y + f_i.$$

Область триангулировалась на 92 треугольника с 211 узлами. Разрешение при этом менялось от ~ 100 км у западной границы, где формируются струи, до ~ 500 км у восточной границы.

Анализ численных экспериментов с этой моделью показал следующее.

При малых нормах правой части наблюдается одно стационарное решение с функцией тока, антисимметричной относительно оси x , проходящей через середину квадрата, так что струя образовывалась строго вдоль этой оси.

При увеличении нормы f происходила бифуркация типа "вилки": вместо одного устойчивого решения образовывалось три: исходное становилось неустойчивым и появлялось два новых устойчивых: в одном струя имела северо-восточное направление, во втором – юго-восточное. Обе эти стационарные точки были локальными аттракторами со своими областями притяжения, разделенными сепаратрисой. При дальнейшем увеличении нормы f наблюдалась бифуркация Хопфа – стационарные точки превращались в устойчивые предельные циклы. Дальнейшее увеличение нормы f приводило к образованию новых циклов согласно сценарию Фейгенбаума – сценарию удвоения цикла. После нескольких удвоений наблюдался переход к хаосу. При разумных величинах нормы f ($k \sim 1$) в хаотической динамике на аттракторе четко прослеживались два режима: первый соответствовал динамике, напоминающей динамику в некоторой окрестности описанной выше первой стационарной точке, второй – в окрестности второй. Переход из одного режима в другой наблюдался редко с временными масшта-

бами порядка 100 лет. Во временном спектре энергии при этом четко прослеживались пики, соответствующие бифуркационным периодам. Следует отметить, что размерность аттрактора, соответствующая этой динамической картине была небольшой – $d_A \sim 4.6 \div 5$.

Мне представляется, что ярко выраженные режимы циркуляции (согласно определению, которое было приведено выше) могут наблюдаться только на аттракторах малой размерности. Интуитивно эта гипотеза кажется вполне правдоподобной по следующим причинам.

Согласно картине перехода динамики на аттракторе к хаосу, “память” аттрактора об этом переходе четко прослеживается, если мы недалеко ушли от нормы правой части, при которой существовали локальные аттракторы. Другими словами, интуитивная идея заключается в следующем: режим циркуляции – это следствие существования локальных аттракторов при меньших значениях возбуждающей силы. Если мы воспользуемся идеей аппроксимации аттрактора периодическими неустойчивыми решениями [120], то число необходимых периодических решений при увеличении размерности аттрактора должно расти, что естественно должно сглаживать временной спектр мощности, исключая необходимое условие существования режимов – разделение характерных времен динамики при определенном режиме и времени перехода из одного режима в другой. Оценки размерности аттракторов даже для двуслойных квазигеострофических моделей атмосферной динамики при разумных внешних возбуждениях дают такие большие величины, что вероятность существования ярко выраженных режимов представляется очень маленькой.

Существует одна возможность существования режимов атмосферной циркуляции (хотя и не очень ярко выраженная), на которой мы уже останавливались раньше. Речь идет о региональных режимах, которые возможны в от-

дельных регионах, динамика в которых в определенной степени является “захваченной”. В этих регионах можно, по-видимому, ввести понятие региональной (локальной) размерности, которая конечно же окажется и оказывается небольшой. К таким регионам в первую очередь можно отнести экваториальную динамику (квазидвухлетнюю цикличность зонального ветра в экваториальной атмосфере), явление Эль-Ниньо в тропиках Тихого океана, двумерность системы Куроисио и некоторые другие феномены в атмосфере и океане. В определенном смысле их воздействие можно рассматривать как внешнее по отношению к динамике атмосферы средних широт.

Сделаем еще несколько полезных замечаний о стационарных и периодических решениях конечномерных аппроксимаций системы (1).

Имеет место следующее утверждение [115].

Утверждение.

Пусть нам дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^h}{dt} = B_h(u^h), \quad u^h \in R^N \quad (6)$$

и пусть $B_h(u^h)$ достаточно гладкая функция, такая что

$$(B_h(u^h), u^h) < 0 \quad \text{для всех} \quad |u^h| \geq r$$

$$\text{и} \quad B_h(u^h) \neq 0 \quad \text{для} \quad |u^h| = r.$$

Тогда система (6) имеет по крайней мере одно стационарное решение. Число стационарных решений, таких что якобиан $\left| \frac{\partial B_j}{\partial u_i} \right| \neq 0$ нечетно: $M = 2m + 1$. При этом среди всех M решений по крайней мере m решений неустойчивы по Ляпунову.

В работах [63, 41] показано, что широко употребляемые аппроксимации системы (1) удовлетворяют условиям этой теоремы. Известно также, что если мы имеем аппроксимацию (1) с $u^h \in R^N$, то число стационарных решений системы (3) ограничено величиной $K = 2^N$. Число же периодических решений может быть бесконечным даже для конечной величины N .

Поскольку все стационарные точки и периодические решения принадлежат глобальному аттрактору, то из условия, что динамика на аттракторе хаотична, следует, что все эти решения неустойчивы по Ляпунову. Формально из условия, что периодических решений может быть много больше, можно сделать вывод, что аппроксимация аттрактора периодическими решениями кажется более предпочтительной. Известно, что если система принадлежит классу гиперболических систем Аносова (нет нулевых показателей Ляпунова), то периодические решения всюду плотны на аттракторе, и аппроксимация аттрактора ими становится задачей обоснованной. Зная периодические решения и их характеристики устойчивости, можно построить меру на аттракторе из предположения, что траектория проводит в окрестности периодического решения время, обратно пропорциональное степени неустойчивости этого решения, и используя эту меру вычислять чувствительность модели к малым внешним воздействиям [120].

Перейдём теперь к последней из наиболее существенных гипотез связанной с внешними по отношению к атмосфере аномальными источниками, например, с аномалиями поверхностной температуры океана (АТПО). Что касается средних широт, то многочисленными численными экспериментами по изучению чувствительности атмосферной циркуляции к АТПО в средних широтах было показано, что АТПО в средних широтах (по крайней мере, в зимний период) на внутрисезонных и межгодовых масштабах не могут

быть решающим фактором в формировании аномалий атмосферной циркуляции [131, 122, 150, 133, 13, 20].

Более сложной и неясной проблема становится в переходные сезоны [47]. Наиболее ярко роль АТПО прослеживается в тропиках. Этот процесс был тщательно изучен в рамках программы ТОГА (Тропический океан и глобальная атмосфера), фундаментом которой было изучение процесса Эль-Ниньо. Было показано, что центральным механизмом формирования отклика на АТПО в тропиках является механизм волнового отклика (через цуг квазистационарных волн Россби от источника завихренности в тропиках, возникающего из-за сдвига источников нагревания). На этот волновой отклик накладывается, по-видимому, и механизм баротропной неустойчивости зонально-несимметричного потока в средних широтах [145]. Этот механизм отклика достаточно подробно изложен нами в предыдущих параграфах. В самом формировании АТПО центральную роль играет распространение волн Кельвина в океане, как волнового отклика на сбой приземного ветра в западной части тропиков Тихого океана. Так или иначе, проблема предсказуемости этого отклика усложняется тем, что мы имеем дело, как отмечалось выше, с типичной проблемой взаимодействия атмосферы и океана.

Остановимся более подробно на проблеме отклика атмосферной циркуляции на аномалии поверхностной температуры океана. Прежде всего отметим, что динамический отклик атмосферной циркуляции на АТПО в средних широтах и тропиках принципиально различен. Это связано с тем, что аномальный источник нагревания от АТПО в средних широтах мелкий, он локализован в пограничном слое атмосферы и вызван аномальным потоком тепла. Этот аномальный источник компенсируется аномалией меридионального потока тепла. Аномальный источник нагревания в тропиках как правило глубокий компенсируется адиабатическим

охлаждением (нагреванием) за счет вертикальных движений [112].

Если мы напишем уравнение для T' , линеаризованное относительно состояния $\bar{T} = \bar{T}(y)$ в следующем виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \sigma w' = \varepsilon',$$

то в средних широтах главными членами будут $v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ и ε' , а в тропиках – $\sigma w'$ и ε' . Отсюда следует, что динамический отклик на ε' будет разным для средних и низких широт.

Мы будем обсуждать главным образом отклик атмосферы на АТПО в средних широтах по той причине, что теория отклика глобальной атмосферы на АТПО в тропиках была уже нами изложена ранее – это теория распространения квазистационарных волн Россби. При исследовании проблемы отклика атмосферной циркуляции на АТПО в средних широтах возникают несколько принципиальных вопросов именно в силу того, что этот отклик, как уже было сказано выше, не является ярко выраженным из-за малости аномального источника нагревания. Сформулируем эти вопросы:

1. Каковы структуры отклика (баротропная или бароклинная) на типичные АТПО? Различна ли эта структура на различных временных масштабах?

2. В процессе взаимодействия атмосферы и океана является ли атмосфера “ведущей”?

В этой связи важной становится проблема обратной связи: формируется ли отклик таким образом, что компенсирует аномальную атмосферную циркуляцию или он поддерживает (усиливает) её? Другими словами, в процессе взаимодействия атмосферы и океана в средних широтах какой вид обратной связи реализуется: положительный или отрицательный?

3. Различны ли механизмы взаимодействия в различные сезоны? Этот вопрос очень важный, ибо энергия атмосферной циркуляции в различные сезоны существенно различна.

Далее мы кратко изложим основные результаты, полученные различными авторами с помощью численных экспериментов с моделями общей циркуляции атмосферы (эксперименты по чувствительности) и совместными моделями общей циркуляции атмосферы и океана для региона Северной Атлантики. Прежде всего мы покажем, что даёт обработка реальных данных по выделению максимально скоррелированных (сковариированных) структур в характеристиках атмосферной циркуляции в данном регионе и АТПО.

Одной из первых работ в этом направлении была работа [24], в которой с помощью метода сингулярного разложения ковариационной матрицы (SVD-метода) на основании данных ПГЭП были получены скоррелированные распределения АТПО и источников нагревания. Были выделены две структуры в поле АТПО – дипольная и монополярная, которые были связаны с соответствующими аномалиями источников нагревания, причём структура источников нагревания, связанная с дипольной структурой АТПО, явно указывала на наличие шторм-трека. К недостаткам этой работы следует отнести явно недостаточную длину ряда наблюдений. В последующие годы были построены на основании среднемесячных данных, например, данных COADS и данных реанализа различного рода связанные структуры атмосферной циркуляции и АТПО. В частности, на приведенном рисунке 9, для зимних условий выделены наиболее значимые моды для H500 и АТПО региона Северной Атлантики (рисунок взят из работы [13]). Важно подчеркнуть, что максимальная ковариация была получена с полумесячным сдвигом, при котором атмосфера была “ведущей”. Особенно ярко этот факт выражен для первой моды.

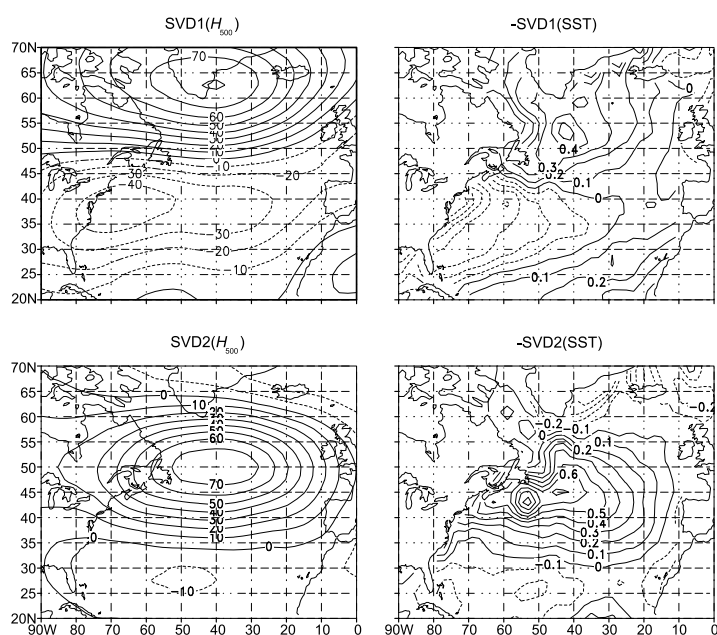


Рис. 9. Пространственное распределение двух первых связанных SVD мод между аномалиями (с полумесячным сдвигом) H_{500} и ТПО, полученные по данным наблюдений NCEP/NCAR и COADS соответственно для зим 1946-1987гг. Значения аномалий даны в метрах, а ТПО в $^{\circ}\text{C}$.

В ряде работ [133] было сделано предположение, что монополярная мода в Северной Атлантике может отражать и океаническое воздействие на атмосферу, однако, по нашему мнению, убедительных доказательств этому предположению до сих пор не получено.

Если просуммировать все выводы, сделанные в многочисленных работах по исследованию чувствительности атмосферной циркуляции к АТПО в средних широтах, то эти результаты условно можно разбить на четыре группы:

1. В атмосфере нет значимого отклика на АТПО.

2. Отклик атмосферы квазибаротропен, причём в отклике выражена отрицательная обратная связь – динамический отклик подавляет аномалию ТПО.

3. Отклик бароклинен, у поверхности выражена отрицательная обратная связь. Этот результат сильно “коррелирует” с теорией динамического отклика атмосферы на мелкий источник нагревания [112].

4. Отклик в атмосфере баротропен с выраженной положительной обратной связью, т.е. аномальная динамика атмосферы поддерживает АТПО.

Строго говоря, только результаты четвертой группы работ дают основание предполагать, что АТПО в средних широтах могут оказывать значимое влияние на циркуляцию атмосферы на межгодовых временных масштабах, однако, убедительных доказательств реализации такого механизма в реальной атмосфере в настоящее время нет.

§ 2. Потенциальная предсказуемость первого и второго рода

Формулирование понятия предсказуемости (в частности, потенциальной предсказуемости) будем проводить для некоторой конечномерной модели атмосферы:

$$\frac{du}{dt} = B(u), \quad u \in R^N, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

Мы будем предполагать, что система (1) диссипативна и обладает глобальным хаотическим аттрактором. Это означает, что траектория системы (1) на ее аттракторе неустойчива по Ляпунову. Будем также считать, что начальные состояния u_0 принадлежат аттрактору системы. Система (1) генерирует на своем аттракторе инвариантную меру, которую мы всегда будем считать эргодической, и, следовательно, единственной.

Мы будем рассматривать два вида предсказуемости, которые мы назовём предсказуемостью первого и второго рода. Под предсказуемостью первого рода мы будем понимать следующее. Нам необходимо рассчитать неустойчивую по Ляпунову траекторию системы – дать прогноз. У нас имеется два сорта ошибок. Во-первых, нам неизвестны точно начальные данные, во-вторых, нам неизвестна точно идеальная модель атмосферы (если такая существует). Предположим, что модель атмосферы мы знаем точно, а будем исследовать только проблему ошибок начальных данных. Самый естественный приём – задать в начальный момент некоторое распределение начальных данных, другими словами, некоторое их множество конечной меры. Под действием оператора модели (поскольку он неустойчив) траектории, выпущенные из каждой точки этого множества будут разбегаться и перемешиваться на аттракторе системы.

Пусть в начальный момент времени u_0 сосредоточены на множестве с мерой μ_0 , которая со временем будет эволюционировать, превращаясь в $\mu(t)$.

Предположим, что имеется теорема сходимости: $\mu(t) \rightarrow \bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ – инвариантная эргодическая мера. Очевидно, что когда при достаточно большом $t = T_\varepsilon$ мера $\mu(t)$ попадёт в ε -окрестность меры $\bar{\mu}$, мы потеряем практически всю информацию о множестве начальных данных с мерой μ_0 . Это время T_ε мы будем называть временем потенциальной предсказуемости первого рода. Ниже мы формализуем его более строго при некоторых добавочных предположениях. Нужно ввести, конечно, какую-нибудь количественную характеристику близости $\mu(t)$, чтобы иметь критерий полезного прогноза.

Итак, центральным моментом исследования этой проблемы является доказательство существования эргодической меры и теоремы сходимости к ней произвольной начальной меры. Эта задача в общем случае невероятно

сложна, поскольку генерируемая на аттракторе мера может иметь сложную негладкую структуру. Чтобы исключить эту трудность, будем использовать метод так называемой ε -регуляризации [154]. Суть метода состоит в следующем.

Вместо системы (1) будем рассматривать динамико-стохастическую систему:

$$\frac{du}{dt} = B(u) + \varepsilon(t), \quad (2)$$

где ε – δ -коррелированный по времени гауссов случайный процесс:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_i(t) \cdot \varepsilon_j(t') \rangle &= 2d_{ij}\delta(t - t'), \\ d_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

Такая стохастическая добавка в случае моделирования атмосферных процессов кажется вполне естественной, т.к. мы никогда не знаем точно параметров модели. В данной работе мы рассмотрим простейший случай, когда $d_{ij} \equiv d$, и d – величина, вообще говоря, малая.

