

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Географический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Декан географического факультета,
член-корр. РАН Добролюбов С.А.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки:
05.03.03 «Картография и геоинформатика»

Направленность (профиль) ОПОП:
общий

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
Учебно-методической комиссией географического факультета
(протокол № 13, дата 20.12.2021)

Москва 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Картография и геоинформатика» (*программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки*).

ОС МГУ утвержден решением Ученого совета МГУ имени М.В.Ломоносова (приказ по МГУ № 1383 от 30 декабря 2020 года).

Год (годы) приема на обучение: 2021

© Географический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Программа не может быть использована без разрешения факультета.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП — относится к базовой части ОПОП, является обязательной для освоения.
2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия: базируется на знаниях по математике, информатике в рамках программы общеобразовательной школы и первого курса.
3. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников

Компетенции выпускников (коды)	Индикаторы (показатели) достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), сопряженные с компетенциями
ОПК-1 (<i>формируется частично</i>) Способен применять знания фундаментальных разделов наук о Земле, базовые знания естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных задач профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Применяет математические знания при решении стандартных задач профессиональной деятельности	Знать: определения, терминологию и основные теоремы (алгоритмы) математических дисциплин, составляющих основу геоинформационных систем, математические методы обработки, а также пространственного и статистического анализа данных; Уметь: формализовать практические задачи, подбирать математические модели для их решения, профессионально и осознанно пользоваться средствами ГИС для пространственного и статистического анализа данных; Владеть: математическими методами обработки и анализа данных.

4. Объем дисциплины (модуля) 5 з.е., в том числе 124 академических часов на контактную работу обучающихся с преподавателем, 56 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.
5. Формат обучения не предполагает электронного обучения и использования дистанционных образовательных технологий (за исключением форс-мажорных обстоятельств – пандемии и т.п.).

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и виды учебных занятий

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе							
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) <i>Виды контактной работы, часы*</i>					Самостоятельная работа обучающегося <i>Виды самостоятельной работы, часы</i>		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Всего	Выполнение домашнего задания	Подготовка к контрольной работе	Всего
Основные понятия общей и линейной алгебры	3	2	1	-	-	3	-	-	-
Комплексные числа и функции комплексной переменной	13	5	5	-	-	10	2	1	3
Преобразования плоскости	8	3	3	-	-	6	1	1	2
Машинная арифметика, алгоритмы, абстрактные типы данных, типовые задачи на графах	14	8	6	-	-	14	-	-	-
Элементы вычислительной геометрии	21	6	10	-	-	16	4	1	5
Численные методы	13	6	6	-	-	12	1	-	1
Интерполяция и аппроксимация	8	4	4	-	-	8	-	-	-
Элементы дифференциальной геометрии	3	2	1	-	-	3	-	-	-
Промежуточная аттестация: зачет	4	<i>Письменный зачет с устным опросом</i>					4		

Введение в теорию вероятностей	1	1	0	-	-	1	-	-	-	
Случайные события, вероятность	14	4	5	-	-	9	4	1	5	
Дискретные случайные величины	14	4	5	-	-	9	4	1	5	
Непрерывные случайные величины	12	4	5	-	-	9	2	1	3	
Функции от случайных аргументов. Ковариация и корреляция	9	3	4	-	-	7	1	1	2	
Введение в математическую статистику	1	1	0	-	-	1	-	-	-	
Статистические оценки параметров распределений	6	2	2	-	-	4	1	1	2	
Статистическая проверка статистических гипотез	11	4	4	-	-	8	2	1	3	
Регрессионный анализ. Понятие о методах многомерного статистического анализа	4	3	1	-	-	4	-	-	-	
Промежуточная аттестация: экзамен	21	<i>Устный экзамен</i>					21			
Итого	180	124					56			

Содержание лекций, семинаров

Содержание лекций

Первое полугодие.

Основные понятия общей и линейной алгебры. Множества, отображения, группа, кольцо, поле. Метрическое пространство. Линейное пространство. Норма. Скалярное произведение. Линейная независимость. Базис пространства. Линейные отображения. Собственные векторы и значения. Сингулярные числа матрицы.