В этом случае можно написать уравнение Фоккера-Планка для функции плотности вероятности ρ , которое будет иметь вид [45]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(B(u)\rho) = d\Delta\rho, \quad (3)$$

$$\rho \geq 0, \quad \int \rho du = 1. \quad (4)$$

Если теперь при $t = 0$ мы задаём начальное условие $u = u_0$, то это означает, что при $t = 0$ для уравнения (3) задаётся условие $\rho|_{t=0} = \delta(u - u_0)$. С течением времени функция $\rho(t)$ будет притягиваться к $\bar{\rho}$, и информация о начальном условии u_0 будет теряться. Время, в течение которого будет сохраняться полезная информация об u и будет временем потенциальной предсказуемости. Для этого, конечно, мы должны ввести какую-то характеристику количества

информации, содержащейся в $\rho(t)$ [142]. Чтобы сделать это понятие совершенно прозрачным, рассмотрим простейшее скалярное динамико-стохастическое уравнение

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = \varepsilon, \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \langle \varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t') \rangle = 2\varepsilon^2 \delta(t - t') \\ \langle \varepsilon \rangle = 0,$$

$\varepsilon(t)$ – гауссов δ -коррелированный процесс, u_0 – детерминированная величина.

Усредняя уравнение (5) по ансамблю ε , получим:

$$\frac{d}{dt} \langle u \rangle + \lambda \langle u \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\langle u \rangle|_{t=0} = u_0.$$

Отсюда

$$\langle u \rangle = u_0 e^{-\lambda t}.$$

Пусть $d(t) \equiv \langle u^2 \rangle$. Уравнение для $d(t)$ имеет вид:

$$\frac{d \langle u^2 \rangle}{dt} + 2\lambda \langle u^2 \rangle = 2 \langle \varepsilon \cdot u \rangle.$$

Так как

$$u = e^{-\lambda t} u_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-t')} \varepsilon(t') dt',$$

то

$$\frac{d \langle u^2 \rangle}{dt} + 2\lambda \langle u^2 \rangle = 4\varepsilon^2. \quad (6')$$

Следовательно,

$$d(t) \equiv \langle u^2 \rangle = \frac{2\varepsilon^2}{\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}).$$

Уравнение для плотности вероятности будет иметь вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho u \lambda}{\partial u} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}. \quad (7)$$

Стационарное решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\lambda \bar{\rho} u + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u} \right) = 0.$$

Пусть

$$\frac{2\varepsilon^2}{\lambda} = \bar{d}.$$

Тогда

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\pi \bar{d}}} e^{-\frac{u^2}{\bar{d}}}.$$

Решение (7) будем искать в виде

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi d(t)}} e^{-\frac{(u - \langle u(t) \rangle)^2}{d(t)}}. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что (8) удовлетворяет уравнению (7), если $d(t)$ удовлетворяет уравнению (6'), а $\langle u(t) \rangle$ – уравнению (6).

Таким образом, все начальные данные для уравнения (7), имеющие вид нормального распределения (при $d \rightarrow 0$ вид δ -функции), будут притягиваться к стационарному решению уравнения (7), имеющему вид нормального распределения. В силу линейности уравнения Фоккера-Планка это утверждение будет справедливо и для начального распределения, раскладываемого в сумму нормальных распределений.

Важно отметить, что скорость приближения ρ к $\bar{\rho}$ определяется параметром диссипации λ и не зависит от ε .

Если процесс (5) стационарируется, то автоковариационная функция стационарного процесса $u(\tau)$ имеет вид:

$$C(\tau) = e^{-\lambda \tau} \frac{2\varepsilon^2}{\lambda} \equiv e^{-\lambda \tau} \bar{d}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что потенциальная предсказуемость напрямую связана с корреляционной функцией процесса $u(\tau)$.

Рассмотрим далее более сложную модель, имеющую прямое отношение к описанию крупномасштабных атмосферных процессов. Мы имеем в виду линейную модель низкочастотной изменчивости крупномасштабных атмосферных процессов [29]:

$$\frac{du}{dt} + Au = \varepsilon, \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

В (10) $u \in R^N$, $\varepsilon - \delta$ -коррелированный по времени гауссов процесс:

$$\langle \varepsilon \rangle = 0, \langle \varepsilon(t) \cdot \varepsilon^T(t') \rangle = 2\varepsilon^2 E \cdot \delta(t - t')$$

$$\text{Re}\lambda(A) > 0.$$

E – ковариационная матрица процесса ε , которую для простоты в дальнейшем мы будем считать единичной.

При использовании системы (10) предполагается, что характерное время стохастизации нелинейных синоптических процессов намного меньше соответствующего времени крупномасштабных процессов. Другими словами, эти процессы можно разделить по частотам (по временным корреляционным функциям). Для описания низкочастотных процессов, которые ответственны за потенциальную предсказуемость, это предположение кажется вполне разумным.

Усредняя уравнение (10) по ансамблю ε , будем иметь:

$$\frac{d \langle u \rangle}{dt} + A \langle u \rangle = 0, \quad (11)$$

и, следовательно,

$$\langle u \rangle = e^{-At} \cdot u_0. \quad (12)$$

Пусть

$$C(t) = \langle u \cdot u^T \rangle.$$

Тогда уравнение для ковариационной матрицы $C(t)$ будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}C(t) + AC(t) + C(t)A^* = 2\varepsilon^2 E. \quad (13)$$

Для стационарного процесса, очевидно, должно выполняться уравнение Ляпунова:

$$A\bar{C} + \bar{C}A^* = 2\varepsilon^2 E. \quad (14)$$

Известно, что решение его имеет вид [7]:

$$\bar{C} = 2\varepsilon^2 \int_0^{\infty} e^{-At} e^{-A^*t} dt. \quad (15)$$

Напишем уравнение Фоккера-Планка для плотности функции распределения $\rho(u)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div} Au\rho = \varepsilon^2 \Delta \rho.$$

Стационарное решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{\rho} = \frac{a}{\sqrt{D(\bar{C})}} e^{-((\bar{C})^{-1}u, u)/2}, \quad (16)$$

где $D(\bar{C})$ – детерминант ковариационной матрицы \bar{C} , a – нормировочная константа.

Из (16) следует, что главной характеристикой, определяющей процесс сходимости ρ к $\bar{\rho}$, является ковариационная матрица $C(t)$.

Общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$C(t) = e^{-At}(C(0) - \bar{C})e^{-A^*t} + \bar{C}. \quad (16')$$

Если процесс $u(t)$ (10) стационарируется, то ковариационная матрица стационарного процесса со сдвигом τ

$$\tilde{C}(\tau) \equiv \langle u(t+\tau)u^T(t) \rangle = e^{-A\tau}\bar{C}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что формула (16') может быть переписана в виде:

$$C(t) = \tilde{C}(t)\bar{C}^{-1}(C(0) - \bar{C})\bar{C}^{-1}\tilde{C}^*(t) + \bar{C},$$

или, поскольку $\tilde{C}(0) = \bar{C}$, то

$$C(t) = \tilde{C}(t)\tilde{C}(0)^{-1}(C(0) - \tilde{C}(0))\tilde{C}(0)^{-1}\tilde{C}^*(t) + \bar{C}.$$

Таким образом, мы получили, что процесс сходимости $C(t)$ к \bar{C} можно изучать, пользуясь информацией только о ковариационной матрице со сдвигом τ .

В начальный момент, очевидно, дисперсия ошибок измерения мала по сравнению с климатической дисперсией процесса, так что мы имеем неравенство

$$\|C(0)\| \ll \|\bar{C}\|.$$

Следовательно, с хорошей степенью точности можно написать

$$C(t) = -\tilde{C}(t)\tilde{C}^{-1}(0)\tilde{C}^*(t) + \bar{C}.$$

Важно отметить, что сходимость $C(t)$ к \bar{C} определяется только климатическими характеристиками исследуемой системы и, следовательно, этими характеристиками определяется и потенциальная предсказуемость.

Представим оператор $M \equiv \tilde{C}(t)\tilde{C}^{-1}(0)\tilde{C}^*(t)$ в виде суммы операторов ранга 1. Пусть мы имеем проблему на собственные значения

$$M(t)\psi_i(t) = \lambda_i(t)\psi_i(t), \quad (18)$$

Заметим, что поскольку $M(t)$ – матрица симметричная, то $\{\psi_i\}$ – система ортогональных векторов, которые можно ортонормировать, так что

$$\|\psi_i(t)\| = 1.$$

Матрица M представима в виде

$$M = \sum_i \lambda_i(t) \psi_i(t) \psi_i^T(t) \equiv \sum_i \lambda_i M_i. \quad (19)$$

Матрица M_i – матрица ранга 1.

Очевидно, что

$$\|\psi_i(t) \psi_i^T(t)\| = \lambda_{\max}(M_i) = Sp(M_i) = \|\psi_i(t)\|^2 = 1.$$

Таким образом, сходимость M к 0 определяется сходимостью $\lambda_i(t)$ к 0. При $t = 0$ $\lambda_i(0)$ есть собственные числа ковариационной матрицы \bar{C} , а $\psi_i(0)$ – её собственные векторы (естественные ортогональные составляющие). Это означает, что наиболее предсказуемым подпространством будет подпространство, определяемой при $t = 0$ естественной ортогональной составляющей, для которой $\lambda_i(t)$ имеет минимальный декремент затухания. Показателем этого затухания может служить автоковариационная функция со сдвигом на этом подпространстве. Действительно, перепишем оператор (17) в базисе из естественных ортогональных векторов – собственных векторов оператора C . Очевидно, что в этом случае матрица \bar{C} будет диагональной, а на диагонали матриц $\tilde{C}(t)$ и $\tilde{C}^*(t)$ будут стоять автоковариационные функции коэффициентов Фурье соответствующих естественных ортогональных векторов. Поскольку эти коэффициенты статистически независимы при $t = 0$, то нетрудно видеть, что на некотором интервале $t \in (0, t_M)$ внедиагональные элементы матриц \tilde{C} и \tilde{C}^* будут много меньше диагональных элементов. Отсюда следует, что по крайней мере на этом интервале

$\lambda_i(t)$ будут определяться автоковариационными функциями (квадратами от них) коэффициентов Фурье разложения исходного случайного поля по естественным ортогональным векторам.

На рис.10 приведены проекции первых трёх естественных ортогональных векторов, рассчитанных для модели общей циркуляции ИВМ РАН на поле приземного давления. Вклад этих векторов в общую дисперсию составляет соответственно 8%, 5.4% и 4.9%.

На рис.11 приведены соответствующие автоковариационные и кроссковариационные функции. Нетрудно видеть, что на временах порядка 10 дней диагональные элементы соответствующей блочной матрицы преобладают над внедиагональными элементами, и наиболее предсказуемой на этом интервале можно, по-видимому, считать 3-ю моду, близкую по своей структуре к PNA (Северо-Американское–Тихоокеанское колебание). Этот вывод, что PNA является наиболее предсказуемой компонентой атмосферных процессов на интервале ~ 10 суток был сделан на основе анализа прогнозов погоды с помощью техники корреляционного анализа и сингулярных разложений в работах [137, 59].

Конечно, следуя определению потенциальной предсказуемости, мы должны оперировать с функциями распределения, например, через понятие информационной энтропии.

Из вышеприведенных рассмотрений ясно, что основой потенциальной предсказуемости первого рода является наличие в атмосфере низкочастотных процессов с “длинными” корреляционными связями. Часть этих процессов является следствием взаимодействия с океаном. Типичным примером здесь является отклик атмосферы на явление Эль-Ниньо. Но возникающий здесь “запас” предсказуемости можно уже отнести к предсказуемости второго рода, так как этот запас объясняется в первую очередь большой линейной частью сигнала, распространяющегося в тропиках Тихого океана.

Где в атмосфере можно искать “запас” предсказуемости? Несомненно, это касается в первую очередь верхних слоев атмосферы, в частности, стратосферы, сильная статическая устойчивость которой обеспечивает более низкочастотный характер циркуляции, чем циркуляция в тропосфере. Наиболее подходящим объектом в этом смысле является стратосферный полярный вихрь. Если использовать термин Арктических Осцилляций как трехмерной структуры, которые по своей сути эквивалентно-баротропны и частью которых можно считать полярный вихрь, то возникает задача исследования чувствительности тропосферной циркуляции к изменению стратосферного полярного вихря за счет аномального воздействия планетарных волн или аномального источника нагревания. В частности, в работах [71, 148, 149] было показано, что стратосферные аномалии Арктических Осцилляций, которые естественно, как мы уже сказали, отражают изменения стратосферного полярного вихря, распространяются вниз в тропосферу, изменяя ее циркуляцию. Эксперименты с моделью общей циркуляции [116] показали, что запаздывание в отклике по времени имеет порядок 10 суток. Временной отклик тропосферной циркуляции на стратосферные аномалии можно вычислить и с помощью оператора отклика, зависящего от времени, теория построения которого будет изложена в соответствующих параграфах. То, что стратосферные аномалии могут быть определяющими в формировании аномалий Арктических Осцилляций, было показано также в работах [108, 42].

Напомним, что оператор отклика в данном случае должен вычисляться по формуле

$$M(t) = \int_0^t C(\tau) \bar{C}(0) d\tau \quad (20)$$

и если воздействие δf не зависит от времени, то отклик будет вычисляться по формуле

$$\delta\varphi(t) = M(t)\delta f.$$

§ 3. Начальный рост ошибок

Рост ошибки в принципе может быть исследован на основе нестационарного уравнения Фоккера-Планка. Однако, их структуру, и как следствие, возможность получения оптимального распределения ρ в начальный момент времени проще исследовать на основе исходного уравнения, линеаризованного относительно решения $u(t)$:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial \bar{u}} u', \quad u'|_{t=0} = \varepsilon_0, \quad (1)$$

или, полагая $\frac{\partial B}{\partial \bar{u}} \equiv A(\bar{u})$, можно написать:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = A(\bar{u})u'. \quad (2)$$

Запишем уравнение (2) с помощью разрешающего оператора в виде:

$$u'(t) = L(t)\varepsilon_0. \quad (3)$$

Умножим левую и правую часть (3) скалярно на $u'(t)$. Получим:

$$(u'(t), u'(t)) = (L(t)\varepsilon_0, L(t)\varepsilon_0) = (L^*L\varepsilon_0, \varepsilon_0). \quad (4)$$

Поскольку оператор L^*L – самосопряжённый, параметрически зависящий от t , то для каждого фиксированного t можно рассмотреть спектральную задачу:

$$L^*L\psi_i = \lambda_i\psi_i.$$

Пусть

$$u'(t) = \sum \alpha_i(t)\psi_i(t)$$

$$\varepsilon_0 = \sum \alpha_{i0}(t)\psi_i(t),$$

так что

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad \sum \alpha_{i0}^2(t) = \text{const} \equiv (\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

Подставляя эти разложения в (4), получим

$$\alpha_i^2(t) = \alpha_{i0}^2(t)\lambda_i(t),$$

которое в принципе позволяет анализировать рост ошибок при каждом фиксированном t . При $t \rightarrow 0$ мы можем линеаризовать систему относительно начального состояния. Тогда будем иметь:

$$\alpha_i^2(t) = \alpha_i^2(0)\lambda_i(0).$$

Поскольку в данном случае

$$u'(t) = e^{A(t)}\varepsilon_0,$$

т.е. $L(t) \equiv e^{At}$, то, разлагая экспоненту в ряд по степеням At при малых $t \equiv \tau(t \rightarrow 0)$, получим

$$e^{A^*(t)} \sim E + A^*\tau.$$

Отсюда с точностью до второго порядка по τ будем иметь

$$e^{A^*t} \cdot e^{At} \sim E + (A^* + A)\tau \sim e^{(A^*+A)\tau}.$$

Таким образом, в начальный момент времени скорость нарастания ошибки будет ограничена величиной

$$\|e^{(A^*+A)\tau}\| \leq e^{\|A+A^*\|\tau}, \quad (5)$$

и максимальный рост ошибки будет идти в направлении собственно вектора, соответствующего максимальному собственному числу оператора $e^{A^*t} \cdot e^{At}$.

Остановимся на этой проблеме более подробно. Как уже отмечалось выше в §7 главы 3 впервые на проблему локальной неустойчивости в задаче циклогенеза даже для устойчивых по Ляпунову потоков указал Фаррел [102, 103]. С математической точки зрения эта проблема связана с некоммутативностью операторов A и A^* .

Действительно, рассмотрим для простоты систему уравнений с постоянным (независящим от времени) линейным оператором A :

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad u \in R^N, \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

Будем предполагать: что $N \times N$ вещественная невырожденная матрица A порождает полную вещественную систему собственных векторов в пространстве R^N . Пусть f также не зависит от времени, и мы хотим исследовать устойчивость по Ляпунову стационарного решения $\bar{u} = A^{-1}f$.

Очевидно, что проблема решается вычислением собственных чисел матрицы A .

Напомним, что в данном случае собственные числа будут совпадать с глобальными показателями Ляпунова.

Однако, поведение ошибок на конечных интервалах времени определяется не глобальными, а локальными показателями Ляпунова. Установим соотношение между осредненными локальными показателями Ляпунова и глобальными показателями.

Для определенности будем считать, что уравнение (2) решается с помощью некоторой разностной схемы, так что

мы можем написать:

$$u^{j+1} = L_j u^{j-1} = \prod_{k=1}^j L_k u^0. \quad (7)$$

Обозначим $\prod_{k=1}^j L_k$ через M_j . Согласно мультипликативной эргодической теореме [57] показатели можно вычислить как логарифмы собственных чисел предельного оператора

$$M = \lim_{j \rightarrow \infty} (M_j^* M_j)^{1/2j\tau}, \quad \sigma = \ln \lambda_k(M), \quad (8)$$

τ – шаг по времени в схеме (7), σ_k – показатели Ляпунова.

Так как мы имеем теорему сходимости, то вместо $j \rightarrow \infty$ можно с определенной точностью взять $j = K$, где K – достаточно большое число. Это означает, что вместо бесконечного промежутка времени $T = \infty$, мы выбираем некоторый большой (но конечный) промежуток $T = K\tau$, что фактически всегда делается при вычислении глобальных показателей Ляпунова.

Разобьем теперь промежуток T на два промежутка $T/2$. (Мы считаем, что отрезок T содержит $2I$ шагов на времени.) На каждом промежутке $T/2$ вычислим показатель Ляпунова $\sigma_k^{T/2}$. Покажем, в частности, что максимальный осредненный показатель на отрезке $T/2$, равный одной второй от суммы соответствующих максимальных показателей на каждом отрезке $T/2$, больше или равен соответствующим показателям, вычисленным на отрезке T .

Это утверждение доказывается с помощью следующей теоремы линейной алгебры [93].

Пусть A, B, C – квадратные матрицы порядка N , причем $C = AB$.

Пусть ρ_i, μ_i, τ_i – их сингулярные числа, занумерованные в порядке возрастания. Тогда для любого $k : 1 \leq k \leq N$

справедливы соотношения:

$$\sum_{i=k}^N \ln \tau_i \leq \sum_{i=k}^N \ln \rho_i + \sum_{i=k}^N \ln \mu_i, \quad (9)$$

причем при $k = 1$ достигается равенство.

Пусть $A = \prod_{j=1}^I L_j$ – для первого участка, $B = \prod_{j=I+1}^{2I} L_j$ – для второго участка.

Поскольку оператор, определяющий показатели на отрезке T равен BA , то в силу неравенства (9) имеем:

$$\frac{1}{2I} \sum_{i=k}^N \ln \tau_i \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I} \sum_{i=k}^N \ln \rho_i + \frac{1}{I} \sum_{i=k}^N \ln \mu_i \right) \quad (10)$$

По индукции, продолжая разбиение каждого из участков, можно утверждать, что

1. При увеличении длин отрезков траектории, по которым вычисляются осредненные локальные показатели Ляпунова, максимальный осредненный показатель Ляпунова не увеличивается.

2. При увеличении длин отрезков траектории сумма осредненных положительных показателей Ляпунова не увеличивается.

Разложим оператор A на кососимметрическую и симметрическую части:

$$A = \frac{A - A^*}{2} + \frac{A + A^*}{2} \equiv K + S.$$

Тогда уравнение (6) можно принимать в виде

$$\frac{du}{dt} + Ku + Su = f. \quad (11)$$

Поскольку $(Ku, u) = 0$, то рост энергии (u, u) будет определяться структурой оператора S . Нетрудно придумать мат-

рицу A с положительными собственными числами, для которой матрица S в своем спектре также может иметь отрицательные собственные числа. Ясно, что это возможно только, если матрица A не принадлежит классу нормальных матриц, т.е. $AA^* \neq A^*A$. Некоммутативность матриц A и A^* означает, что мы не можем найти общий базис для K и S , в котором эти матрицы приняли бы диагональный вид, поскольку K и S также некоммумутативны. Это означает, что мы все время имеем перекачку энергии с одного направления на другое. Однако, при малых временах как уже было показано выше (с точностью до τ^2)

$$e^{A^*\tau}e^{A\tau} \approx E + (A^* + A)\tau \approx e^{A\tau}e^{A^*\tau},$$

и рост ошибки можно определять через собственные числа оператора $(A^* + A)$. (Таким образом вычисляются мгновенные показатели Ляпунова.)

В некоторых случаях этот рост может быть очень большим, хотя асимптотически при $t \rightarrow \infty$ его может и не быть совсем. Ясно, что ошибка будет расти только при подходящем выборе начальных данных.

Отметим, что выше речь шла об энергии, вычисленной через скалярное произведение в евклидовом пространстве:

$$E \equiv \sum_i u_i^2 \equiv \|u\|^2.$$

Наш вывод заключается в том, что для этой энергии в ряде случаев процесс установления ее роста (или диссипации) при больших t ($t \rightarrow \infty$) может быть немонотонным. Этот факт хорошо известен в теории итерационных процессов. Однако, мы можем подобрать такую норму, в которой процесс установления будет монотонным, проблема заключается в том, насколько физическим будет это новое определение “энергии”.

Действительно, при наших предположениях о вещественности и полноте системы собственных векторов оператора A , мы можем построить эту “энергетическую” норму, используя эту систему.

Обозначим матрицу из собственных векторов оператора A через T . Согласно нашим предположениям

$$T^{-1}AT = D,$$

где D – диагональная матрица.

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}T^{-1}u + T^{-1}AT \cdot T^{-1}u = T^{-1}f_1,$$

или

$$\frac{d}{dt}u_1 + Du_1 = f,$$

где $u_1 \equiv T^{-1}u$, $f_1 = T^{-1}f$.

Для ошибки вектора u_1 мы имеем монотонную сходимость в обычном скалярном произведении (либо к бесконечности, либо к нулю в зависимости от элементов матрицы D).

Необходимая норма для вектора u , таким образом, определяется следующим образом:

$$\|u\|_T^2 \equiv (u_1, u_1) = (T^{-1}u, T^{-1}u) = (T^{*-1}T^{-1}u, u) = ((TT^*)^{-1}u, u).$$

Для некоторых простых моделей атмосферы и простых решений u можно найти связь между мгновенными показателями Ляпунова и параметрами решения.

Действительно, рассмотрим уравнение баротропного вихря в двоякопериодическом канале:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

где $\omega = \Delta \psi$, $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

В качестве основного решения возьмём стационарное решение $\bar{\psi} = \bar{\psi}(y)$.

Пусть $\omega = \omega' + \bar{\omega}$, $\psi = \bar{\psi} + \psi'$. Линеаризованное уравнение для возмущений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0.$$

Выпишем уравнение для кинетической энергии возмущений: $E' = -(\omega', \psi')/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t} &= \iint_{x y} \bar{u} \frac{\partial \omega'}{\partial x} \psi' dx dy = \left(\bar{u} \frac{\partial \omega'}{\partial x}, \psi' \right) = (A\psi', \psi') = \\ &= \left(\frac{A + A^*}{2} \psi', \psi' \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку $\omega' = \Delta \psi'$, то оператор A имеет вид:

$$A\psi' \equiv \bar{u}(y) \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x}$$

и, следовательно, симметричный оператор $\frac{A+A^*}{2} = S$ можно записать в следующем виде (с учетом периодических краевых условий):

$$S \equiv \frac{1}{2} \left[\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \Delta - \Delta \left(\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \quad (14)$$

Рассмотрим проблему на собственные значения для симметричного оператора S :

$$S\bar{\varphi}_{ik} = \lambda_{ik}\bar{\varphi}_{ik}. \quad (15)$$

Т.к. \bar{u} не зависит от x , то φ_i можно искать в виде:

$$\bar{\varphi}_{ik} = \varphi_i(y) e^{ikx} \quad (16)$$

Поскольку

$$\Delta \bar{\varphi}_{ik} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \bar{\varphi}_{ik},$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_{ik}}{\partial x} = ik \bar{\varphi}_{ik},$$

то подставляя (16) в (15) и умножая (15) скалярно на e^{-ikx} , получим:

$$\frac{1}{2} \left(\bar{u} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (\bar{u} \varphi_i)}{\partial y^2} \right) = \frac{\lambda_{ik}}{ik} \varphi_i. \quad (17)$$

Проблема на собственные значения (17) легко приводится к следующему виду:

$$K \varphi_i \equiv \bar{\omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega} \varphi_i}{\partial y} = \frac{\lambda_{ik}}{ik} \varphi_i, \quad (18)$$

где $\bar{\omega} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$.

Поскольку исходный оператор был симметричным, а слева в (18) стоит кососимметрический оператор, то, следовательно,

$$S = ikK. \quad (19)$$

Из (19) следует, что собственные числа оператора S расположены на вещественной оси симметрично относительно нуля, т.к. K – вещественный кососимметрический оператор. Вследствие этого сильного свойства симметрии спектра оператора S мы можем вместо спектра оператора S исследовать спектр оператора $S^2 = -k^2 K^2$, собственные числа которого равны квадратам собственных чисел оператора S .

Чтобы исключить сингулярность (а также для упрощения вычислений) перейдем к конечномерной аппроксимации оператора K . Если мы воспользуемся симметричными аппроксимациями производных, то свойство кососимметричности сохранится. Конечномерная проблема на собственные значения в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\bar{\omega}_{i+1} + \bar{\omega}_i}{2\Delta y} \varphi_{i+1} - \frac{\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i-1}}{2\Delta y} \varphi_{i-1} = \frac{\lambda_{ik}}{ik} \varphi_i.$$

Воспользуемся известным алгебраическим соотношением

$$\sum_i \lambda_i(A^*A) = \sum_{ij} a_{ij}^2,$$

где a_{ij} – элементы вещественной матрицы A .

Матрица K имеет две ненулевые ленты с элементами $\frac{\bar{\omega}_{i+1} + \bar{\omega}_i}{2\Delta y}$ и два ненулевых элемента в правом верхнем и левом нижнем углах, так что сумма квадратов её элементов будет равна

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2(K) = \frac{1}{\Delta y^2} \sum_i \bar{\omega}_{i+1/2}^2.$$

Отсюда следует справедливость соотношения:

$$\sum_i \lambda_{ik}^2(S) = \frac{4k^2}{\Delta y^2} \sum_i \bar{\omega}_{i+1/2}^2. \quad (20)$$

Из (20) следует также (в силу симметрии собственных чисел оператора S), что сумма квадратов положительных собственных чисел оператора S будет равна $\frac{2k^2}{\Delta y^2} \sum_i \bar{\omega}_{i+1/2}^2$, т.е. эта сумма определяется энтропией основного решения $\bar{\psi} = \bar{\psi}(y)$.

Представим ψ' (13) в виде разложения по собственным функциям $\bar{\varphi}_{ik}$:

$$\psi' = \sum_i \sum_k a_{ik}(t) \bar{\varphi}_{ik}.$$

Тогда уравнение (13) может быть переписано в виде (при условии ортогональности φ_{ik}):

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = \sum_{i,k} \lambda_{ik} |a_{ik}|^2. \quad (21)$$

Из (21) следует, что начальный рост ошибки при соответствующем выборе начальных данных определяется энтропией основного решения.

§ 4. Предсказуемость на подпространствах. Энтропия как мера предсказуемости

Определив потенциальную предсказуемость через время сходимости начального распределения к равновесному, мы тем самым формулируем и метод изучения этой предсказуемости. Однако здесь возникает большая технологическая трудность, связанная с большой размерностью фазового пространства, в котором надо задавать функцию распределения начальных данных. При практической реализации этого подхода в оперативных центрах прогноза погоды задача решается выбором подходящих подпространств, например, подпространств, натянутых на ведущие сингулярные векторы линейаризованного относительно начального состояния оператора задачи. Мы сформулируем задачу по другому – мы будем исследовать предсказуемость на фиксированных одномерных подпространствах, натянутых на естественные ортогональные векторы – собственные векторы ковариационной матрицы. Задача имеет большой физический смысл еще и потому, что ведущий естественный ортогональный вектор приземного давления по определению является проекцией Арктических осцилляций на поле приземного давления, т.е. отражает физическую структуру, предсказание которой является важной практической задачей для региона Евразии.

Нетрудно получить связь между предсказуемостью на этих подпространствах и предсказуемостью вдоль сингулярных векторов разрешающего линейаризованного оператора на любом конечном времени t .

Действительно, пусть мы имеем уравнение для ошибки прогноза, записанное в терминах разрешающего оператора (§1):

$$\varepsilon(t) = A(t)\varepsilon_0 \quad (1)$$

В уравнении (1) время t считаем параметром задачи.

Пусть $\{\psi_i\}$ есть система ортогональных собственных векторов ковариационной матрицы решения исходной конечномерной задачи

$$\frac{du}{dt} = B(u), \quad u \in R^N, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

т.е. ψ_i удовлетворяет уравнению

$$C_0 \psi_i = \lambda_i \psi_i,$$

$C_0 \equiv \langle uu^T \rangle$, где $\langle \cdot \rangle$ означает знак осреднения по ансамблю, которое при практической реализации заменяется осреднением по времени (эргодическая гипотеза).

Из (1) следует, что

$$(\varepsilon(t), \varepsilon(t)) = (A(t)\varepsilon_0, A(t)\varepsilon_0) = (A^* A \varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad (3)$$

где (\cdot, \cdot) – есть скалярное произведение в R^N .

Пусть

$$\varepsilon(t) = \sum_i \alpha_i(t) \psi_i, \quad \varepsilon_0 = \sum_i \alpha_i(0) \psi_i.$$

Тогда из (1) следует, что

$$\alpha_i(t) = \sum_j (A(t) \psi_j, \psi_i) \alpha_j(0). \quad (4)$$

Пусть мы также имеем две ортогональные системы левых и правых сингулярных векторов оператора $A(t)$, зависящие от параметра t – $\{\eta_i\}, \{\xi_i\}$, так что

$$A \eta_i = \sigma_i \xi_i, \quad (5)$$

$$A\xi_i = \sigma_i \eta_i,$$

где σ_i – зависящие от параметра t сингулярные числа.

Разложим ψ_j и ψ_i по системам векторов $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$:

$$\psi_j = \sum_k \beta_{kj} \eta_k,$$

$$\psi_i = \sum_k \gamma_{ki} \xi_k.$$

Если считать все системы ортонормированными, то $\sum \beta_{kj}^2 = 1$ и $\sum \gamma_{ki}^2 = 1$.

Подставляя разложение (6) в (4), получим:

$$\alpha_i(t) = \sum_j \sum_k \sigma_k \beta_{kj} \gamma_{ki} \alpha_j(0). \quad (7)$$

Справедливость формулы (7) следует из того, что

$$(A(t) \sum_k \beta_{kj} \eta_k, \sum_m \gamma_{mi} \xi_m) = \sum_k \sigma_k \beta_{kj} \gamma_{ki}.$$

Формулу (7) можно переписать следующим образом:

$$\alpha_i(t) = \sum_k \sigma_k \gamma_{ki} \sum_j \beta_{kj} \alpha_j(0) \equiv \sum_k \sigma_k \gamma_{ki} \delta_k. \quad (8)$$

В формуле (8) член γ_{kj} представляет из себя вклад k -го сингулярного вектора в ψ_i (исследуемое подпространство), а δ_k – вклад начальных данных в подпространство, натянутое на k -й сингулярный вектор.

В такой постановке, конечно, очень важной представляется задача исследования распределения начальных данных $\{\alpha_i(0)\}$ по всем подпространствам $\{\psi_i\}$ и передача энергии по спектру с течением времени. Другими словами, вопрос

можно сформулировать следующим образом: имеем ли мы запас предсказуемости на подпространстве, натянутом на ψ_1 (наиболее крупномасштабная мода), если начальные данные задавать на подпространстве, натянутом на ψ_m , $m > k_0$, где k_0 – достаточно большое число, т.е. на подпространстве, натянутом на мелкомасштабные моды?

Эта проблема изучалась в работе [155] (но в несколько иной постановке), где было показано, что запас предсказуемости составляет величину порядка 1 суток. Примерно такой же результат был получен и нами в численных экспериментах с моделью общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН (с разрешением 5° по долготе, 4° по широте и 21 уровнем по вертикали).