Комплексные числа и функции комплексной переменной. Определение комплексных чисел. Тригонометрическая форма представления. Операции над комплексными числами, их свойства и геометрическая интерпретация. Элементы топологии на плоскости, открытость, связность. Функции комплексной переменной, непрерывность и дифференцируемость, условия Коши-Римана. Геометрическая интерпретация и конформные отображения. Элементарные функции. Формула Эйлера.

Преобразования плоскости. Линейные и аффинные преобразования, их свойства. Проективные преобразования, их свойства. Общие нелинейные преобразования, определение их свойств по матрице Якоби.

Машинная арифметика, алгоритмы. Машинное представление чисел, модель чисел с плавающей точкой. Ошибки в вычислениях. Алгоритмы и их сложность. Алгоритмы сортировки и поиска. Абстрактные типы данных: множества, списки, деревья, графы. Типовые задачи на графах и алгоритмы их решения: кратчайшие пути, задача «коммивояжера», остовные деревья, раскраска.

Элементы вычислительной геометрии. Основные определения. Параметрическое представление прямой, луча и отрезка. Алгоритмы определения пересечения отрезков. Выпуклая оболочка множества точек, алгоритмы построения. Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного. Алгоритмы определения взаимного расположения геометрических объектов, в частности, алгоритмы определения принадлежности точки многоугольнику. Алгоритм штриховки области.

Численные методы. Системы линейных уравнений, прямые и итерационные методы их решения. Число обусловленности матрицы. Методы решения нелинейных уравнений: простой итерации, дихотомии, Ньютона, секущих. Теоремы об условиях и скорости сходимости этих методов. Подходы к решению систем нелинейных уравнений, включая метод Ньютона. Численное дифференцирование, функции одной и двух переменных. Численное дифференцирование сеточных функций. Вычисление определенных интегралов. Простые (прямоугольников, трапеций, Симпсона) квадратурные формулы, квадратуры Гаусса, оценка погрешности. Составные и адаптивные квадратурные формулы. Вычисление двойных интегралов, вычисление площади поверхности, интегрирование сеточных функций.

Интерполяция и аппроксимация. Понятие интерполяции и аппроксимации. Интерполяция функций многочленами, многочлены Лагранжа, интерполяция обобщенными многочленами. Эрмитова интерполяция. Полиномиальные сплайны, интерполяция и аппроксимация функций сплайнами. Сплайны с натяжением. Моделирование кривых на плоскости, кривые Безье. Метод наименьших квадратов. Тригонометрические многочлены, ряды Фурье. Интерполяция и аппроксимация функций двух и более переменных. Методы моделирования геополей, используемые в ГИС.

Элементы дифференциальной геометрии. Кривизна кривой на плоскости, формулы для явного и параметрического представления кривой. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Нормальные сечения, главные кривизны. Кривизны поверхности, используемые при анализе рельефа, вычислительные формулы, определение свойств поверхности по значениям этих кривизн.

Второе полугодие.

Случайные события, вероятность. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Теоретико-множественный подход к определению вероятности. Геометрические вероятности. Понятие о вероятностном пространстве (факультативно). Несовместные и независимые события, полная группа событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность, формулы Байеса.

Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Биномиальное распределение, формула Бернулли. Распределение Пуассона. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия), их свойства. Функция распределения вероятностей случайной величины, ее свойства. Плотность распределения вероятностей, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Равномерное распределение. Нормальное распределение, его свойства.

Распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера. Показательное распределение. Многомерные случайные величины. Функции от случайных величин, их числовые характеристики. Моменты и квантили. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин. Линейная регрессия. Основные предельные теоремы: закон больших чисел в разных формулировках (теоремы Бернулли, Чебышева и др.), центральная предельная теорема.

Выборки и их характеристики. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборок. Эмпирическая функция распределения. Вариационный ряд. Вычисление выборочных значений моментов.