Приведем некоторые результаты численных экспериментов, проведенных с этой моделью. На рис. 12 приведён временной ход одномерных функций распределения ошибок для подпространств, натянутых на различные собственные ортогональные векторы. Начальные распределения ε_{0i} указаны в подписи к рисунку. Из рисунка видно, что наиболее быстрое установление функции распределения происходит на подпространствах, соответствующих синоптическим масштабам (~ 3 недель). Запас предсказуемости (~ 2 недель) имеет место для крупномасштабной (1-й моды). Этот результат является косвенным подтверждением правомерности использования динамико-стохастических моделей для низкочастотной изменчивости крупномасштабных атмосферных процессов.

Перейдём теперь к формированию количественных оценок скорости сходимости одномерных распределений к равновесным распределениям. Наиболее подходящим подходом здесь является использование понятия энтропии.

Если воспользоваться понятием информационной энтропии

$$S = - \int \rho \ln \rho d\alpha,$$

то нетрудно видеть, что в случае нормального распределения функции ρ :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{2\sigma^2}}$$

информационная энтропия будет равна

$$S = \ln \sigma^2 + C.$$

Поскольку дисперсия σ^2 определяется формулой (8), то мы видим, что энтропия S напрямую связана с показателями Ляпунова (локальными при конечном t и глобальными при $t \rightarrow \infty$).

На рис. 13-15 приведены графики зависимости информационной энтропии, вычисленной для функций распределения, приведённых на рис. 12.

Отметим практически монотонный характер сходимости энтропии к равновесной величине.

Следует отметить, что с определённой точки зрения более подходящей для нашего случая является так называемая относительная энтропия [139]:

$$S = - \int \rho \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} d\alpha,$$

где $\bar{\rho}$ – равновесная плотность функции распределения, главным достоинством которой является инвариантность по отношению к нелинейным преобразованиям функции α и монотонность стремления ρ к $\bar{\rho}$ при $t \rightarrow \infty$ [119].

В качестве меры предсказуемости можно взять также функцию [154]:

$$\varphi(t) = \int \frac{\rho^2}{\bar{\rho}} du.$$

Сделаем еще одно интересное на наш взгляд замечание, связанное с предсказуемостью для квазистационарных режимов атмосферной циркуляции, в частности, для режима блокирования.

При вычислении индекса неустойчивости квазистационарной баротропной атмосферной циркуляции через градиент функции, связывающей абсолютную завихренность с функцией тока, мы показали, что основной вклад в этот индекс вносит энтропия.

Мы также можем характеризовать данный режим циркуляции с помощью понятия информационной энтропии. Поскольку баротропная циркуляция полностью определяется относительной завихренностью, функцию распределения, через которую должна быть выражена информационная энтропия, можно определить через распределение относительной завихренности, характеризующей баротропную циркуляцию (например, на 500 мб поверхности). Такое определение функции распределения не является однозначным [30]. В самом простом случае мы можем предположить статистическую и информационную эквивалентность всех элементов поверхности, получая, таким образом, одномерную функцию распределения.

Тогда плотность функции распределения может быть определена следующим образом:

$$\frac{dD}{D} = \rho(\omega)d\omega,$$

где ω – относительная завихренность, dD – площадь поверхности, на которой относительная завихренность принадлежит интервалу $(\omega, \omega + d\omega)$, D – полная площадь поверхности.

Если ρ имеет вид гауссового распределения с $\bar{\omega} = 0$, то $S = \ln \bar{\omega}^2 + C$, т.е. энтропия с точностью до константы равна логарифму энтропии. Таким образом, мы снова имеем сильную корреляцию между энтропией и характеристикой устойчивости. Этот вывод был подтверждён прямыми вычислениями, сделанными на основе натуральных данных [30].

§ 5. Предсказуемость на режимах атмосферной циркуляции

Если предположить, что атмосферная циркуляция в средних широтах допускает существование некоторых режимов, на которых эта циркуляция по существу различается, то естественно возникает идея разделить эти режимы и по степени устойчивости траекторий на них, т.е. по степени предсказуемости этих траекторий. Очевидно, что ответ может быть получен в рамках прямых вычислений функций распределения начальных данных, однако, в качестве первого шага целесообразным представляется поиск каких-то более грубых оценок степени устойчивости траекторий при типичных режимах циркуляции. Как мы уже обсуждали выше, ярко выраженные режимы могут быть только региональными, а это значит, что поставленная задача кажется трудно решаемой. Типичным примером таких режимов может служить явление блокирования зонального потока, например, в северо-восточной части Атлантики.

Ниже мы изложим один подход к оценке времени жизни блокинга, предложенной в работе [94].

Рассмотрим уравнение для вертикальной компоненты вихря в p -системе координат в квазигеострофическом приближении (см. главу 2).

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{\partial \tau}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \nu \frac{\partial \omega}{\partial p} + \mu \Delta \omega, \quad (1)$$

где $\omega = \Delta \psi + l$.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega),$$

$$J(\psi, \omega) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right).$$

Интегрируя уравнение (1) от p_1 , до p_2 в предположении, что $\tau = 0$ при p_1, p_2 и вводя обозначение

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{p_1 - p_2} \int_{p_1}^{p_2} \varphi dp, \quad \varphi' = \varphi - \bar{\varphi}$$

получим

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) = -\overline{J(\psi', \omega')} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} \tau + \mu \Delta \bar{\omega} + \frac{\nu}{p_2 - p_1} \frac{\partial \omega}{\partial p} \Big|_{p=p_2} \quad (2)$$

(мы предположили, что $\nu = 0$ при $p = p_1$).

Уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) = \bar{f} + \bar{D}, \quad (3)$$

где \bar{f} – возбуждение за счет бароклинных процессов, \bar{D} – диссипация, основу которой составляет диссипация в пограничном слое, описываемая последним членом уравнения (2). Предположим, что в области блокирования форсинг практически полностью компенсируется диссипацией. Если это так, то квазистационарное решение уравнения (3) будет описываться уравнением

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) = 0 \quad \text{или}$$

$$\bar{\omega} \equiv \Delta \bar{\psi} + l = F(\bar{\psi}). \quad (4)$$

Прямые вычисления показывают [30], что действительно в области блокирования соотношение (4) приблизительно выполняется, более того $F(\bar{\psi}) \approx -\alpha \bar{\psi}$.

Как было показано в главе 2, условием устойчивости решения

$$\Delta \bar{\psi} + l = F(\bar{\psi})$$

является выполнение соотношений:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} > 0 \quad \text{или} \quad -\lambda_{\min} < \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} < 0,$$

где λ_{\min} – минимальное по модулю собственное число оператора Лапласа на сфере. В соотношении $\Delta \bar{\psi} + l = F(\bar{\psi})$ ведущую роль играет параметр Кориолиса. Если $F(\bar{\psi}) \approx \alpha \bar{\psi}$, то можно оценить α , полагая $\alpha = \Delta \psi_0$:

$$\Delta \psi_0 \equiv 2\Omega \sin \varphi = \alpha \psi_0.$$

Отсюда $\psi_0 = -\Omega R^2 \sin \varphi$, и, следовательно,

$$\alpha = -\frac{2}{R^2} = -\lambda_{\min}.$$

Этот результат показывает, что вычисление вклада $\Delta \bar{\omega}$ в коэффициент α представляет, вообще говоря, сложную задачу.

Выберем в качестве меры устойчивости величину $\frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}}$, взвешенную по энергии решения $\bar{\psi}$. Обозначим эту величину через I .

Итак, пусть

$$I \equiv \frac{\iint \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} \cdot |\nabla \bar{\psi}|^2 dD}{\iint |\nabla \bar{\psi}|^2 dD}. \quad (5)$$

Повторяя вычисления, приведенные в главе 2, несложно получить соотношение:

$$I = -\bar{k}^2 - \frac{\bar{M}}{\bar{E}}, \quad (6)$$

где \bar{k}^2 – средний, взвешенный по энергии квадрат волнового числа:

$$\bar{k}^2 \equiv \frac{\iint (\Delta \bar{\psi})^2 dD}{\iint |\nabla \bar{\psi}|^2 dD} \equiv \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{E}}, \quad (7)$$

$$\bar{M} \equiv \frac{2\Omega \iint \bar{u} \cos \varphi dD}{\bar{E}}$$

– угловой момент основного потока, умноженный на некоторый коэффициент.

Из формулы (6) следует, что вклад $\bar{\omega}$ в характеристику устойчивости I идет через средний квадрат волнового числа, определяемый относительной завихренностью и энергией основного потока. Если теперь принять гипотезу, что время жизни блокирующей ситуации будет обратно пропорционально степени неустойчивости данного режима циркуляции (неустойчивости в данном случае не только к возмущениям начальных данных, но и правых частей δf в системе (3), характеризующих флуктуации бароклинных возмущений блокирующей ситуации), то выбрав набор блокингов с разным временем жизни, можно эту гипотезу проверить, что и было сделано в работах [94, 30].

Основной результат, полученный в этих работах, приведен на рис.16.

В целом, полученный результат, несмотря на обилие сделанных предположений, представляется довольно физическим и даже тривиальным, – крупные блокинги должны ”жить” дольше.

§ 6. Предсказуемость систем гидродинамического типа

Анализ линейной системы с δ -коррелированным по времени случайным процессом в качестве внешней возбуждающей силы показывает, что отклик системы (красный шум) можно разложить по системе базисных векторов, порождающих подпространства, на которых система будет обладать разной предсказуемостью. С физической точки зрения понятно, что наибольшей предсказуемостью в этом случае, вообще говоря, будут иметь “наиболее крупномасштабные” атмосферные процессы. В синоптической практике использовался несколько другой метод увеличения предсказуемости –

метод усреднения по времени, позволяющий отфильтровать наиболее быстропротекающие синоптические процессы. Такую различную предсказуемость для различных компонент системы можно наблюдать и для нелинейных систем. Коротко изложим анализ простейшей системы гидродинамического типа, сделанный Кляцкиным [19].

Простейшую систему гидродинамического типа запишем в безразмерном виде:

$$\dot{v}_0 = v_2^2 - v_1^2 - v_0 + R, \quad (1)$$

$$\dot{v}_1 = v_0 v_1 - v_1, \quad \dot{v}_2 = -v_0 v_2 - v_2.$$

Эта система эквивалентна динамическому описанию движения гироскопа с изотропным трением, возбуждаемого постоянным моментом внешних сил относительно неустойчивой оси. Параметром, определяющим число стационарных решений и их устойчивость, является параметр внешнего возбуждения R .

При $R < 1$ мы имеем одно стационарное решение:

$$\bar{v}_0 = R, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0. \quad (2)$$

$R = 1$ является точкой бифуркации типа вилки. При $R > 1$ возникают новые стационарные решения,

$$\bar{v}_0 = 1, \quad \bar{v}_1 = \pm\sqrt{R-1}, \quad \bar{v}_2 = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим действие случайных сил на эту систему, и пусть эта сила действует только на компоненту v_0 .

Динамико-стохастические уравнения новой системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= v_2^2 - v_1^2 - v_0 + R + f_0(t) \\ \dot{v}_1 &= v_0 v_1 - v_1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{v}_2 = -v_0 v_2 - v_2,$$

где

$$\langle f_0(t + \tau) f_0(t) \rangle = 2\sigma^2 \delta(\tau).$$

При $R < 1$ компоненты v_1 и v_2 возбуждаться не будут, система по существу становится линейной, и стационарное распределение вероятностей будет, очевидно, гауссовым:

$$\bar{\rho}(v_0) = C \exp(-(v_0 - R)^2 / 2\sigma^2). \quad (5)$$

Если $R > 1$, то не будет возбуждаться компонента v_2 , и мы имеем систему двух уравнений:

$$\dot{v}_0 = -v_1^2 - v_0 + R + f_0(t), \quad \dot{v}_1 = v_0 v_1 - v_1. \quad (6)$$

Сделаем замену переменных:

$$v_0 = 1 + v'_0.$$

Будем иметь:

$$\dot{v}'_0 = -v_1^2 + (R - 1) - v'_0 + f_0(t), \quad \dot{v}_1 = v'_0 v_1. \quad (7)$$

Если $v_1(0) > 0$, то в отсутствие случайных сил $v_1(t) \rightarrow \sqrt{R - 1}$ при $t \rightarrow \infty$, если $v_1(0) < 0$, то

$$v_1(t) \rightarrow -\sqrt{R - 1} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Выберем для определённости $v_1(0) > 0$.

Поскольку $v_1(t) > 0$, то можно сделать замену переменных:

$$v_1 = e^\varphi.$$

Тогда система (7) перепишется в виде:

$$\dot{\varphi} = v', \quad \dot{v}'_0 = -\frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi} - v'_0 + f_0(t),$$

$$u(\varphi) = \frac{1}{2}e^{2\varphi} - (R - 1)\varphi. \quad (8)$$

Система (8) аналогична уравнению Ланжевена для описания броуновского движения частицы во внешнем поле $u(\varphi)$, причем φ играет роль координаты частицы, а v'_0 — её скорости. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка для совместной плотности вероятностей φ и v'_0 имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(v'_0, \varphi)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial v'_0} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial v'_0} + \frac{\partial}{\partial v'_0} (v'_0 \rho) + \sigma^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial (v'_0)^2}, \quad (9)$$

где $H = \frac{(v'_0)^2}{2} + u(\varphi)$ — аналог функции Гамильтона.

Следовательно, стационарное решение уравнения (9) описывается каноническим распределением Гиббса:

$$\bar{\rho}(v'_0, \varphi) = C \exp\left(-\frac{H}{\sigma^2}\right). \quad (10)$$

Из (10) следует, что стационарное распределение для компоненты v'_0 будет гауссовым:

$$\bar{\rho}(v'_0) = C_1 \exp\left(-\frac{(v'_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (11)$$

а распределение φ не является гауссовым, причем v'_0 и φ не коррелируют между собой.

Важно отметить, что притяжение $\rho(t)$ к $\bar{\rho}$ можно разделить на два этапа: сначала быстро устанавливается максвелловское распределение по скорости и после этого значительно медленнее происходит установление распределения по φ (см. [62]).

Вторая стадия описывается при этом уравнением Эйнштейна-Смолуховского:

$$\frac{\partial \rho(\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \rho(\varphi) \right) + \sigma^2 \frac{\partial^2 \rho(\varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (12)$$

которое для переменной v_1 принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(v_1)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial v_1} \{v_1 [v_1^2 - (R - 1)] \rho(v_1)\} + \\ & + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial v_1} \left\{ v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} (v_1 \rho(v_1)) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что это уравнение есть уравнение Фоккера-Планка для динамико-стохастического уравнения:

$$\dot{v}_1 = -v_1(v_1^2 - (R - 1)) + v_1 f_0(t).$$

§ 7. Предсказуемость 2-го рода. ε -регуляризация и предсказуемость изменений климата

Предсказуемость 2-го рода, как уже указывалось выше, есть предсказуемость, обусловленная внешним по отношению к атмосфере воздействием. Если мы умеем выделить сигнал от этого воздействия, то "полезность" этого сигнала, конечно, зависит от уровня дисперсии, определённого внутренней изменчивостью атмосферной циркуляции, т.е. с предсказуемостью 1-го рода.

Таким образом, главной задачей в данном случае является задача выделения сигнала или, другими словами, задача построения оператора отклика. Конечно, если мы имеем в своём распоряжении модель прогноза, то задачу можно решить "в лоб", задавая внешнее воздействие и распределение начальных данных, однако, проблема идентификации модели по чувствительности к внешним воздействиям при длительных временах счёта (моделирование изменений климата) всё равно остаётся.

Для построения оператора отклика мы упростим задачу, считая внешнее воздействие настолько малым, что исходную систему уравнений можно линеаризовать относительно основного решения задачи.

Итак, пусть исходная система уравнений имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = B(u), \quad u \in R^N, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

Возмущённую систему уравнений запишем в виде:

$$\frac{du_1}{dt} = B(u_1) + \delta f, \quad u_1|_{t=0} = u_0 \quad (2)$$

Пусть $u' = u_1 - u$, $u_1 \in R^N$. Тогда для u' можно написать линейное уравнение, считая, что $\|u'\|$ мала.

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial B}{\partial u} \cdot u' + \delta f, \quad \text{или} \quad (3)$$

$$u'|_{t=0} = 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{du'}{dt} = A(u)u' + \delta f, \quad \text{где} \quad A(u) \equiv \frac{\partial B}{\partial u} - \text{матрица Якоби.}$$

Считая, что δf включается при $t = 0$, решение системы (3) можно записать с помощью функции Грина:

$$u'(t) = \int_0^t G(t, t') \delta f(t') dt'. \quad (4)$$

Оператор $M(t) \equiv \int_0^t G(t, t') dt'$ и есть искомый оператор отклика.