Статистические оценки параметров распределения. Виды оценок (несмещенные, эффективные, состоятельные; точечные и интервальные). Доверительные интервалы для оценок математического ожидания нормального распределения. Методы построения точечных оценок (метод моментов и метод наибольшего правдоподобия).

Статистическая проверка статистических гипотез. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая (альтернативная), простая и сложная гипотезы. Статистические критерии, критическая область. Примеры проверки статистических гипотез о значениях параметров распределений (математическое ожидание нормального распределения, сравнение дисперсий и др.). Изучение зависимости между случайными величинами. Выборочный коэффициент линейной корреляции Пирсона, проверка гипотезы о значимости линейной связи признаков. Ранговые коэффициенты корреляции Кендэлла и Спирмена, проверка гипотез о значимости корреляционной связи признаков. Критерии согласия (Колмогорова, Колмогорова-Смирнова, омега-квадрат, хи-квадрат Пирсона и Фишера), их использование. Способы проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Понятие о многомерном статистическом анализе. Регрессионный анализ. Кластерный анализ. Факторный анализ. Метод главных компонент.

План проведения семинаров

Семинары проводятся в интегрированной форме с лекциями. Изложенный теоретический материал иллюстрируется на конкретных примерах. В тех случаях, когда это возможно, рассматриваются способы решения типовых задач. В завершение некоторые из типовых задач решаются студентами самостоятельно.

7. Фонд оценочных средств для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю):

Примерный перечень вопросов для устного опроса (3 семестр)

1. Дайте определение группы, кольца, поля, приведите примеры.
2. Дайте определение метрического пространства и приведите примеры.
3. Дайте определение нормированного пространства и приведите примеры.
4. Что такое линейное пространство, линейная независимость, базис? Приведите примеры.
5. Что такое собственные вектора и собственные числа линейного преобразования?

6. Что такое сингулярные числа матрицы, как они связаны с геометрическими свойствами линейного преобразования?
7. Как определяются комплексные числа, какие существуют формы их представления, как выполняются арифметические операции? Является ли множество этих чисел полем?
8. Что утверждается в основной теореме алгебры?
9. Чем отличается комплексная дифференцируемость функций от дифференцируемости в действительном смысле? Какие геометрические свойства имеют отображения плоскости, осуществляемые комплексно дифференцируемыми функциями?
10. Что такое предельная точка множества, какие множества называются открытыми? Как определяется граница множества?
11. Дайте определение непрерывной кривой на плоскости. Какие множества называются линейно связными? Что такое многосвязные множества?
12. Как задаются преобразования плоскости? Дайте определение линейных и аффинных преобразований. Как линейные и аффинные преобразования записываются в матричной форме?
13. Какие элементарные линейные преобразования вы знаете? Как получается матрица композиции линейных преобразований?
14. Что такое однородные координаты? Как они используются для унификации вычислений при выполнении аффинных и проективных преобразований?
15. Какие геометрические свойства линейного преобразования можно определить с помощью коэффициентов его матрицы?
16. Что такое главная линейная часть преобразования и матрица Якоби?
17. Какие причины возникновения ошибок в вычислениях вы знаете? Приведите примеры устойчивых и неустойчивых задач.
18. Как оценивается скорость работы (сложность) алгоритма?
19. В чем состоят задачи сортировки и поиска, какие алгоритмы сортировки и поиска вы знаете?
20. Какие типовые задачи на графах вы знаете? Какие практические задачи могут сводиться к решению типовых задач на графах?
21. Как задать отрезок, используя параметрическое представление?
22. Какие задачи пространственного анализа, решаемые средствами ГИС, можно отнести к вычислительной геометрии?
23. Дайте определение выпуклого множества на плоскости. Что такое выпуклая оболочка множества точек на плоскости? На каких свойствах выпуклой оболочки конечного множества точек основаны известные вам алгоритмы ее построения?
24. Какие алгоритмы определения принадлежности точки многоугольнику вы знаете? Могут ли они применяться для многосвязных областей?
25. Каким образом хранятся линейные и площадные объекты в ГИС?
26. Как определяется триангуляция конечного множества точек на плоскости. Что такое триангуляция Делоне?
27. Дайте определение диаграммы Вороного конечного множества точек на плоскости. Каким образом можно обобщить это понятие?
28. Чем отличаются прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений (СЛУ), назовите их достоинства и недостатки.
29. Что такое число обусловленности матрицы? Почему его важно оценивать при численном решении СЛУ?
30. Какие методы решения нелинейных уравнений вы знаете, какой из них обладает наибольшей скоростью сходимости?
31. Для чего предназначены квадратурные формулы? Какие простые квадратурные формулы вы знаете?
32. Как получаются квадратурные формулы Гаусса? Что такое составные и адаптивные квадратуры?