Если в начальный момент мы задаём некоторое распределение начальных состояний, но для невозмущенной и возмущенной задач одно и то же, то можно вычислить осреднённый по всем этим реализациям оператор отклика, который будет иметь вид:

$$\langle M \rangle = \int_0^t \langle G(t, t') \rangle dt'. \quad (5)$$

Теперь задача состоит в нахождении подходящей аппроксимации для формулы (5).

Если система (1) гидродинамического типа, т.е. обладает квадратичным законом сохранения, несжимаема в фазовом пространстве и квадратично нелинейна, то для неё получено выражение, связывающее $\langle G(t, t') \rangle$ с ковариационной матрицей решения $u(t)$ со сдвигом τ при условии, что внешнее возбуждение включено, когда система уже находится в равновесии, т.е. распределение u нормально.

Не вдаваясь далее в детали вычисления $\langle G(t, t') \rangle$ при произвольном усреднении, мы перейдём к климатической задаче – задаче определения оператора отклика диссипативной системы, находящейся в равновесии, на малые внешние воздействия. С этой целью мы воспользуемся методом ε -регуляризации [154].

Вместо системы (1), будем рассматривать систему с малым δ -коррелированным по времени гауссовым шумом $\varepsilon(t)$:

$$\frac{du}{dt} = B(u) + \varepsilon(t), \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u \in R^N,$$

где $\langle \varepsilon_i(t + \tau)\varepsilon_j(t) \rangle = 2\varepsilon\delta_{ij}(\tau)$.

Наряду с системой (6) будем рассматривать возмущённую систему:

$$\frac{du_1}{dt} = B(u_1) + \varepsilon(t) + \delta f. \quad (7)$$

Существуют две возможности решения поставленной задачи.

Первая возможность – использование метода, предложенного Крейкнаном для регулярных систем [121]. Эта возможность была реализована в [39]. Вторая возможность – использование уравнения Фоккера-Планка и получение результата разложением решения этого уравнения в ряд Тейлора и использованием линейного приближения. Этот метод

был реализован в [92] и по времени он был разработан намного раньше. Коротко изложим его суть.

Выпишем уравнения Фоккера-Планка для систем (6-7)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \rho - \operatorname{div}(B\rho), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \rho_1 - \operatorname{div}((B + \delta f)\rho_1).$$

Изменение установившегося среднего состояния (первого момента) можно выразить следующим образом (для i -й компоненты):

$$\delta u_i(t) \equiv \int u_{1i} \rho_1 du - \int u_i \rho du. \quad (9)$$

В [92] показано, что в линейном приближении справедлива формула

$$\delta u_i(t) = \sum_j \int_0^t \int u_i(t) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u_j}(t') du dt' \delta f_j(t'), \quad (10)$$

В формуле (10) $\bar{\rho}$ – стационарное решение первого уравнения (8).

Аналогичный результат был получен в работе [39] с использованием линеаризации относительно траекторий и последующим усреднением.

Если положить, что $\bar{\rho}$ есть гауссово распределение, то нетрудно видеть, что

$$\delta u = \int_0^t C(\tau) C^{-1}(0) d\tau \delta f, \quad (11)$$

где $C(\tau)$ – ковариационная матрица случайного процесса $u(t)$

$$C(\tau) = \langle u(t) \cdot u^T(t + \tau) \rangle .$$

Для низкочастотных крупномасштабных процессов, чьи распределения близки к гауссовым (например, для ведущих коэффициентов Фурье в разложениях по собственным ортогональным векторам) это предположение, как мы уже упоминали выше, близко к реальности.

Если мы хотим получить установившийся отклик, то в формуле (11) нужно положить $t = \infty$:

$$\delta \bar{u} = \int_0^{\infty} C(\tau)C^{-1}(0)d\tau \delta f. \quad (12)$$

Формула (12) была впервые предложена для исследования чувствительности климатической системы к малым внешним воздействиям С.Лейсом [124].

С помощью формул (11)-(12) можно решать целый класс задач, некоторые из которых невозможно решить с помощью прямого численного моделирования.

Пусть δf – не зависящее от времени внешнее возмущение. Тогда соотношение (12) можно записать в виде

$$\delta \bar{u} = M \delta f, \quad (13)$$

где $M \equiv \int_0^{\infty} C(\tau)C^{-1}(0)d\tau$. Соотношение (13) позволяет ставить и решать следующие задачи:

1. Задачу идентификации моделей климата с точки зрения её чувствительности к малым внешним воздействиям. Для решения этой задачи необходимо построить оператор отклика M на основе реальных данных. Естественно, в этом случае мы должны предположить, что реальная климатическая система эргодична, так что мы можем воспользоваться траекторией системы для вычисления соответствующих ковариационных матриц. Поскольку мы не имеем в своём распоряжении траектории реальной климатической системы достаточной длины, эту задачу с определенной степенью точности можно решить только,

если δf принадлежит подпространству, описывающему только крупномасштабные возмущения [42].

Задача оптимального возбуждения заданных конфигураций $\delta \bar{u}$:

$$\delta f = M^{-1} \delta \bar{u}. \quad (14)$$

Эта задача включает в себя исследование возбуждения крупномасштабных атмосферных процессов типа Арктических осцилляций из стратосферы [71, 149] и многие другие задачи. В частности, соотношение (14) даёт возможность решать некоторые задачи управления климатом – нахождения возмущений, приводящих к заданному изменению региональной и глобальной динамики атмосферы [108, 42].

3. Задача распространения сигнала со временем от заданного источника возбуждения. Для решения этой задачи необходимо воспользоваться формулой (11).

Следует подчеркнуть, что решение перечисленных выше задач следует понимать в “климатическом” смысле – ответ даётся для усредненной (климатической) функции Грина.

§ 8. Построение оператора отклика для модели общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН

Нашей конечной целью является исследование чувствительности реальной климатической системы, поэтому для построения оператора отклика необходимо использовать максимально реалистическую модель атмосферы. Дело в том, что в выражение для оператора отклика входят корреляционные коэффициенты с запаздыванием. Следовательно, логично предположить, что оператор отклика модели будет близок к оператору отклика климатической системы, если, по крайней мере, статистика модели является близкой к статистике реальной атмосферы. Поэтому метод построения оператора отклика был реализован для модели ОЦА

ИВМ РАН, уровень которой соответствует современным мировым стандартам. Ниже мы приведём некоторые результаты работы [42].

Исходными уравнениями модели ОЦА ИВМ РАН, разработанной в Институте вычислительной математики РАН [19], является система прогностических уравнений в частных производных для горизонтальных компонент скорости, температуры, влажности и приземного давления. Каждая из этих переменных (кроме приземного давления) зависит от трех пространственных координат. При аппроксимации таких уравнений по вертикальной координате используется конечно-разностный метод. Число вертикальных уровней равно 21. По горизонтальным координатам также применяется конечно-разностный метод с шагом сетки 4 градуса по широте и 5 градусов по долготе. Число узлов сетки на одном горизонтальном уровне, таким образом, равно 3240.

После проведения пространственной аппроксимации возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства порядка 300000. Уравнения гидротермодинамики решаются в модели на основе некоторой модификации метода Аракавы [70] на сетке C. Параметризация радиационных процессов построена в соответствии с [11]. Модель учитывает процессы конденсации, глубокой и мелкой конвекции [74], орографическое [132] и неорографическое [110] гравитационно-волновое сопротивление и включает в себя параметризацию процессов в почве и растительности [9]. Модель участвовала в международном сравнении моделей по программе AMIP II. Качество воспроизведения современного климата моделью ИВМ по итогам этой программы в целом соответствует мировому уровню воспроизведения климата, которое мы проиллюстрируем рис. 19, на котором показаны первые естественные ортогональные функции (ЕОФ) поля приземного дав-

ления, построенные по данным моделирования и реанализа NCEP/NCAR.

Для того чтобы построить приближенный оператор отклика модели, необходимо вычислить достаточно длинную траекторию системы, проинтегрировав модель численно. Затем по полученным данным необходимо определить ковариационные матрицы и вычислить оператор отклика. Как следует из результатов работы [108], для обеспечения необходимой точности и при вычислении оператора необходимо с большой точностью вычислять ковариационные матрицы системы. Источником ошибок является недостаточная длина ряда данных (недостаточная статистика о поведении траектории). Из практических требований к точности следует, что длина временного интервала, на котором происходит его вычисление, должна быть порядка миллиона суток.

При построении приближенного оператора были использованы только поля температуры и двух компонент скорости, а также поле приземного давления. Оправданием этому является тот факт, что остальные физические переменные, по-видимому, в значительной степени функционально с ними связаны. Дальнейшее снижение размерности задачи было достигнуто путем учета только процессов, обладающих достаточно большой изменчивостью.

В редуцированном фазовом пространстве были вычислены автоковариационные матрицы, автоковариационные матрицы с запаздыванием и построены трехмерные естественные ортогональные функции модели (собственные векторы автоковариационной матрицы). Матрица $C(0)$ обращалась в пространстве собственных векторов, отвечающих наибольшему собственному числу (в этом базисе $C(0)$ имеет диагональный вид). В этом же пространстве вычислялась матрица $C(t)$. Оказалось, что оптимальная размерность пространства собственных векторов матрицы

$C(0)$ должна быть порядка 2000. При таких значениях число обусловленности матрицы $C(0)$ еще не слишком велико (ошибки вычислений достаточно малы), а в то же время структура исходного оператора воспроизводится довольно хорошо.

Затем по формуле (12) был построен приближенный оператор отклика. Для него было вычислено сингулярное разложение и тем самым были найдены воздействия, вызывающие наибольшее (в евклидовой норме) изменения температурной составляющей среднего состояния системы. Первые два правых сингулярных вектора (оптимальных воздействий) приведены на рис. 17. Показаны значения нагревания на уровнях 50 и 1000 мб, кроме того, приведены вертикальные разрезы зонально-осредненных воздействий. В левом столбце показан первый правый сингулярный вектор, в правом столбце – второй сингулярный вектор.

Соответствующие левые сингулярные векторы приближенного оператора, очевидно, являются откликами системы на данные нагревания. Для проверки работоспособности предложенного метода в правую часть уравнений модели ОЦА ИВМ РАН были подставлены термические источники, соответствующие первому и второму правому сингулярному вектору (см. рис. 17). Для каждого воздействия модель была проинтегрирована в течение длительного времени и были определены реальные изменения ее среднего состояния. Как и ожидалось, они с хорошей точностью совпали с левыми сингулярными векторами приближенного оператора. На рис. 18 справа показан отклик модели на воздействие вдоль первого сингулярного вектора, слева – соответствующий левый сингулярный вектор. В первом ряду приведены отклики в поле приземного давления (в барах): во втором, третьем и четвертом рядах показаны отклики в полях температуры на уровнях 10 мб, 50 мб и 1000 мб соответственно (в градусах Кельвина).

Перейдём теперь к наиболее важной, по нашему мнению, задаче определения чувствительности реальной атмосферы к малым внешним воздействиям на основе предложенной методики.

Для построения оператора отклика были использованы данные реанализа NCEP/NCAR полей температуры и горизонтальных компонент скорости на 17 стандартных уровнях, а также поля приземного давления за период с 1948 по 2004 год с горизонтальным разрешением 4° по широте и 5° по долготе. Полная размерность оператора составила величину порядка 160000. По этим данным была вычислена матрица $C(0)$ и построены её собственные векторы (ЕОФ). Дальнейшие вычисления проводились в подпространстве, натянутом на первые 50 ЕОФ.

В данном параграфе мы приведём лишь решение одной задачи, которая представляется очень актуальной и важной – это нахождение внешнего воздействия, вызывающего отклик, совпадающий с Арктической Осцилляцией (АО) (рис. 19). Это внешнее воздействие было вычислено как с помощью оператора отклика, рассчитанного по данным наблюдений, так и с помощью оператора отклика, рассчитанного по данным моделирования. Отметим, что все приведённые рисунки относятся к зимнему сезону.

На рис. 20 приведены зонально-осреднённые термические воздействия, возбуждающие Арктическую Осцилляцию – слева, вычисленную по данным моделирования, справа – по данным наблюдений. Следует отметить, что приведённые картинки качественно близки друг другу. Характерной их особенностью является то, что обе они показывают, что Арктическая Осцилляция оптимальным образом может быть термически возбуждена не только из средней тропосферы, но и из нижней стратосферы полярной области – области циркумполярного вихря. Этот важный результат был получен и в экспериментах по чувствительности цир-

куляции атмосферы к аномалиям озона в стратосфере [8] и прямым моделированием отклика [10]. В последние годы, как уже отмечалось выше, проблема возбуждения АО из стратосферы стала очень актуальной [71, 149].

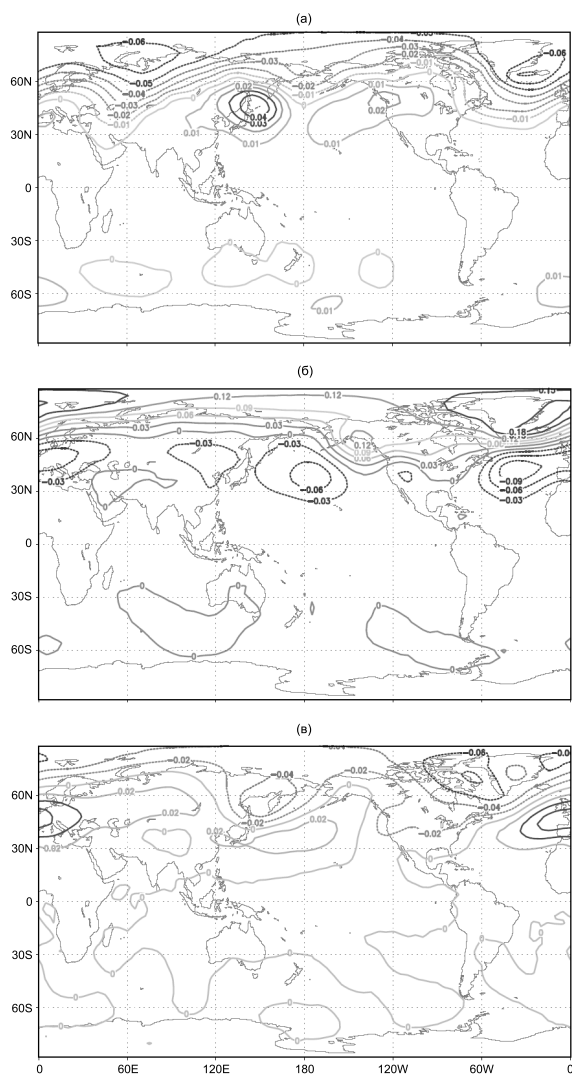


Рис. 10. Проекция трех естественных ортогональных векторов на поле приземного давления, вычисленных для модели общей циркуляции атмосферы в режиме непрерывного января. Относительные дисперсии, приходящиеся на эти вектора: а - 8%, б - 5.4%, в - 4.9%

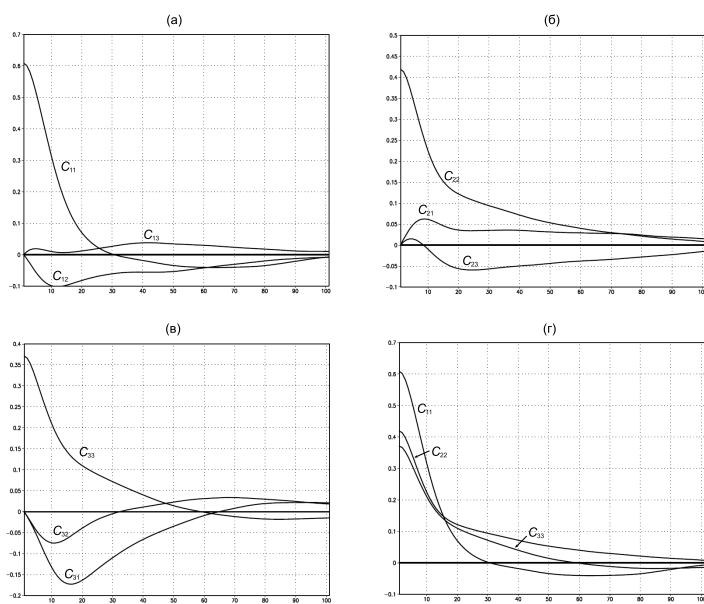


Рис. 11. Элементы матрицы $C(t)$ (автоковариационные и кросс-ковариационные функции главных компонент). По оси абсцисс отложено время в сутках. Величины оси ординат - условные.