33. Как вычисляется площадь поверхности?
34. Что такое интерполяция и аппроксимация, в чем их отличия?
35. Дайте определение полиномиальных сплайнов. В чем состоит вариационное свойство кубических и линейных сплайнов?
36. Как определяются сплайны с натяжением, каковы их свойства?
37. В чем состоит метод наименьших квадратов, какие задачи решаются с его помощью?
38. Как определяются нормальные кривизны поверхности, какие из них используются при морфометрическом анализе рельефа?

Примерный перечень задач контрольных работ

1. Вычислите выражение: $\frac{1+i}{1-i}$.
2. Найдите все корни уравнения $z^3 - 1 = 0$.
3. Является ли комплексно дифференцируемой функция $f(z) = \frac{x+iy+1}{x-iy}$; ($z = x+iy$).
4. Аффинное преобразование задано формулой: $\begin{cases} x' = 4x - 3y - 1 \\ y' = 3x + 4y + 2 \end{cases}$. Сохраняет ли это преобразование: а) углы; б) площадь; в) ориентацию?
5. Линейное преобразование задано матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите образ точки $(-1, 2)$ при этом преобразовании.

3-й семестр: зачет в виде контрольной работы с последующим устным опросом.

Примерный перечень задач к зачету (3-й семестр)

1. Найти все значения $\sqrt[3]{i}$. Результат записать в декартовой форме.
2. Даны угол $\varphi = 30^\circ$ и точка O с координатами $(-1, 2)$. Найти образ точки $A = (1, -2)$ при повороте на угол φ относительно точки O .
3. На плоскости заданы четыре точки: $A = (1, 1)$, $B = (7, 3)$, $C = (5, 5)$, $D = (3, 2)$. Определить, пересекаются ли отрезки AB и CD и найти точку пересечения, если она существует. Точка пересечения должна быть найдена с использованием параметрического представления прямой.
4. Является ли комплексно дифференцируемой функция $f(z) = \frac{x+iy+1}{x-iy}$; ($z = x+iy$).
5. Аффинное преобразование задано формулой: $\begin{cases} x' = 4x - 3y - 1 \\ y' = 3x + 4y + 2 \end{cases}$.
Сохраняет ли это преобразование: а) углы; б) площадь; в) ориентацию?

6. На плоскости заданы четыре точки $A = (1,1)$, $B = (5,2)$, $C = (3,6)$, $D = (4,3)$. Определить, лежит ли точка D внутри треугольника ABC .
Задача должна быть решена аналитически.

Примерный перечень вопросов к зачету (3-й семестр)

1. Алгоритмы и их сложность. Алгоритмы сортировки.
2. Линейное пространство, линейная независимость, базис пространства.
3. Понятие нормы и скалярного произведения в линейном пространстве, примеры.
4. Процесс создания программ. Схема Горнера. Алгоритмы поиска.
5. Элементы вычислительной геометрии: тест на пересечение отрезков, прямой и многоугольника, двух прямоугольников, вычисление площади многоугольника и др.
7. Алгоритмы проверки принадлежности точки многоугольнику.
8. Выпуклая оболочка конечного множества точек на плоскости. Алгоритмы поиска выпуклой оболочки.
9. Цифровые способы представления графических изображений: векторный и растровый. Алгоритмы разложения отрезка в растр.
10. Деревья, терминология, типичные примеры использования.
11. Графы, терминология, задачи на графах.
12. Преобразования движения и подобия на плоскости. Теоремы Шаля.
13. Аффинные преобразования плоскости, их свойства. Однородные координаты.
14. Проективные преобразования плоскости.
15. Нелинейные преобразования плоскости. Условие сохранения площадей, углов и ориентации.
16. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Сингулярные числа матрицы. Определение коэффициентов искажения длин для преобразований на плоскости.
17. Комплексные числа. Геометрическая иллюстрация комплексных чисел.
18. Функции комплексной переменной. Основная теорема алгебры. Условия сохранения углов.
19. Понятие о численных методах решения систем линейных уравнений. Число обусловленности матрицы.
20. Методы численного решения уравнений (дихотомия, метод Ньютона, секущих).
21. Табличное задание функций. Численное дифференцирование функций одной и двух переменных.
22. Градиент и его свойства. Нормаль к поверхности. Методы аналитической отмывки рельефа.
23. Численное интегрирование функций одной переменной. Формулы прямоугольников, трапеции, Симпсона. Понятие об адаптивных методах численного интегрирования.
24. Численное интегрирование функций от двух переменных. Вычисление объемов и площади поверхности. Интегрирование по области.
25. Интерполяция и аппроксимация функций многочленами Теорема Вейерштрасса. Пример Рунге. Наилучшие узлы интерполяции.
26. Понятие о сплайнах. Сглаживание данных с помощью В-сплайнов.
27. Методы моделирования кривых. Понятие кривизны кривой.

28. Метод наименьших квадратов.

Шкала и критерии оценивания

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины – *зачет* в письменной и устной форме

Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	Незачет	Зачет
Знания (виды оценочных средств: устные опросы, контрольные работы)	Фрагментарные знания или отсутствие знаний	Сформированные систематические знания или общие, но не структурированные знания
Умения (виды оценочных средств: контрольные работы)	В целом успешное, но не систематическое умение или отсутствие умений	Успешное и систематическое умение или в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: домашние задания, контрольные работы)	Наличие отдельных навыков или отсутствие навыков	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач или, в целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме

Примерный перечень вопросов для устного опроса (4-й семестр)

1. Сформулируйте понятия «событие», «испытание», дайте классическое определение вероятности события.
2. Что такое несовместные и независимые события? Могут ли несовместные события быть независимыми?
3. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Что такое генеральная совокупность, выборка? Что понимается под репрезентативностью выборки? Что такое вариационный ряд?
5. Как вычисляются выборочные числовые характеристики?
6. Какие свойствами характеризуются точечные статистические оценки параметров распределений? Что такое доверительный интервал?
7. Какие методы получения статистических оценок вы знаете?
8. В чем суть регрессионного анализа?
9. Какие методы многомерного статистического анализа вы знаете, при решении каких практических задач они применяются?

Домашние задания (4-й семестр)

В качестве домашних заданий предлагаются задачи (от 3 до 5) из учебника и задачника Гмурмана В.Е. (см. список рекомендованной литературы) по соответствующей теме лекций и семинаров.

Примерный перечень задач для контрольных работ (4-й семестр)