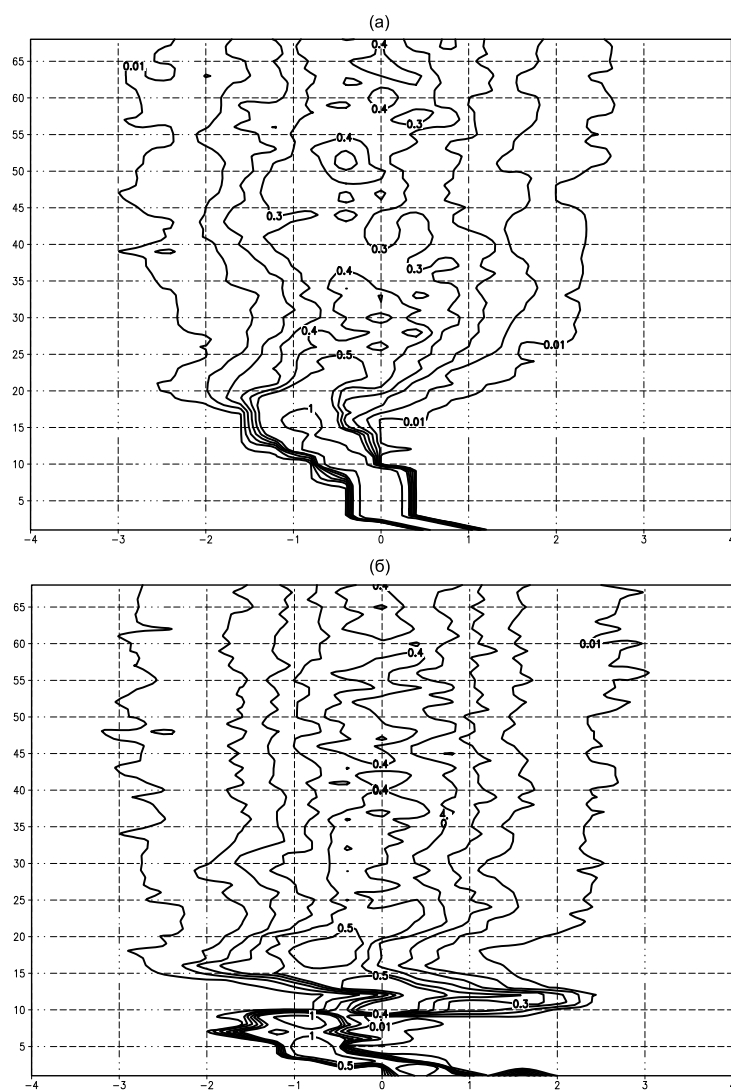


Рис. 12. Временной ход одномерных функций распределения ошибок для подпространств, натянутых на различные собственные ортогональные векторы: а - на 2-ой ЕОФ, б - на 50-й ЕОФ. По оси ординат отложено время в сутках.

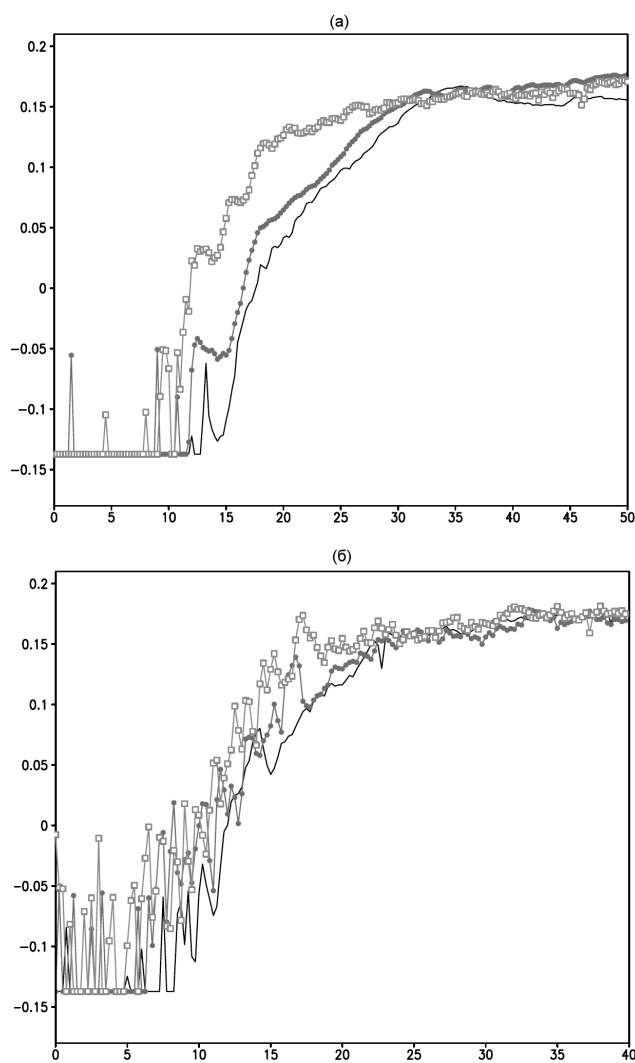


Рис. 13. Зависимость информационной энтропии для различных проекций плотности распределения: а - черная кривая - на 1 ЕОФ, сплошные кружки - 2 ЕОФ, пустые кружки - 10 ЕОФ, б - черная кривая - на 30 ЕОФ, сплошные кружки - 100 ЕОФ, пустые кружки - 300 ЕОФ. Начальное распределение выбрано вдоль 303 ЕОФ. По оси абсцисс время в днях.

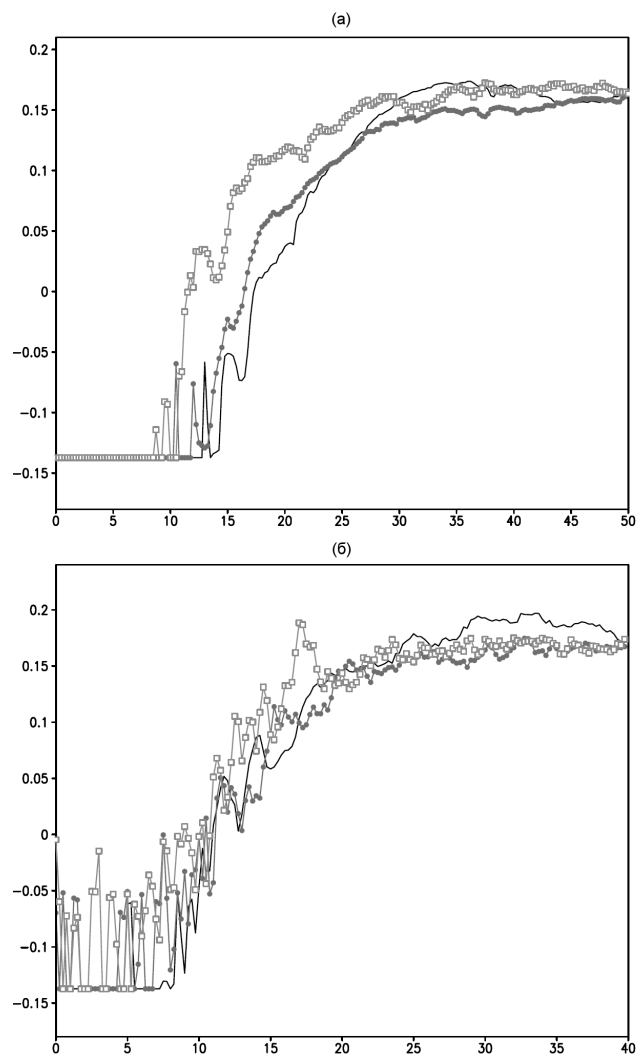


Рис. 14. То же самое, что и на рисунке 13. Но начальное распределение выбрано вдоль 1 ЕОФ.

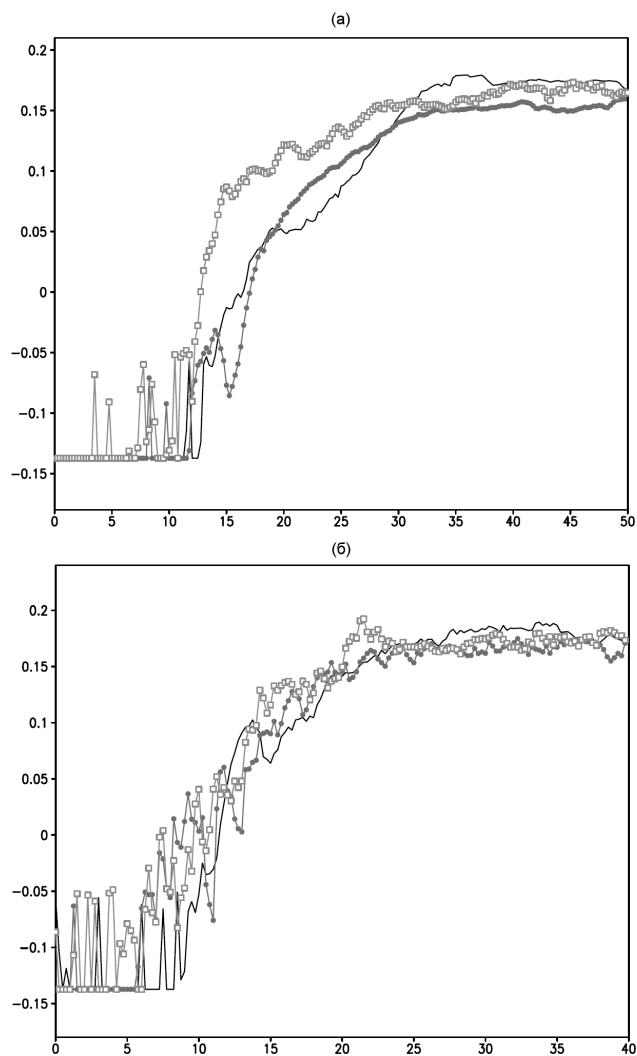


Рис. 15. То же самое, что и на рисунке 13. Но начальное распределение выбрано вдоль 30 ЕОФ.

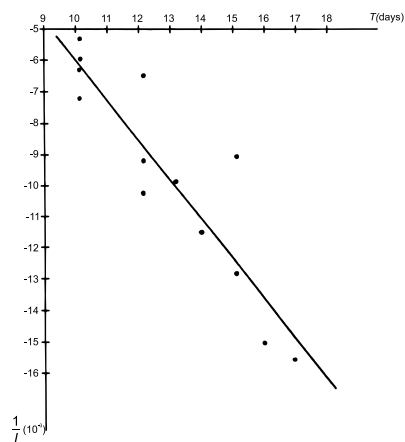


Рис. 16. График зависимости времени жизни блокингов - T от величины, обратной индексу устойчивости I .

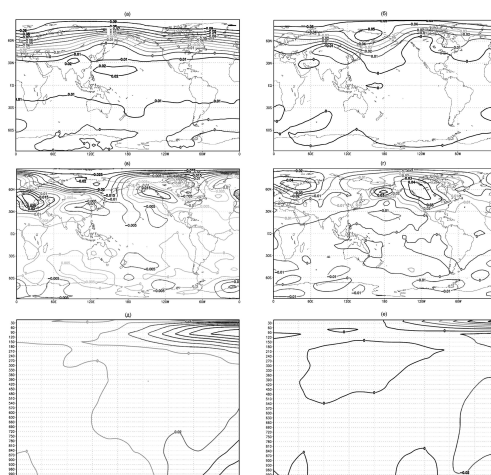


Рис. 17. Правые сингулярные векторы приближенного оператора отклика (оптимальные воздействия). Слева представлен первый сингулярные вектор, справа - второй. Показаны компоненты воздействия (термического нагревания) на уровнях 50 мб и 1000мб. В третьей строке приведены вертикальные разрезы зонально-средненных воздействий.

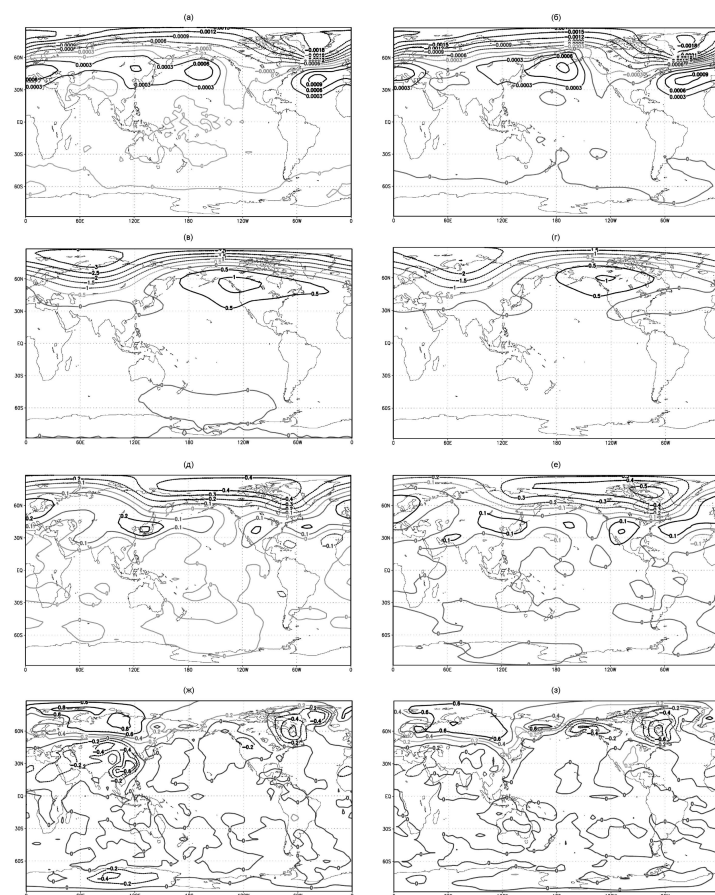


Рис. 18. Отклик модели ОЦА ИВМ РАН на первый правый сингулярный вектор приближенного оператора отклика(справа). Слева представлен соответствующий левый сингулярный вектор. Показаны отклики в поле приземного давления (в первой строке) и в полях температуры на уровнях 50 (вторая строка), 500 (третья строка) и 1000 мб (внизу).

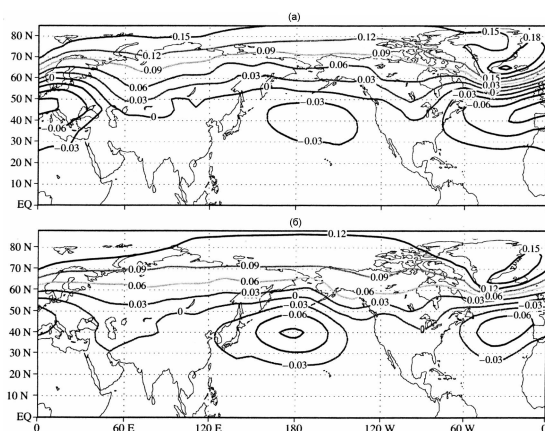


Рис. 19. АО (первый ЕОФ приземного давления) в модели ОЦА ИВМ РАН (внизу) и данных реанализа NCEP/NCAR (вверху).

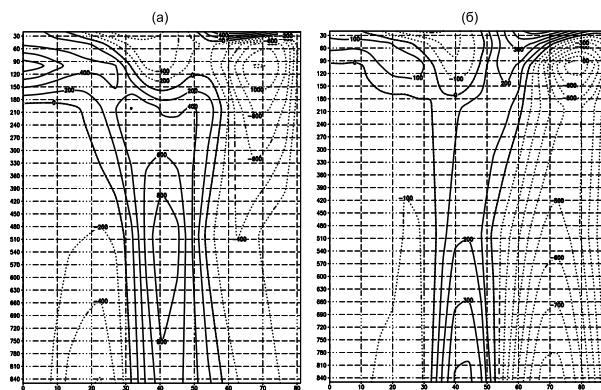


Рис. 20. Термические воздействия (зонально-средненные), оптимальным образом возбуждающие АО. Справа - полученные с помощью приближенного оператора отклика, построенного по данным NCEP/NCAR, слева - вычисленные по данным моделирования.