1. Прибор, регистрирующий элементарные частицы, содержит 7 датчиков, причем попадающая в него частица может быть зарегистрирована любым из датчиков с равной вероятностью. Прибор зарегистрировал 3 частицы. Найти вероятности следующих событий:
 $A = \{\text{все частицы зарегистрированы первым датчиком}\};$
 $B = \{\text{все частицы зарегистрированы одним и тем же датчиком}\};$
 $C = \{\text{четвертый датчик не зарегистрировал ни одной частицы}\}.$
 $D = \{\text{все частицы зарегистрированы разными датчиками}\}.$
2. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 8 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что извлечены шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?
3. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что он наберёт нужный номер не более чем за девять попыток.
4. Для сдачи зачета студент должен ответить на первый заданный преподавателем вопрос, или, в случае неудачи, на второй. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет, если он выучил только 26 вопросов из 30?
5. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.
6. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0.8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не более четырех?
7. Пусть в ружейной пирамиде находятся две винтовки типа 1 и три – типа 2, причём вероятности попадания в мишень из этих винтовок соответственно равны 0.8 и 0.7. Стрелок сделал 7 выстрелов из наудачу взятой винтовки, ровно 4 раза поразив мишень. Чему равна вероятность того, что он стрелял из винтовки типа 1?
8. Двое игроков поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот из них, у кого раньше выпадет шесть очков. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.
9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – числа очков, выпадающих при бросании двух игральных костей.
10. Сторона квадрата x измерена приближенно, причем $1 \leq x \leq 2$. Рассматривая длину стороны квадрата как случайную величину X , равномерно распределенную на отрезке $[1,2]$, найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение площади квадрата.
11. Случайная величина X имеет плотность распределения $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{при } x \in (0, \pi] \\ 0 & \text{при } x \notin (0, \pi] \end{cases}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.
12. Плотность распределения вероятностей случайной величины X равна $p(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}$ ($-\infty < x < \infty$). Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$.

13. Случайная величина X задана плотностью распределения: $p(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x-\beta|}$, $-\infty < x < \infty$, $\alpha > 0$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
14. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Найти функцию и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.
15. Для проверки игральной кости на симметричность ее бросили случайным образом 600 раз и получили следующие частоты для количества выпавших очков:

Число выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений	92	95	106	108	91	108

- Можно ли считать игральную кость симметричной на уровне значимости $\alpha = 0.05$?
16. Группа из 15 студентов поровну состоит из отличников, хорошистов и троечников. Отличник на экзамене обязательно получит оценку не ниже 4, причем оценку 5 с вероятностью **0.9**; хорошист может получить 5 с вероятностью **0.3**, 4 с вероятностью **0.6**, но оценку 2 не получит в любом случае. Троечник никогда не получит 5, зато может получить оценку 2 с вероятностью **0.2**, а оценку 4 с вероятностью **0.3**. Новый преподаватель наугад вызывает незнакомого студента. А) Какова вероятность, что студент получит 4 или 5? Б) После экзамена выяснилось, что студент получил 4. Какова вероятность того, что он из троечников? В) Какова вероятность того, что все студенты сдадут экзамен?
17. Та же группа из 15 студентов сдает зачет. Студент получает зачет при условии, что он решит правильно не менее трех задач из предлагаемых четырех. Каждую из задач студент-отличник может решить с вероятностью 9/10, студент-хорошист с вероятностью 8/10, а студент-троечник – с вероятностью 6/10. Найти математическое ожидание случайной величины – числа студентов, сдавших зачет.

4-й семестр: экзамен устный, экзаменационный билет включает 2 вопроса по теоретическому материалу и 1 задачу.

Примерный перечень вопросов к экзамену (4-й семестр)

1. События. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Теоретико-множественный подход к определению вероятности.
2. Условная вероятность, независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез, формулы Байеса.
4. Независимые испытания, формула Бернулли. Закон больших чисел (теорема Бернулли).
5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
6. Понятие случайной величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.