Приложение. Некоторые вычислительные проблемы теории устойчивости

В этом приложении мы остановимся на некоторых проблемах, связанных с вычислениями собственных и сингулярных чисел. Напомним, что в предыдущих параграфах мы показали, что для вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере справедливо утверждение, что устойчивость или неустойчивость стационарных решений определяется по линейному приближению. Это означает, что в общем случае мы должны уметь решить проблему на собственные значения для несамосопряженных операторов. Поскольку метод решения в общем случае может быть только численным, то нам необходимо иметь теоремы, доказывающие близость собственных значений приближённых задач и собственных чисел исходной задачи. Мы эту проблему рассмотрели в главе 2, здесь же остановимся на некоторых вычислительных аспектах алгебраической проблемы решения задач на собственные значения. В качестве примера можно рассмотреть уравнение двумерной несжимаемой атмосферы:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega + l) = \mu \Delta \omega + f, \quad (1)$$

где значения ψ и ω берутся из данных наблюдений в предположении, что правая часть f такая, что удовлетворяется

уравнение

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega} + l) = \mu \Delta \bar{\omega} + f. \quad (2)$$

Линейная часть оператора в задаче (1) имеет вид

$$A\omega' = J(\bar{\psi}, \omega') + J(\Delta^{-1}\omega', \bar{\omega} + l) - \mu \Delta \omega'. \quad (3)$$

Ясно, что элементы матрицы A_h , аппроксимирующей этот оператор A , будут заданы неточно, то есть вместо задачи

$$A_h \omega^h = \lambda_h \omega^h$$

мы будем решать другую задачу:

$$(A_h + \delta A_h) \tilde{\omega}^h = \tilde{\lambda}_h \tilde{\omega}^h. \quad (4)$$

Пусть

$$\|\delta A_h\| \leq \varepsilon \|A_h\|.$$

Из (4) следует, что в этом случае справедливо неравенство

$$\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E) \tilde{\omega}^h\| \leq \varepsilon \|A_h\| \|\tilde{\omega}^h\|. \quad (5)$$

Поскольку минимум $\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E) \tilde{\omega}^h\|$ достигается на сингулярном векторе матрицы $(A_h - \tilde{\lambda}_h E)$, соответствующем минимальному сингулярному числу, то можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E) \|\tilde{\omega}^h\| &\leq \varepsilon \|A_h\| \|\tilde{\omega}^h\|, \quad \text{или} \\ \sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E) &\leq \varepsilon \|A_h\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Все числа $\tilde{\lambda}_h$, удовлетворяющие неравенству (6), принадлежат так называемому ε -спектру матрицы A_h [15]. Так как

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A_h - \tilde{\lambda}_h E) &= \frac{1}{\sigma_{\max}((A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1})}, \\ \sigma_{\max}((A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}) &= \|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}\|, \end{aligned}$$

то неравенство (6) можно переписать в виде

$$\|(A_h - \tilde{\lambda}_h E)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon \|A_h\|}. \quad (7)$$

То есть ε -спектр задаёт область, в которой могут лежать истинные собственные значения матрицы A_h . Вычисление этой области представляется весьма полезным, особенно если все реальные части собственных чисел лежат в окрестности нуля, поскольку именно эта окрестность в данном случае даёт нам "качественное" утверждение об устойчивости или неустойчивости исходной системы уравнений.

Перейдём теперь к проблеме вычисления показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова являются основной характеристикой устойчивости по Ляпунову произвольных нестационарных решений, в частности уравнений двумерной вязкой несжимаемой жидкости. Пусть уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + A(\bar{\omega})\omega' = 0, \quad (8)$$

где оператор A определен формулой (3). Это уравнение можно записать в разрешенной форме:

$$\omega'(t) = L(t)\omega'_0. \quad (9)$$

Напомним, что показатели Ляпунова есть числа, определяемые следующим образом:

$$\sigma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \lambda_i(L^*(t)L(t)),$$

где λ_i – сингулярные числа оператора $L(t)$. При этом предполагается, что исходная система на аттракторе имеет эргодическую инвариантную меру, так что σ_i не зависят от ω'_0 почти для всех ω'_0 (с точностью до меры нуль).

Ясно, что аналитически мы вычислить показатели Ляпунова не можем, поэтому возникает проблема аппроксимации показателей, вычисленных для некоторых (например,

галёркинских) аппроксимаций исходной задачи. Эту сходимость можно рассматривать на положительных показателях Ляпунова, если они существуют, конечно (мы эту проблему обсуждали в предыдущих лекциях).

Обсудим алгоритм вычисления показателей Ляпунова для конечномерных систем. Применим к уравнению (8) схему Кранка-Николсон (штрихи для сокращения записи опускаем)

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + A_h(\bar{\omega}^h) \frac{\omega^{n+1} + \omega^n}{2} = 0. \quad (10)$$

Считаем, что аппроксимация по пространственным переменным также осуществлена. Разрешив это уравнение относительно ω^{n+1} , получим

$$\omega^{n+1} = \left(E + \frac{\tau A_h}{2} \right)^{-1} \left(E - \frac{\tau A_h}{2} \right) \omega^n \equiv B(\bar{\omega}^n) \omega^n. \quad (11)$$

За L шагов по времени будем иметь

$$\omega^{n+L} = \left(\prod_{i=0}^{L-1} B(\bar{\omega}^{n+i}) \right) \omega^n \equiv B^L(\bar{\omega}) \omega^n. \quad (12)$$

Таким образом, мы должны вычислить собственные числа предельного оператора

$$\lim_{L \rightarrow \infty} ((B^L(\bar{\omega}))^* B^L(\bar{\omega}))^{\frac{1}{2L}}, \quad (13)$$

который в случае эргодичности системы и типичности траектории не зависит от начальной точки. Если собственные числа этого оператора представить в виде

$$\sigma_i^L = e^{\lambda_i^L},$$

то λ_i^L при $L \rightarrow \infty$ будут глобальными показателями Ляпунова для разностной схемы (10). Конечно, мы должны ещё

исследовать сходимость этих показателей к показателям исходной дифференциальной задачи при $\tau, h \rightarrow 0$.

При вычислении B^L возникает трудность, связанная с многократным перемножением матриц, произведение которых оказывается плохо обусловленным. Если использовать стандартные алгоритмы, то это приводит к большим ошибкам вычисления сингулярных чисел. Поэтому применяются специальные методы, так или иначе связанные с QR-разложением матриц. Алгоритм, который будет изложен ниже, принадлежит Экману и Рюэлю (см. [68]).

Алгоритм заключается в последовательном QR-разложении произведения матрицы $B(\bar{\omega}^{n+i})$ и матрицы Q^{i-1} , взятой с предыдущего шага разложения:

$$B(\bar{\omega}^{n+i})Q^{i-1} = Q^i R^i, \quad Q^0 = E. \quad (14)$$

При вычислении $(B^L(\bar{\omega}))^* B^L(\bar{\omega})$ итерационный процесс (14) необходимо повторить $2L$ раз, используя в качестве B прямую матрицу $B(\bar{\omega}^{n+i})$ в течение первых L шагов и сопряженную $B^*(\bar{\omega}^{n+i})$ в течение вторых L шагов. В результате мы сформируем ряд

$$(B^L(\bar{\omega}))^* B^L(\bar{\omega}) = Q^{2L} R^{2L} R^{2L-1} \dots R^1 \equiv M_0. \quad (15)$$

Определим матрицу $M_1 \equiv R^{2L} R^{2L-1} \dots R^1 Q^{2L}$, составленную из тех же матриц R^k , но умноженную на Q^{2L} справа:

$$M_1 = (Q^{2L})^* M_0 Q^{2L}.$$

Очевидно, что M_1 и M_0 имеют одни и те же собственные числа. Выполним для M_1 QR-разложение:

$$M_1 = Q_1^{2L} R_1^{2L} R_1^{2L-1} \dots R_1^1.$$

Аналогичным образом формируем матрицы M_2, M_3, \dots, M_n . Доказывается, что $Q_n^{2L} \rightarrow E$ при $n \rightarrow \infty$. Когда достигается

необходимая точность, мы можем получить интересующие нас $\lambda_i^L(\bar{\omega})$, сложив логарифмы диагональных элементов R_n^k

$$\lambda_i^L = \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^{2L} \ln(R_n^k(i, i)). \quad (16)$$

Алгоритм, конечно, более дорогой, чем прямое перемножение матриц, но зато значительно более точный.

Литература

1. Арнольд В.И. *Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости*, Доклады АН СССР, 1965, 5, стр. 975-978.
2. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1978.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.Л. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Наука, 1974.
4. Будыко М.И. *Климат в прошлом и будущем*, Л.: Гидрометеиздат, 1980, 350 стр.
5. Булеев Н.И., Марчук Г.И. *О динамике крупномасштабных атмосферных процессов*, Труды ИФА АН СССР, 1958, вып.2, стр. 66-104.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления*, М.: Наука, 1984, 143 стр.
7. Володин Е.М., Галин В.Я. *Исследование первой моды низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции в средних широтах Северного полушария*, Метеорология и гидрология, 1998, 9, стр. 26-40.

8. Володин Е.М., Галин В.Я. *О чувствительности моделей климата к малым внешним воздействиям*, Доклады РАН, 1998, т.359, 3, стр. 394-396.
9. Володин Е.М., Лыкосов В.Н. *Параметризация процессов тепло- и влагообмена в системе растительность-почва для моделирования общей циркуляции атмосферы. 1. Описание и расчеты с использованием данных наблюдений*, Изв. РАН, ФАиО, 1998, т.34, 4, стр. 453-365.
10. Володин Е.М. *Проекция на арктическую осцилляцию модельного отклика, возбуждаемого зонально-симметричными термическими источниками*, Изв. РАН, ФАиО, 2003, т.39, 5, стр. 589-595.
11. Галин В.Я. *Параметризация радиационных процессов в атмосферной модели ИВМ*, Изв. РАН, ФАиО, 1998, т. 34, стр. 380-389.
12. Галин М.Б., Киричков С.Е. *Устойчивость зональной циркуляции атмосферы в модели с орографией и проблема блокирования*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1985, т.21, 6, стр. 563-572.
13. Глазунов А.В., Дианский Н.А., Дымников В.П. *Локализованный и глобальный отклики атмосферной циркуляции на аномалию температуры поверхности океана в средних широтах*, Изв. РАН, ФАиО, 2001, т. 37, 5, стр. 581-600.
14. Годунов С.К. *Метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики*, Мат. сборник, 1959, т.89, 3, стр. 271-306.
15. Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры*, Новосибирск, Научная книга, 1997, 388 стр.

16. Горелов А.С. *Размерность аттрактора бароклининой модели*, Доклады РАН, 1996,
17. Грицун А.С., Дымников В.П. *Отклик баротропной атмосферы на малые внешние воздействия*, Изв. РАН, ФАиО, 1999, т.35, 5, стр. 511-525.
18. Дикий Л.А., Курганский М.В. *Интегральный закон сохранения для возмущений зонального потока и его применение к изучению устойчивости*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1971, т.7, 9, стр. 939-940.
19. Должанский Ф.В., Кляцкин В.И., Обухов А.М., Чусов М.А. *Нелинейные системы гидродинамического типа*, М.: Наука, 1974, 160 стр.
20. Дианский Н.А., Глазунов А.В., Дымников В.П. *Моделирование отклика атмосферной циркуляции на аномалии ТПО зимой в Северной Атлантике*, Изв. РАН, ФАиО, 1999, т. 35, 1, стр. 122-136.
21. Дымников В.П. *О численном моделировании бароклининой неустойчивости*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1978, т.14, 3, стр. 243-250.
22. Дымников В.П. *О развитии бароклининой неустойчивости в атмосфере с переменным параметром статической устойчивости*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1978, т. 14, 5, стр. 493-500.
23. Дымников В.П., Фоменко А.А. *О спектральном распределении неустойчивых мод в модели общей циркуляции атмосферы*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1981, т.17, 7, стр. 675-679.
24. Дымников В.П., Филин С.К. *Исследование корреляционных связей наблюдаемых аномалий температуры*

- поверхности океана в средних широтах и притоков тепла к атмосфере по данным ПГЭП*, М.: ОВМ АН СССР, 1985, Препринт №84, 34 стр.
25. Дымников В.П., Скиба Ю.Н. *Баротропная неустойчивость зонально-несимметричных атмосферных потоков*, Вычислительные процессы и системы, вып. 4, М.: Наука, 1986, стр. 63-104.
 26. Дымников В.П., Скиба Ю.Н. *О спектральных критериях устойчивости баротропных атмосферных потоков*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1987, т. 20, 12, стр. 263-274.
 27. Дымников В.П., Филатов А.Н. *Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов*, Л.: Гидрометеоиздат, 1990, 236 стр.
 28. Дымников В.П., Толстых М.А. *Моделирование внутрисезонной низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции и поверхностной температуры океана*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1990, т. 26, 2, стр. 115-126.
 29. Дымников В.П. *О связи естественных ортогональных составляющих полей метеозлементов с собственными функциями динамических операторов*, Изв. АН СССР, 1988, т. 24, 7, стр. 675-683.
 30. Дымников В.П., Казанцев Е.В., Харин В.В. *Информационная энтропия и локальные показатели Ляпунова баротропной атмосферной циркуляции*, Изв. РАН, ФАиО, 1992, т. 28, 6, стр. 563-573.
 31. Дымников В.П., Казанцев Е.В. *О структуре аттрактора, порождаемого системой уравнений баротропной атмосферы*, Изв. РАН, ФАиО, 1993, т. 29, 5, стр. 581-595.

32. Дымников В.П., Филатов А.Н. *Основы математической теории климата*, М.: ВИНТИ, 1994, 254 стр.
33. Дымников В.П., Грицун А.С. *Баротропная неустойчивость и структура низкочастотной изменчивости циркуляции, порождаемой двухслойной бароклинной моделью атмосферы*, Изв. РАН, ФАиО, 1996, т. 32, 5, стр. 724-736.
34. Дымников В.П. *О предсказуемости изменений климата*, Изв. РАН, ФАиО, 1998, т. 34, 6, стр. 741-751.
35. Дымников В.П., Володин Е.М. *О чувствительности моделей климата к малым внешним воздействиям*, Доклады РАН, 1998, т. 359, 3, стр. 394-396.
36. Дымников В.П., Грицун А.С. *Парная симметрия глобальных показателей Ляпунова на аттракторах моделей динамики атмосферы*, Изв. РАН, ФАиО, 2001, т. 37, 3, стр. 1-6
37. Дымников В.П., Грицун А.С. *Хаотические аттракторы климатических моделей*, М.: ИВМ РАН, 2000, Препринт №293/2000, 51 стр.
38. Дымников В.П. *Сопряженные уравнения систем гидродинамического типа*, Изв. РАН, ФАиО, 2001, т. 37, 4, стр. 459-462.
39. Дымников В.П. *Диссипационно-флуктуационные соотношения для динамико-стохастических уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами и диссипативных систем со случайным форсингом*, Изв. РАН, ФАиО, 2002, т. 38, 6, стр. 744-749.
40. Дымников В.П. *О потенциальной предсказуемости крупномасштабных атмосферных процессов*, Изв. РАН, ФАиО, 2004, т. 40, 5, стр. 579-585.

41. Дымников В.П. *Избранные главы теории устойчивости динамики двумерной несжимаемой жидкости*, М.: ИВМ РАН, 2004, 139 стр.
42. Дымников В.П., Грицун А.С. *Современные проблемы математической теории климата*, Изв. РАН, ФАиО, 2005, т. 41, 3, стр. 294-314.
43. Дымников В.П., Лыкосов В.Н., Володин Е.М. и др. *Моделирование климата и его изменений. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования*, т.2. Под ред. В.П.Дымникова. М.: Наука, 2005, стр. 36-173.
44. Кибель И.А. *Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости*, Изв. АН СССР. сер. геогр., 1940, 5.
45. Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения глазами физика*, М.: Физматлит, 2001, 527 стр.
46. Корнев А.А. *Об аппроксимации аттракторов полудинамических систем*, Математический сборник, 2001, т. 192, 10, стр. 19-32.
47. Курбаткин Г.П. *О механизме усиления амплитуды годового хода аномалий температуры тропосферы континентального масштаба*, Изв. РАН, ФАиО, 2006, т. 42, 2, стр. 147-156.
48. Линь Ц. *Теория гидродинамической устойчивости*, Изд. Иностран. лит., 1959, 144 стр.
49. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения*, Изд. Харьковского матем. об-ва, Харьков, 1892.
50. Марчук Г.И. *Численные методы в прогнозе погоды*, Л.: Гидрометеиздат, 1967, 356 стр.

51. Марчук Г.И. *К теории биортогональных разложений полей метеоэлементов*, ДАН СССР, 1968, т. 179, 4, стр. 832-835.
52. Марчук Г.И., Пененко В.В., Протасов А.В. *Малопараметрическая модель спектрально-разностного типа*, Метеорология и гидрология, 1978, 11, стр. 5-19.
53. Марчук Г.И. *Численное решение задач динамики атмосферы и океана*, Л.: Гидрометеиздат, 1974, 303 стр.
54. Марчук Г.И., Дымников В.П. и др. *Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана*, Л.: Гидрометеиздат, 1984, 320 стр.
55. Обухов А.М. *К вопросу о геострофическом ветре*, Изв. АН СССР, сер. геоф. и геогр., 1949, 4, стр. 281-306.
56. Обухов А.М. *О точности предвычисления адвективных изменений полей при численном прогнозе погоды*, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, 9.
57. Оселедец В.И. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем*, Труды Мос. мат. общества, 1968, т. 19, стр. 179-210.
58. Пененко В.В., Протасов А.В. *Построение естественных ортогональных базисов для представления полей метеоэлементов*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1978, т. 14, 12, стр. 1249-1257.
59. Руховец Л.В., Ван Ден Дул Х.М., Барнстон А.Г. *Исследование наиболее предсказуемых структур в среднесрочных гидродинамических прогнозах с помощью главных компонент и сингулярных разложений*, Изв. РАН, ФАиО, 1998, т. 34, 6, стр. 741-751.

60. Скиба Ю.Н. *Математические вопросы динамики вязкой баротропной жидкости на вращающейся сфере*, М.: ОВМ АН СССР, 1989, 178 стр.
61. Томпсон Ф.Д. *Анализ и предсказание погоды численными методами*, М.: Издат. иностр. литер., 1962.
62. Уленбек Г. *Фундаментальные проблемы статистической механики*, Успехи физ. наук, 1971, т.103, 2, стр. 275-318.
63. Филатов А.Н. *Оценка числа неустойчивых стационарных решений уравнений баротропной атмосферы*, Труды ГМЦ, 1992, вып. 323, стр. 134-141.
64. Филатов А.Н. *Теория устойчивости*, М.: ИВМ РАН, 2002, 206 стр.
65. Филин С.К. *Бароклиническая неустойчивость в атмосфере с переменным параметром статической устойчивости*, Изв. АН СССР, ФАиО, 1984, т. 20, 11, стр. 1121-1126.
66. Халмош П.Р. *Лекции по эргодической теории*, Регулярная и хаотическая динамика, 1999, т. 12, 133 стр.
67. Холтон Дж.Р. *Динамическая метеорология стратосферы и мезосферы*, Л.: Гидрометеоиздат, 1979, 222 стр.
68. Abarbanel H.D.F., Brown R., Kennel H.B. *Lyapunov exponents in chaotic systems: their importance and their evaluation using observed data*, Invited Rev., Modern phys. Att. B, 1991.
69. Abramov R., Majda A., Kleeman R. *Information theory and predictability for low-frequency variability*, J. Atmos. Sci., 2005, v. 62, pp. 65-87.

-
70. Arakawa A. *Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion*, J. Comp. Phys., 1966, 1, pp. 119-143.
 71. Baldwin H.P., Dunkerton T.J. *Propagation of the Arctic Oscillation from the stratosphere to the troposphere*, J. Geophys. Res., 1999, 104, pp.30937-30946.
 72. Baldwin M.P., Groy L.J., Dunkerton T.J. et al. *The Quasi-biennial oscillation*, Reviews of Geophysics, 2001, v.39, 2, pp. 179-229.
 73. Bernardo J.H., Smith A.F. *Bayesian theory*, John Wiley and Sons, 1994, 586 pp.
 74. Betts A.K. *A new convective adjustment scheme. Part I. Observational and theoretical basis*, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1986, v. 112, pp. 677-691.
 75. Bjerknes V. *Das Problem von der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik*, Meteor. Zeitschrift, 1904, 21, pp. 1-7.
 76. Branstator G. *Low-frequency patterns induced by stationary waves*, J. Atmos. Sci., 1990, 47, pp. 629-648.
 77. Branstator G. *The maintenance of low-frequency atmospheric anomalies*, J. Atmos. Sci., 1992, 49, pp. 1924-1945.
 78. Blade I. *On the relationship of barotropic singular modes to the low-frequency variability of a General Circulation Model*, J. Atmos. Sci., 1996, v. 53, 16, pp. 2393-2399.
 79. Bretherton F.P. *Critical layer instability in barocline flows*, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1966, v. 92, pp. 325-334.

80. Bryan K.A. *A scheme for numerical integration of the equation of motion on an irregular grid free of nonlinear instability*, Mon. Wea. Rev., 1966, v. 94, pp.38-40.
81. Bretherton Ch., Widmann M., Dymnikov V., Wallace J.M., Blade I. *The effective number of spatial degrees of freedom of a time varying fields*, J. of Climate, 1999, v. 12, pp. 1990-2009.
82. Charney J. *The dynamics of long waves in a barocline westerly current*, J. Meteor., 1947, v. 4, pp. 135-162.
83. Charney J. *On the scales of atmospheric motions*, Geofys. Publ., 1948, 17, 17 pp.
84. Charney J.G., Fjörtoft R., von Neuman J. *Numerical integration of the barotropic equation*, Tellus, 1950, v. 2, pp. 237-254.
85. Charney J.G., Drazin P.G. *Propagation of planetary scale disturbances from the lower into the upper atmosphere*, J. Geophys. Res., 1961, v. 66, pp. 83-109.
86. Charney J., De Vore J. *Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking*, J. Atmos. Sci., 1979, v. 36, pp. 1205-1216.
87. Charney J.G., Strauss D. *Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced planetary wave systems*, J. Atmos. Sci., 1980, v. 37, pp. 1157-1176.
88. Cover T.M., Thomas J.A. *Elements of information theory*, Wiley, 1991, 542 pp.
89. Courant R., Friedrichs K.O., Lewy H. *Über die partiellen Differenzen-gleichungen der mathematischen Physik*, Math. Annalen, 1928, 100, pp. 32-74.

-
90. Del Sole T. *Predictability and information theory. Part I. Measure of predictability*, J. Atmos. Sci., 2004, v. 61, pp. 2425-2440.
 91. Del Sole T. *Predictability and Information theory. Part II. Imperfect forecasts*, J. Atmos. Sci., 2005, v. 62, pp. 3368-3381.
 92. Deker U., Haake T. *Fluctuation-dissipation theorems for classical processes*, Phys. Rev. A, 1975, v. 1, 6, pp. 2043-2956.
 93. Dressler U. *Symmetry property of the Lyapunov spectra of a class of dissipative systems with viscous damping*, Phys. Review A, 1998, v. 38, 4, pp. 2103-219
 94. Dymnikov V.P. *Instability indices for quasi-stationary atmospheric circulation regimes*, Sov. J. Num. Anal. Math. Modelling, 1990, v. 5, 3, pp. 189-198.
 95. Dymnikov V., Filatov A. *Mathematics of climate modeling*, Birkhäuser, Boston, 1997, 260 pp.
 96. Dymnikov V., Gritsoun A. *On the structure of the attractors of finite-dimensional approximations of the barotropic vorticity equation on rotating sphere*, Rus. J. Num. Anal. Math. Mod., 1997, v. 12, 1, pp. 13-32.
 97. Dymnikov V., Kazantsev Ch., Kazantsev E. *On the "genetic memory" of chaotic attractor of the barotropic ocean model*, Chaos, Solutions and Fractals, 2000, v. 11, pp. 507-532.
 98. Dymnikov V., Gritsoun A. *Climate model attractors: chaos, quasi-regularity and sensitivity to small perturbations of external forcing*, Nonlinear processes in geophysics, 2001, v. 8, pp. 201-209.

-
99. Eady E. *Long waves and cyclone waves*, Tellus, 1949, v. 1, pp. 33-52.
 100. Eady E. *The quantitative theory of cyclone development. Compendium of Meteorology*, T. Malone Ed., Amer. Met. Soc., 1951, pp. 464-469.
 101. Epstein E. *Stochastic dynamic prediction*, Tellus, 1969, v. 21, pp. 739-759.
 102. Farrell B., Ioannow P. *Stochastic dynamics of baroclinic waves*, J. Atmos. Sci., 1993, v. 50, pp. 4044-4057.
 103. Farrell B., Ioannow P. *A theory for the statistical equilibrium energy and heat flux produced by transient baroclinic waves*, J. Atmos. Sci., 1994, v. 51, pp. 2685-2698.
 104. Frederiksen J.S. *A unified three-dimensional instability theory of the onset of blocking and cyclogenesis*, J. Atmos. Sci., 1982, v. 39, pp. 969-982.
 105. Gallavotti G. *Chaotic dynamics, fluctuation, nonequilibrium ensembles*, Chaos, 1998, v. 8, 2, pp. 384-392.
 106. Gorelov A.S., Filatov A.N. *Inertial manifolds for equations of barotropic atmosphere*, Rus. J. Num. Anal. Math. Model., 1992, v. 7, 1, pp. 25-43.
 107. Graf H.F., Funke H. *Blockierungssituation im Europäische-atlantischen Raum*, Zeitschrift für Meteorologie, 1986.
 108. Gritsoun A., Branstator G., Dymnikov V. *Construction of the linear response operator of an atmospheric general circulation model to small external forcing*, Rus. J. Num. Anal. Math. Model., 2002, v. 17, 5, pp. 399-416.

-
109. Hampson J. *Influence of the equatorial QBO on the extratropical stratosphere*, J. Atmos. Sci., 2006, v. 63, pp. 936-951.
 110. Hines C.O. *Doppler spread parametrization of gravity wave momentum deposition in the middle atmosphere. Part 2. Broad and quasimonochromatic spectra and implementation*, J. Atm. Sol. Terr. Phys., 1997, v. 59, pp. 387-400.
 111. Holton J.R., Lindzen R.S. *An updated theory for the quasibiennial cycles of the tropical stratosphere*, J. Atmos. Sci., 1972, v. 29, pp. 1076-1080.
 112. Hoskins B.J., Karoly D.J. *The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing*, J. Atmos. Sci., 1981, v. 38, pp. 1179-1196.
 113. Hoskins B.J., James I.N., White G.H. *The shape, propagation and mean-flow interactions of large-scale weather systems*, J. Atmos. Sci., 1983, v. 40, 7, pp. 1595-1612.
 114. Ilyin A.A. *Navier-Stokes equations on the rotating sphere. A simple proof of the attractor dimension estimate*, Nonlinearity, 1994, v. 7, pp. 31-39.
 115. Jacobs S.J. *A note on multiple flow equilibria*, Pageoph., 1989, v. 30, 3.
 116. Jung T., Backmejer J. *Sensitivity of the tropospheric circulation to changes in the strength of the stratospheric polar vortex*, Mon. Wea. Rev., 2006, v. 8, pp. 2191-2271.
 117. Kaplan J.L., Yorke J.A. *Chaotic behavior in multidimensional difference equations*, Lecture Notes in Math., 1979, v. 730, p. 228.

-
118. Kleeman R., Majda A. *Predictability in a model of geophysical turbulence*, J. Atmos. Sci., 2005, v. 62, pp. 2864-2879.
 119. Kleeman R. *Measuring dynamical prediction utility using relative entropy*, J. Atmos. Sci., 2002, v. 59, pp. 2057-2072.
 120. Kazantsev E. *Unstable periodic orbits and attractor of barotropic ocean*, Nonlinear Processes in Geophysics, 1998, v. 5, pp. 193-208.
 121. Kraichnan R. *Classical fluctuation-relaxation theorem*, Phys. Rev., 1959, v. 113, pp. 1181-1182.
 122. Kushnir Y., Held I. *Equilibrium atmospheric response to North Atlantic SST anomalies*, J. Climate, 1996, v. 9, pp. 1208-1220.
 123. Lax P.D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Communications of pure and applied mathematics, 1968, v. 21, pp. 467-490.
 124. Leith C.E. *Climate response and fluctuation dissipation*, J. Atmos. Sci., 1975, v. 32, pp. 2022-2026.
 125. Lindzen R.S. *A wave over-reflection approach to baroclinic instability*, J. Atmos. Sci., 1979,
 126. Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, 2, pp. 130-141.
 127. Lorenz E. *Regimes of simple systems*, J. Atmos. Sci., 2006, v. 63, 8, pp. 2056-2073.
 128. Marchuk G.I. *Formulation of the theory of perturbations for complicated models. Part I. The estimation of the climate change*, Geoph. Intern., 1975, pp. 103-1056.

-
129. Marilees P.E. *The effect of grid resolution of the instability of a simple baroclinic model*, Mon. Wea. Rev., 1975, v. 103, 2, pp. 101-104.
 130. Orzag S.A. *Transform method for calculation of vector coupled sums. Application of the spectral form of vorticity equations*, J. Atmos. Sci., 1970, v. 27, pp. 890-895.
 131. Palmer T.N., Sun Z. *A modelling and observational study of the relationship between sea surface temperature in the north-west Atlantic and atmospheric general circulation*, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1985, v. 111, pp. 947-975.
 132. Palmer T.N., Shutts G.J., Swinbank R. *Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization*, Quart. J. R. Met. Soc., 1986, v. 112, pp. 1001-1031.
 133. Peng S., Robinson A., Hoerling M.P. *The modeled atmospheric response to midlatitude SST anomalies and its dependence on background circulation states*, J. Climate, 1997, v. 10, pp. 971-986.
 134. Phyllips N.A. *The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment*, Quart. J. Roy. Met. Soc., 1956, v. 82, pp.123-164.
 135. Phyllips N.A. *An example of nonlinear computational instability. The atmosphere and ocean in motion, Rossby memorial volume*, Doc. Inst. Press, N.-Y., 1959, pp. 501-504.
 136. Pierrehumbert R.T. *Local and global baroclinic instability of zonally varying flow*, J. Atmos. Sci., 1984, v. 41, 14, pp. 2141-2162.

-
137. Renwick J.A., Wallace J.M. *Predictable anomaly patterns and forecast skill of northern hemisphere wintertime 500 mb height fields*, Mon. Wea. Rev., 1995, v. 123, pp. 2114-2131.
 138. Richardson L. *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press, 1922, 236 p.
 139. Risken H. *The Fokker-Planck equation*, Berlin, Springer, 1984.
 140. Rossby C.G. *Relations between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semipermanent centers of actions*, J. Mar. Res., 1939, v. 2, pp. 38-55.
 141. Ruelle D. *Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics*, J. Statist. Phys., 1999, v. 95, pp. 393-468.
 142. Schneider T., Griddies S.M. *A conceptual framework for predictability studies*, J. Climate, 1999, v. 12, 10, pp. 3133-3155.
 143. Shepherd T.G. *Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part I. The two-layer model*, J. Atmos. Sci., 1988, v. 45, N 14, pp. 2014-2025.
 144. Shirikyan A. *Ergodicity for a class of Markov processes and applications to randomly forced PDE's I*, Rus. J. of Math. Physics, 2005, v. 12, 1, pp. 81-96.
 145. Simmons A.J., Wallace J.H., Branstator G.W. *Barotropic wave propagation and instability, and atmospheric teleconnection patterns*, J. Atmos. Sci., 1983, v. 40, pp. 1363-1392.

-
146. Smagorinsky J. *General circulation experiments with the primitive equations. 1. Basic experiment*, Mon. Wea. Rev., 1963, v.91, pp. 98-164.
 147. Thompson P.D. *Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric patterns*, Tellus, 1957, v. 9, pp. 275-295.
 148. Thompson D., Baldwin M., Wallace J.M. *Stratospheric connection to Northern Hemisphere wintertime weather: implication for prediction*, J. Climate, 2002, v. 15, pp. 1421-1428.
 149. Thompson D., Furtado J., Shepherd T. *On the tropospheric response to anomalous stratospheric wave drag and radiative heating*, J. Atmos. Sci., 2006, v. 63, 10, pp. 2616-2699.
 150. Ting M. *The stationary wave response to midlatitude SST anomaly in an idealized GCM*, J. Atmos. Sci., 1991, v. 48, pp. 1249-1277.
 151. Wallace J.M., Gatzler D.S. *Teleconnections in the geopotential height field during Northern Hemisphere Winter*, Mon. Wea. Rev., 1981, v. 109, pp. 785-812.
 152. Wallace J.M., Cheng X., Sun D. *Does low-frequency atmospheric variability exhibit regime-like behavior?*, Tellus, 1991, 43AB, pp.16-26.
 153. Yano J.I., Mukougawa H. *The attractor dimension of a quasi-geostrophic two-layer system*, Geophys. Astrophys. Fluid dynamics, 1992, v. 65, pp. 77-91.
 154. Zeeman E.S. *Stability of dynamical systems*, Nonlinearity, 1988, v. 1, pp. 115-155.

155. Tribia J.J., Baumhefner D.P. *Scale interactions and atmospheric predictability: an updated perspective*, Mon. Wea. Rev., 2004, v. 132, 3, pp. 703-713

Научное издание

Дымников Валентин Павлович

Устойчивость
и предсказуемость
крупномасштабных
атмосферных процессов

Институт вычислительной математики
Российской академии наук
119333 Москва, ул. Губкина, д. 8

Оригинал-макет изготовлен в ИВМ РАН
Компьютерная верстка
С.В. Кострыкин, Л.И. Журина

Подписано в печать 18.09.2007 г. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ.л. 17,75.
Тираж экз. Заказ

Отпечатано согласно представленному оригинал-макету
в ФГУП "Производственно-издательский комбинат ВИНТИ"
140010 г. Люберцы Московской обл., Октябрьский просп., 403.
Тел. 554-21-86