7. Основные числовые характеристики распределения вероятностей дискретных случайных величин, их свойства. Закон больших чисел (теорема Чебышева).
8. Функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины, их свойства.
9. Основные числовые характеристики распределения вероятностей непрерывных случайных величин. Примеры вычислений для равномерного, нормального и показательного распределений.
10. Непрерывные и дискретные случайные величины, примеры. Квантили. Начальные и центральные моменты, асимметрия и эксцесс.
11. Нормальное распределение, его свойства. Понятие о центральной предельной теореме (теорема Ляпунова).
12. Распределения, связанные с нормальным. Равномерное распределение. Показательное распределение. Где встречаются (используются) указанные распределения.
13. Функция одного случайного аргумента, ее распределение и математическое ожидание.
14. Ковариация и коэффициент корреляции, их свойства.
15. Статистические выборки и их характеристики. Выборочная функция распределения. Вариационный ряд. Полигон и гистограмма частот.
16. Оценки параметров распределения, их свойства. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения.
17. Оценки параметров распределения, их свойства. Интервальная оценка дисперсии нормального распределения.
18. Методы построения точечных оценок параметров распределений. Примеры применения метода моментов для конкретных распределений.
19. Методы построения точечных оценок параметров распределений. Примеры применения метода наибольшего правдоподобия для конкретных распределений.
20. Статистические гипотезы и критерии. Отыскание критических областей. Проверка гипотезы о значении математического ожидания нормального распределения при известной и неизвестной дисперсии.
21. Виды шкал измерений. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Проверка гипотезы о значимости связи между выборками.
22. Статистические гипотезы и критерии. Отыскание критических областей. Проверка гипотез о значении дисперсии нормального распределения и о равенстве дисперсий двух нормальных распределений.
23. Виды шкал измерений. Ранговый коэффициент корреляции Кендалла. Проверка гипотезы о независимости двух признаков.
24. Понятие о регрессионном анализе, простая линейная регрессия. Свойства оценок параметров регрессии.
25. Метод наименьших квадратов, области его применения.
26. Простая линейная регрессия: проверка гипотезы о значимости линейной связи. Коэффициент детерминации.
27. Статистические гипотезы и критерии. Теорема Пирсона и критерий согласия хи-квадрат для простой гипотезы. Примеры использования.
28. Статистические гипотезы и критерии. Теорема Фишера и критерий согласия хи-квадрат для сложной гипотезы, его использование для проверки нормальности распределения.
29. Статистические гипотезы и критерии. Критерии согласия Колмогорова и омега-квадрат для простых и сложных гипотез.

Примерный вариант задачи к экзамену (4-й семестр)

В соревнованиях по стрельбе участвует команда из двух стрелков. Мишень состоит из трех зон. За попадание в первую зону начисляется 6 очков, во вторую – 4 очка, в третью – 2 очка. Если стрелок не попал в мишень, то очки не начисляются. Вероятности попадания в 1-ю, 2-ю и 3-ю зоны мишени для первого стрелка равны 0.6, 0.2 и 0.1 соответственно, для второго – 0.5, 0.2 и 0.2. Найти закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y – суммарного числа очков, выбиваемых командой из двух этих стрелков за один раунд соревнований (в раунде каждый из стрелков команды делает по одному выстрелу). Чему равна вероятность того, что команда за один раунд наберет не менее 6 очков?

Шкала и критерии оценивания

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины – экзамен в устной форме.

Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Знания (виды оценочных средств: устные опросы, контрольные работы)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: контрольные работы)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: домашние задания, контрольные работы)	Отсутствие навыков	Наличие отдельных навыков	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

8. Ресурсное обеспечение:

а) основная рекомендуемая литература

Кошель С.М. Высшая математика с основами программирования: Учебное пособие. – М.: Географический ф-т МГУ, 2010. – 200с.
Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата. 12-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 479 с. (или более ранние издания)

б) дополнительная литература:

Ахо А. В., Хопкрофт Д., Ульман Д. Д. Структуры данных и алгоритмы. М.: Изд. дом «Вильямс», 2007. – 384с.
Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. – 575с.
Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. – 688 с.
Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для академического бакалавриата. 7-е изд., стер. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 281 с.
Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. – 478с.
Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. – 604 с.
Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2004. – 404с.
Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575с.
Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере: учебное пособие. – Новое изд. – М.: МЦНМО, 2016. – 368с. (или более ранние издания)
Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816с.

- Перечень лицензионного программного обеспечения
не требуется

- Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем
не требуется

- Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости)
не требуется

- Описание материально-технической базы
Учебная аудитория с доской

9. Язык преподавания: русский

10. Преподаватель (преподаватели): Ответственный за курс — Кошель Сергей Михайлович, к.г.н., в.н.с. кафедры картографии и геоинформатики, преподаватели: в.н.с. Кошель Сергей Михайлович

11. Разработчики программы: Кошель Сергей Михайлович, в.н.с. кафедры картографии и геоинформатики, к.г.н.